400 Chinese Best

400个中国最佳初等数学征解老问题

Reader-solved Old problems in Elementary Mathematics

◎ 刘培杰 主编



会得春秋、披览不倦，凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采撷其华实，探涉其源流，钩摹规矩而编节之，改岁阅而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典，
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

400 Chinese Best

400个中国最佳初等数学征解老问题

Reader-solved Old problems in Elementary Mathematics

◎ 刘培杰 主编



雷得春秋，披览不倦，凡大家之手迹，古典之珍品。
莫不求抉其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改易纲而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书汇集了我国20世纪50年代几种主要初等数学杂志中的征解问题及解答.此书的数学语言简练,直达问题核心,易于加深对数学原理的掌握.本书适用于中学生及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

400个中国最佳初等数学征解老问题/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5603-2919-2

Ⅰ.4… Ⅱ.刘… Ⅲ.初等数学-问答 Ⅳ.012-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第104967号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张永芹
封面编辑 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张30.75 字数549千字
版　　次 2009年9月第1版 2009年9月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2919-2
印　　数 1~3 000册
定　　价 48.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序　言

2009年初，英国剑桥大学李约瑟研究所图书馆馆长莫弗特先生到哈尔滨工业大学访问，其间他谈到他所感兴趣的问题之一是当年（抗日战争期间）李约瑟先生带队在中国境内进行科学考察时的一些老照片，这些发黄的老照片使他着迷的是，除了李约瑟及当时中国那些著名的人士之外，照片中出现的其他人都是谁，后来去了哪，新中国成立后他们的命运如何。这种颇为另类的学术趣味与目前中国那种只认名人的风气迥异，而笔者以为这正是一位历史学家应有的独特的视角及观察角度。

几年前，一位数学爱好者唐传发先生多次给笔者打电话，要求出版旧杂志上的征解题，读者的真实需求，我们应设法满足，于是笔者“潜入”哈工大图书馆的旧书库中，在落满灰尘的老杂志中细细搜寻，这是一次愉快的经历，虽然不能像当年西格尔在黎曼遗稿的故纸堆中发现了著名的西格尔不等式那样有学术上的重大收获，但

是也还是有意外的收获。在搜寻的过程中渐渐地发现最令我感兴趣的已经不是题目的内容了，而是当年参与解题的这些人，50多年后他们都在哪，还都从事着与数学有关的工作吗？他们还好吗？下面提及几位当今的数学“名人”作为这次怀旧的副产品。

1956年7月号小知识解答者之一的裘宗沪先生后来成为中国数学竞赛的掌门人，曾任中国数学会普及工作委员会主任，2008年写了《数学奥林匹克之路——我愿意做的事》，为数学竞赛的普及作出了巨大贡献，获国际“爱尔特希(Erdös)奖”。

1957年11月份解答者中有我国著名数论专家冯克勤教授，冯克勤是1959年9月考入中国科技大学的，他在代数数论等领域作出了很重要的工作，他的关于分圆域理论的许多论文受到国际上同行的重视，曾获“华罗庚奖”，并著有《交换代数基础》、《代数数论入门》等著作。早年华罗庚先生布局中国数论研究时曾专设有代数数论一支人马，其中包括陆洪文先生等。如不遇“文革”，费马大定理能否最后终结于中国也未可知。冯克勤先生在一篇题为“我怎样走向学习代数数论之路”的回忆文章(载于张继平主编《新世纪代数学》，北京大学出版社，2002年)中，写道：“我们有一段时期热衷于做《数学通报》上的征解问题，看到通报的解答者名单中有我们的名字都兴奋不已。”

1956年1月号问题征解解答者名单中解答出第4题者有胡久稔先生，胡久稔先生生于1939年2月，是我国知名数理逻辑与计算机科学专家，1963年毕业于中国科技大学应用数学系，南开大学数学研究所教授，写过多本科普著作，他以其对斐波那契数及棋盘跳马问题的精彩科普文章为广大中学生所知晓，他写的小册子《数林掠影》精彩至极，另著有《希尔伯特第十问题》。

1956年5月号问题征解解答者名单中，第一位就是史树中，史树中高中毕业后进入华东师大数学系学习，后到南开大学专攻分析学，但从法国巴黎第十大学访学回国后便专攻金融数学，组建了北大数理金融中心，是我国金融数学第一人(当然现在金融数学的唯一一个院士是山东大学的彭实戈教授)。普及方面曾为湖南教育出版社写过《数学与经济》，专业方面上海人民出版社出版过其所写教材《金融经济学十讲》，高等教育出版社出版过《金融学中的数学》。天不假年，前年史教授因病去世，享年才68岁，他曾任数学天元项目负责人，为数学普及工作做出了很大贡献。笔者曾于1991年在华东师大听过他精彩的报告，后来转行当了编辑后还曾约史教授写过诺贝尔经济奖获得者评传，可惜没能成书。

1955年10月号小知识解答者中有后来成为内蒙古师大数学系教授的李迪教授，李迪教授是中国古代数学史专家，同时也是数学史研究的积极鼓动者，他

使得数学史成为内蒙古师大的特色，现在的大学大多大而无当，小型精致有特色的几乎绝迹，这也是高等教育大发展的副作用。

1958 年第一期解出第 2,3,4,5,6 题的余新河，后来广为“民科”所知，因为他提出了一个所谓“余新河猜想”，后来人们证明它和哥德巴赫猜想是等价的，曾有一度《中国青年报》还以一个整版刊登了一个高达百万元的悬赏，以求得对余新河猜想的证明，这当然是不可能的。

民间有句老话叫“三岁看老”，一个人的成长是具有连续性的，如果一个人在年青时代对数学感兴趣，那么这种兴趣一般会一直延续至中年，他也可能会从事与数学无关的工作，但一旦时机成熟这种对数学的热爱就会冒出来。

在 1956 年 7 月号问题征解解答者中巧的是有两位后来都成为模糊数学专家，一位是四川大学教授刘应明院士，刘应明是 1940 年出生于福建省福州市，1956 年刚满 16 岁，当年他解答出了征解问题中的 1,2,3,4,6 题，刘应明在模糊数学，拓扑学等领域作出了重要贡献，他在连续统假设下，解决了怀特海问题，他对不分明拓扑学的系统成果居世界前列。

在《数学通报》同期解出第 1,2,3,6 题的王国俊，1935 年生于北京市，当时在西安师范学院学习，后曾任陕西师范大学校长，曾发表过多篇有影响的论文，如《S — 闭空间的性质》(《数学学报》,24(1981)),《论 Fuzzy 之结构》(《数学学报》,29(1986)).

解出 2,3 题的周持中是我们数学工作室的老作者，退休前是湖南理工大学教授，专攻递推数列，著有《斐波那契——卢卡斯序列及其应用》(湖南科学技术出版社,1993),我工作室近期会有多部斐波那契数列的书出版。我对周教授最初的认识是通过他 20 世纪 80 年代初发表在《数学实践与认识》上的一篇“关于‘蛙跳问题’的推广”，这是一道 IMO 试题的推广。

在 1956 年 9 月号问题征解解答者中第 2,3,4 题的解答者中有江苏师范学院数学系的周士藩教授，周教授在 80 年代及 90 年代数学竞赛界很活跃，笔者当年就读过他写的小册子《抽屉原则与染色问题》。

其实从大众传媒角度说这些人都是没有大众知名度的，我完全赞同《读库》出版人张立宪先生的观点，我们更应该着眼 Google、百度上搜不出来的人，我们应该成为资讯的源头而不是下一级传递者。

另外，笔者还在各期的解答者名单中发现了几位黑龙江的数学教育界的名人，如曾任黑龙江大学数学系主任的曹重光教授，曾任哈尔滨市中学数学教研员的时承权教授，还有钟贞一先生。

还有一位有些故事的人物是 1958 年 9 月号的解答者叫韩念国，他曾在“文革”期间领导了一个地下数学小组研读经典，当时他是中国科学院北京天文台

台长程茂立手下的一位青年数学家，他曾在很短的时间内对美国阿波罗飞船的轨道进行计算，使中国能追踪美国这一空前的试验计划，从而能有效地即时观测；他指导的5名已在农村安家落户当农民的“老三届”中学生程汉生，王明，钱涛，张保环，王世林后来都通过考试成为数学研究生，并先后在国内外获得博士学位，从事着数学、统计及计算机科学方面的科研教学或专业性工作。近读裘宗沪先生的《我的竞赛之路》，发现韩先生还曾协助过裘先生辅导过数学竞赛选手呢！

还有一位很有意思的人是1958年2月小知识解答者之一的黄全福先生，笔者从中学时代起就看他出的初等数学题目，30多年过去了，这位老先生还活跃在各种中等数学刊物上，在2009年第4期《中等数学》的数学奥林匹克问题中还见到了他提供的一个几何问题，几十年不越雷池一步只在初等数学领域耕耘也算是一个执著之人，他提供的题目大多有趣且偏离主流，像黄金分割、黄金三角形之类，可见是一位有着独特审美标准的人，不随大流，不落俗套，并且几十年一直工作在中学教育第一线，是安徽省怀宁县江镇中学的一名教师。还有一位是过伯祥先生，1956年2月号征解问题解答者，他与谈伯祥先生同为数学普及界的名人，著译书多部，很有影响。

1956年6月号问题征解解答者名单中我们发现了张鸿林先生，科学出版社资深编审，在组织翻译大型前苏联《数学大辞典》中起了重要作用。

在1958年9月号的解答者中有著名分析专家，曾任北京师范大学校长的陆善镇教授。

在1958年1月号问题征解解答者中有东北大学齐东旭教授，他是国内较早倡导分形几何学研究的学者，同时也是早期数学竞赛的热心组织者和命题者。中国首次向IMO供题并被采用就是齐东旭与常庚哲所为。在这一期解答者中还有山东师大数学系教授李师正，他是一个代数专家。还有合肥9中的程龙特级教师，程龙先生在国内与常庚哲和单墫先生合作最早研究了外森比克不等式和匹多不等式，并将80年代国际中学生数学竞赛题引介到中国，还给出解答，是中学数学教师中的佼佼者。

1955年11月号小知识解答者中有前北京大学数学系蓝以中教授，蓝教授以《高等代数教程》被广大数学专业学生所推崇。

在1955年11月号问题征解解答者名单中后来成为著名数学家的有多人，其中包括复旦大学的俞文魮教授，80年代的数学竞赛培训资料上也有俞教授的名字。北京大学的钟家庆教授，钟家庆是国际知名的几何分析专家，曾获陈省身奖，可惜英年早逝，为纪念他，现有“钟家庆奖学金”，另外还有我国著名生物数学学术带头人陈兰孙教授，北京大学复分析专家张南岳教授，曾任哈尔滨

工业大学副校长的偏微分方程反问题专家刘家琦教授及数理逻辑专家沈世镒教授，代数专家哈家定，数学家田增伦教授，这些日后成才的数学家们的名单也向我们展示了当年高中数学的教育水平及生态环境，以上笔者所提到的这些当年的解答者、后来的成功人士多是在数学界、其他行业的成功者，由于笔者孤陋寡闻不敢妄加评断，另外可能有重名现象。再如 1958 年 1 月号名单中赫然出现了蒋大为，由于道路迥然，所以无法断定，如有知情者，能证明确为当今著名歌唱家蒋大为，那真是一桩佳话，说明数学与艺术是相通的。

除了以个人身份参加解答活动之外，还有大量的数学课外小组，这些课外小组从命名方式上可大体分为三类：

第一类是以数学家或科学家名字命名的小组，如：

江西吉安高三(3)高斯数学小组(1958,1)

湖南师院附中爱因斯坦数学小组(1958,1)

河南汲县一中高三(四)祖冲之数学小组(1958,1)

广东台山端芬中学尤拉数学小组(1958,1)

湖北恩施高中商高数学小组(1956,9)

武汉三十三中高二(1)高斯数学小组(1957,12)

南京三中高三(甲)爱因斯坦数理小组(1957,12)

南京十二中高二(3)皮埃尔·居里数理小组(1957,10)

罗巴切夫斯基数学小组(1956,5)

上海七十一中学约里奥·居里物理学习小组(1956,3)

吉林前郭旗麦克斯韦数理小组(1958,2)

武汉三十三中高二(三)裴蜀数学小组(1958,1)

北京师大附中高二(2)班伽罗瓦数学爱好群(1958,9)

湖北孝感高中理想班牛顿数理小组(1958,6)

徐州三中高二(2)居里小组(1958,6)

广州 8 中杨辉数学小组(1957,10)

神州五中华罗庚数学研究小组(1956,7)

上海时代中学高二(4)爱因斯坦物理小组(1956,7)

安徽休宁中学高三甲祖冲之数学小组(1956,9)

上海杨思中学拉斯坦顿夫编委会(1957,4)

吉安高三(3)高斯数学小组(1957,10)

武汉三十三中学高二(4)第三刘徽数学小组(1957,11)

南京师院附中 Tartaglia(即那位口吃的且第一个解出一元三次方程的意大利数学家塔塔利亚，编者注)数学小组(1957,11)

安徽濉溪中学欧拉数学小组(1958,1)
安徽合肥三中高二(1)爱因斯坦数理小组(1958,8)
江苏吴县中学高三(1)棣美弗数学爱好小组(1958,9)
广州广雅中学祖冲之数学研究组(1956,8)
武汉十四中高三四祖暅数学小组(1958,3)
江苏吴县中学高三(2)班 Descartes(笛卡儿)数学小组(1958,3)
上海陆行中学高三(1)高斯数学小组(1958,3)
沈阳市十一中牛顿小组(1958,3)
上海市东中学高二(6)黎曼数学小组(1958,4)
北京三中3班爱因斯坦数理小组(1958,4)
内蒙古扎兰屯高一(一)罗巴契夫斯基小组(1958,4)
陕西三原中学斐马(费马)小组(1958,5)
上海东昌中学祖冲之数学小组(1957,12)

第二类是以数学符号为标记的数学小组,如:

上海同济中学高三(3)$a+bi$ 数学小组(1958,2)
沈阳市一中高二(戊己)$x^n+y^n=z^n$ 数学小组(1958,6)
上海 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 数学小组(1957,10)
武汉十五中“$x+y=lxt$”小组(1957,11)
上海市东中学高二(六)$\sin\frac{\pi}{2}$数学小组(1958,1)
成都十二中高三(1)“η”数学小组(1957,4)
吉林九中高三(七)Δ 数学小组(1957,4)
上海敬业中学高(4)$\alpha\beta\gamma$ 数学小组(1957,4)
安徽黄麓师范 $\alpha\beta\gamma$ 数学小组(1957,10)
上海51中高二(三)a,b 数学小组(1957,10)
半成中学 Ω 数理小组(1957,10)
成都江中高三(1)“n”数学小组
江西泰和中学 π 数学小组(1957,12)
福州四中 $\alpha\beta\gamma$ 数学小组(1957,11)
江苏太川中学 x,y,z 数学小组(1957,11)
湖北实师(37)W 数学小组(1957,11)
徐姚一中$\frac{1}{\pi}$数学小组(1957,11)
湖南洋县一中高十七班 $m=xy$(1957,12)
天津大学 $\alpha\omega\theta$ 先生(1957,12)

江苏崐山中学高二乙 χ,ψ,ω 数学小组(1958,1)
天津十九中高三(一)Δl 数学小组(1958,1)
上海高洋模范中学高二(x)$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$数学物理小组(1958,1)
上海建平中学$\sum\sum\sum$数学小组(1958,2)
上海东昌中学高三(1)$\sum\pi$ 数学小组(1958,2)
广东普一中高二甲班$(\infty+\epsilon)/2$ 数学小组(1958,2)
上海中国中学高二(1)$E=mc^2$ 爱因斯坦数学物理研究小组
安徽全椒县$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\prod\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}$ 数学小组(1958,2)
上海敬业中学高二($y_{max}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+4$)高斯小组(1958,2)
江苏兴化中学 π 数学小组(1958,3)
上海控江中学勾股弦数学小组(1958,3)
长春第十二高中三年 6 班 ∞ 数学小组(1958,3)
上海市 61 中学$\sum$数学小组(1958,3)
上海敬业中学高二(4)$\alpha\beta\gamma=3$ 数学小组(1958,3)
江苏泰州中学高二 $f(\psi)$数学小组(1958,4)
安徽芜湖一中高二(4)$p=mg$(1958,4)
浙江瑞安中学高二(4)$\sum x^2$ 数学小组(1958,4)
广西壮族自治区博白第二中学 log 数学小组(1958,5)
苏州四中 $y=f(x)$小组(1958,5)
浙江瑞安中学高三(4) $-\sum x^a$ 数学小组(1958,8)
上海陕北中学高三(3)$\alpha\beta\gamma\cdots\chi\psi\omega$ 数学小组(1958,9)
上海新成中学 Δ 数理化小组(1958,9)

第三类是以政治口号为标志的小组使人很容易回忆起那个年代,如:

师大附中超英数学小组(1958,9)
广州华南师院附中石牌分校高二(3)红色数学研究小组(1956,8)
上海格致中学高三进军数学小组(1956,7)
江苏川沙县中高三(甲)青春数学小组(1957,10)
河北定县一中火箭数学小组(1957,12)
武昌实验中学高二(六)黎明与前进数学小组(1957,12)
上海五四中学,IV_6 红专数学小组(1955,3)
安徽歙县中学高二"金星"数学小组(1957,12)
上海复兴中学高二(1)萌芽数学小组(1957,12)
常州二中朝阳数学小组(1957,1)

如果说从这些征解问题的解答者名单中我们感受到的一定要用几个词来表述的话，我想第一个应该是热爱，那时人们是真心热爱科学、爱数学，对科学家、数学家崇敬有加。以中国古代数学家为名字的有祖冲之，杨辉，刘徽，祖暅，商高；外国数学家有高斯，欧拉，黎曼，费马，斐蜀，笛卡儿，罗巴切夫斯基，棣美弗，伽罗瓦，塔塔利亚；物理学家有牛顿，爱因斯坦，约里奥·居里，皮埃尔·居里，麦克斯韦。就像今天的追星族一样，当然，从个体角度讲这两类崇拜无法评判优劣，我们也无权评判，但从国家和整个民族来看就大有区别，优劣立现。第二个词叫热情，从名单看出许多人对解数学题真是充满热情，连续几年，几乎每期都参与答题，如裘宗沪先生、史树中先生。

除此之外还有一些难于归类但也有趣的名字，如：

上海蓬莱中学高三(1)狄建华数学分子团

江苏川沙中学高三乙“文秀安国”

上海 69 中蜻蜓小组

武汉十四中高三(二)鸭子数学小组

另外一些业外人士当年也多有参与，如 1956 年 1 月号的 1，2，3，4 题解答者中就有来自哈尔滨 103 部队的工兵，还有河南许昌第一初师数学组，重庆建筑工程学校数学学科委员会，上海机器制造学校，上海动力机校，云南大学叶时爽空气动力学组。

另外一个有趣的现象是那个年代就已经有补习学校了，一般我们认为今天的应试教育催生了众多的补习学校，其实早已存在，出现频率较高的有湘潭如意补习学校。

最后说说本书所选题目，老题对今天有什么用，这是我们必须回答的一个问题，数学题虽然不像古董越老越值钱，但仍有其自身价值。

数学原理亘古不变，但用以训练掌握这些定理的习题的形式却与时俱进，所以看一点老题可以了解其演变过程，举个语言学的例子，在我们日渐西化的语言中“OK”是一个常用的词，如果追溯起它的历史起源可能会使我们有些意想不到，“OK”其实是来自拼错的词组“oll korrect”，本应是“all correct”(什么都是对的)，最早出现在 19 世纪 40 年代波士顿的报纸上，当时非常流行故意拼错单词来造成幽默的效果。

现在许多初等数学题像现在的食品一样，过度包装以至盒子比食品贵，使购买者几乎忘了这是要吃的而不是要看的，早期的数学题语言简练，直达问题核心，作完以后对原理的掌握立马加深。

从这个意义上说，老题自有其存在价值！

1996 年北京师范大学请冯克勤教授为学生做一次通俗性的演讲，讲演之

后冯教授向《数学通报》的主编刘绍学和严士健等先生建议现在的《数学通报》继续刊登中学生解答者的姓名，他们说目前有诸多困难。我们来分析一下，现在中学生学数学，中学教师教数学的主要动力是高考，一切成为高考试题可能性不大的题目是没人感兴趣的，所以困难之一是没有多少人参与此事，即没名单可公布；另外，题目质量也越来越差，多为成题，叫人没有解答欲望，所以只有供题者自己提供解答，互动变为自弹自唱，而这一切都根源于缺少多元化、多样性，所以重现昔日这种民间活动，借以促进多元与多样化。

刘培杰

2009.9.1 于哈工大

目 录

* 1955 年 10 月号问题解答 /1
1955 年 10 月号问题征解解答者名单 /9
* 1955 年 10 月号小知识问题答案 /11
1955 年 10 月号小知识解答者名单 /14
* 1955 年 11 月号问题答案 /15
1955 年 11 月号问题征解解答者名单 /19
* 1955 年 11 月号小知识问题解答 /22
1955 年 11 月号小知识解答者名单 /28
* 1955 年 12 月号征解问题答案 /29
1955 年 12 月号问题征解答者名单 /39
* 1955 年 12 月号小知识问题解答 /41
1955 年 12 月号小知识解答者名单 /46
* 1956 年 1 月号问题征解答案 /47
1956 年 1 月号问题征解解答者名单 /55
* 1956 年 1 月号小知识问题答案 /57
1956 年 1 月号小知识解答者名单 /64

✱ 1956年2月号问题答案 /65
1956年2月号问题征解解答者名单 /71
✱ 1956年2月号小知识问题答案 /73
1956年2月号小知识解答者名单 /77
✱ 1956年3月号征解问题答案 /78
1956年3月号问题征解解答者名单 /88
✱ 1956年3月号小知识问题答案 /90
1956年3月号小知识解答者名单 /95
✱ 1956年4月号征解问题答案 /96
1956年4月号问题征解答者名单 /107
✱ 1956年4月号小知识答案 /109
1956年4月号小知识解答者名单 /115
✱ 1956年5月号问题征解解答 /116
1956年5月号问题征解解答者名单 /121
✱ 1956年5月号小知识问题答案 /122
1956年5月号小知识解答者名单 /127
✱ 1956年6月号征解问题答案 /128
1956年6月号问题征解解答者名单 /143
✱ 1956年6月号小知识问题答案 /145
1956年6月号小知识解答者名单 /150
✱ 1956年7月号征解问题答案 /151
1956年7月号问题征解解答者名单 /163
✱ 1956年7月号小知识问题答案 /166
1956年7月号小知识解答者名单 /170
✱ 1956年8月号征解问题答案 /171
1956年8月号问题征解解答者名单 /178
✱ 1956年8月号小知识问题答案 /180
1956年8月号小知识问题解答者名单 /188
✱ 1956年9月号征解问题答案 /189
1956年9月号问题征解解答者名单 /196

✱ 1956 年 9 月号小知识问题答案 /198
1956 年 9 月号小知识解答者名单 /205
✱ 1957 年第 4 期问题解答 /206
1957 年第 4 期问题解答者姓名 /212
✱ 1957 年 10 月号小知识问题答案 /214
1957 年 10 月号小知识解答者名单 /226
✱ 1957 年 10 月号问题 /227
1957 年 10 月号问题解答者名单 /231
✱ 1957 年 11 月号小知识问题答案 /233
1957 年 11 月号小知识解答者名单 /238
✱ 1957 年 11 月份问题解答 /239
1957 年 11 月份解答者名单 /244
✱ 1957 年 12 月号征解问题答案 /246
1957 年 12 月号问题征解解答者名单 /254
✱ 1957 年 12 月号小知识问题答案 /256
1957 年 12 月号小知识解答者名单 /266
✱ 1958 年 1 月号小知识问题答案 /267
1958 年 1 月号小知识解答者名单 /273
✱ 1958 年第 1 期问题解答 /274
1958 年第 1 期问题解答者姓名 /281
✱ 1958 年 1 月号问题 /283
1958 年 1 月号解答者名单 /285
✱ 1958 年 2 月号征解问题答案 /287
1958 年 2 月号问题征解解答者名单 /297
✱ 1958 年 2 月号小知识问题答案 /299
1958 年 2 月号小知识解答者名单 /310
✱ 1958 年第 2 期问题答案 /311
1958 年第 2 期问题解答者姓名 /317
✱ 1958 年 2 月号问题 /319
1958 年 2 月号问题解答者名单 /325

✻ 1958 年 3 月号征解问题答案 /326
1958 年 3 月号问题征解解答者名单 /332
✻ 1958 年 3 月号小知识问题答案 /334
1958 年 3 月号小知识解答者名单 /344
✻ 1958 年第 3 期问题解答 /345
1958 年第 3 期问题解答者姓名 /351
✻ 1958 年 3 月号问题 /353
1958 年 3 月号解答者名单 /356
✻ 1958 年 4 月号征解问题答案 /359
1958 年 4 月号问题征解解答者名单 /364
✻ 1958 年 4 月号小知识问题答案 /366
1958 年 4 月号小知识解答者名单 /375
✻ 1958 年 5 月号征解问题答案 /376
1958 年 5 月号问题征解解答者名单 /382
✻ 1958 年 5 月号小知识问题答案 /384
1958 年 5 月号小知识解答者名单 /398
✻ 1958 年 5 月号问题 /399
1958 年 5 月号问题解答者名单 /402
✻ 1958 年 6 月号小知识问题答案 /403
1958 年 6 月号小知识解答者名单 /417
✻ 1958 年 6 月号问题 /418
1958 年 6 月号问题解答者名单 /421
✻ 1958 年 7 月号问题 /423
1958 年 7 月号问题解答者名单 /427
✻ 1958 年 8 月号征解问题答案 /428
1958 年 8 月号问题征解解答者名单 /432
✻ 1958 年 8 月号小知识问题答案 /434
1958 年 8 月号小知识问题解答者名单 /439
✻ 1958 年 8 月号问题 /440
1958 年 8 月号问题解答者名单 /447

✱ 1958 年 9 月号征解问题答案 /449
1958 年 9 月号问题征解解答者名单 /458
✱ 1958 年 9 月号小知识问题答案 /459
1958 年 9 月号小知识解答者名单 /466
✱ 1958 年 9 月号问题 /467
1958 年 9 月号解答者名单 /471

1955年10月号问题解答

❖弓形面积的比

1.已知一弓形的高等于1 m,底等于4 m;另一弓形的高等于4 m,底等于1 m.试求它们面积的比.(提出人:王北海)

解 先求第一弓形的面积.如图1,$\angle ABC=\angle BEC=\frac{1}{2}\angle BOC=\theta, AB=4, CD=1, OA=r$,并且有$BD^2=ED\cdot CD$,即$2^2=1\cdot(2r-1)$.

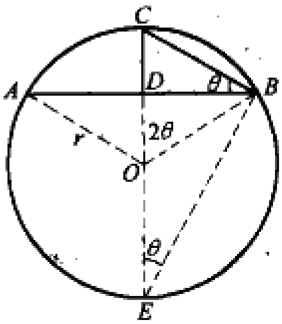


图1

因此,圆半径$r=\frac{5}{2}$m,$\tan\theta=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{2}$.又下式成立

$$S_{扇形OACB}=2\theta r^2=2r^2\arctan\frac{1}{2}=\frac{25}{2}\arctan\frac{1}{2}$$

$$S_{\triangle OAB}=2(r-1)=2(\frac{5}{2}-1)=3$$

所以 $S_{弓形ACB}=\frac{25}{2}\arctan\frac{1}{2}-3$

再求第二弓形的面积.如图2,$\angle B'A'E'=\angle A'C'E'=\frac{1}{2}\angle A'O'D'=\theta, C'D'=4, A'B'=1, O'C'=R$,并且有$A'D'^2=E'D'\cdot D'C'$,即$\frac{1}{4}=4(2R-4)$.

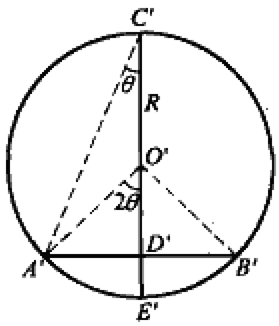


图2

因此圆半径$R=\frac{65}{32}$,$\tan\theta=\frac{1}{8}$.又下式成立:

$$S_{扇形O'A'E'B'}=2\theta R^2=\frac{2\cdot 65^2}{32^2}\arctan\frac{1}{8}$$

$$S_{弓形A'C'B'}=\pi R^2-2\theta R^2+\triangle A'O'B=$$

$$\pi R^2-2\theta R^2+(4-R)\frac{1}{2}=$$

$$\left(\pi-2\arctan\frac{1}{8}\right)\frac{65^2}{32^2}+2-\frac{65}{64}$$

所以 $$\frac{S_{弓形ACB}}{S_{弓形A'C'B'}}=\frac{2^9\cdot 25\arctan\frac{1}{2}-3\cdot 2^{10}}{\left(\pi-2\arctan\frac{1}{8}\right)65^2+2^{11}-2^2\cdot 65}$$

❖解指数方程组

2. 试解联立方程式 $x+y=5, x^y+y^x=17$.(提出人:杨挚天)

解 由第一式得出 $y=5-x$,代入第二式就有 $x^{5-x}+(5-x)^x=17$.

令 $s=x^{5-x}+(5-x)^x$,当 x,y 都只允许取实数的时候,要 s 的值等于17,就可以看出 x 与 y 都是有界的.如果把 $x=8$ 代入 s 的表示式就有 $s>17$,这就表明 x 只能小于8才可能满足所说的两方程形.

又因为 x 与 y 互换原方程式是不变的,经过试验可以得出 $x=2,y=3$ 与 $x=3,y=2$ 两组根.

❖外分角线相等的三角形

3. 假设不等边 $\triangle ABC$ 在 B 与 C 的外角等分线相等,试证:$\frac{s-a}{a}$ 是 $\frac{s-b}{b}$ 与 $\frac{s-c}{c}$ 的比例中项.

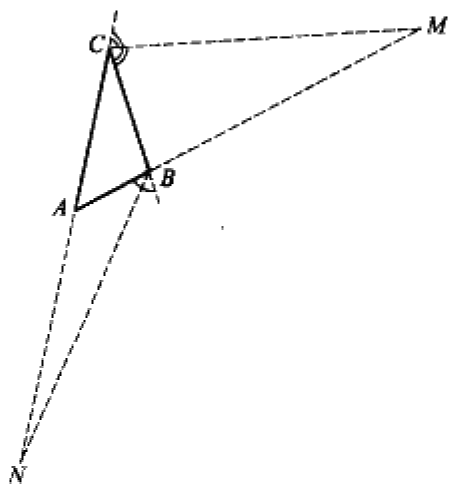


图3

解 如图3,假设 $\angle C$ 的外角等分线与 AB 相交于 M.于是 A 在 B 与 M 之间,或 B 在 A 与 M 之间.第一种情形,$\angle M$ 等于 $\frac{1}{2}\pi-\left(B+\frac{1}{2}C\right)$.第二种情形 $\angle M$ 等于 $B+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\pi$.因此

$$\sin M=\pm\cos\left(B+\frac{1}{2}C\right)$$

再 CM 不能够与 AB 平行,不然 $\angle A=\angle B$,而与假设不合.

在 $\triangle BCM$ 中我们有

$$\frac{CM}{BC}=\frac{\sin B}{\sin M}=\pm\frac{\sin B}{\cos(B+\frac{1}{2}C)}$$

同样作 $\angle B$ 的外角等分线与 AC 相交于 N. 于是有

$$\frac{BN}{BC}=\pm\frac{\sin C}{\cos\left(C+\frac{1}{2}B\right)}$$

因为 $CM=BN$,因此下式成立

$$\sin C\cos\left(B+\frac{1}{2}C\right)\mp\sin B\cos\left(C+\frac{1}{2}B\right)=0$$

利用半角函数,上式变成

$$2\left[\sin\frac{1}{2}B\mp\sin\frac{1}{2}C\right]\left[\cos^2\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C\right)\pm\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C\right]=0$$

上式中如果第一个因子等于零,即 $\angle B=\angle C$ 的情形,显然与 $\triangle ABC$ 是不等边三角形的假设不合,因此只有第二个因子等于零的情形. 即得

$$\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C=\cos^2\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C\right)=\sin^2\frac{1}{2}A$$

又根据 $\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$,代入上式即得所说结果.

❖求作四面体

4. 已知四面体某四边的中点,求作这个四面体.

解 假定四点是 M,N,P,Q,它们不在一平面上(图 4(a)). 这时首先将 M,P,Q 连成一个三角形. 过 P 作 MQ 的平行线 AC,过 Q 作 MP 的平行线 BC,再过 M 作 PQ 的平行线 AB. 于是得 $\triangle ABC$,并且 P,Q,M 分别是 AC,CB,BA 的中点. 联结 AN,并延长到 D,使 $ND=AN$. 所得 $D-ABC$ 即为所求.

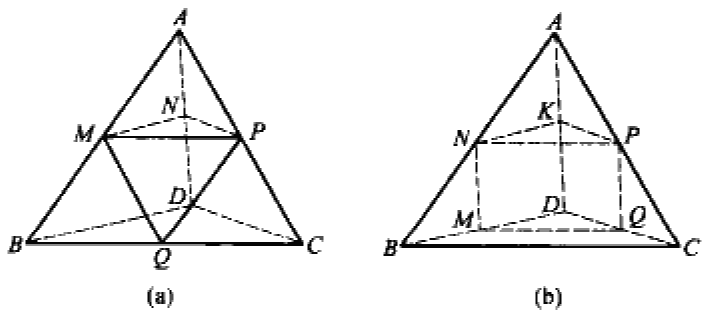


图 4

同样联结 BN 或 CN 也得到合于条件的两个四面体. 再首先连得的三角形共有四种联结法,因此有 12 个四面体合于所说条件.

如果 P,Q,M,N 在一平面上一般没有解,但 $PQMN$ 是平行四边形的时候,

得作法如下(图4(b)).

在平行四边形 $PQMN$ 外取一点 D,作 $DK \parallel QP$ 并使 $DK = KA = QP$.联结 AN 到 B 使 $AN = NB$.联结 AP 到 C 使 $AP = PC$,所得 $D-ABC$ 即为所求.这时有无穷多个四面体合于所说条件.

❖解分数方程式

5.试解下列方程式(见前苏联《中学数学》1955年第四期)

$$\frac{1}{x+a}-\frac{1}{2x+a}+\frac{1}{3x+a}+\frac{1}{4x+a}-\frac{1}{5x+a}+\frac{1}{6x+a}-\frac{1}{7x+a}=\frac{1}{a}$$

解　原式经过移项就变成下式

$$\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{6x+a}\right)+\left(\frac{1}{3x+a}+\frac{1}{4x+a}\right)-\left(\frac{1}{2x+a}+\frac{1}{5x+a}\right)-\left(\frac{1}{7x+a}+\frac{1}{a}\right)=0$$

即

$$\frac{7x+2a}{6x^2+7ax+a^2}+\frac{7x+2a}{12x^2+7ax+a^2}-\frac{7x+2a}{10x^2+7ax+a^2}-\frac{7x+2a}{7ax+a^2}=0$$

于是有

$$7x+2a=0, x=-\frac{2}{7}a$$

令 $7ax+a^2=y$,就得下式

$$\frac{1}{6x^2+y}+\frac{1}{12x^2+y}-\frac{1}{10x^2+y}-\frac{1}{y}=0$$

即

$$\frac{4x^2}{60x^4+16yx^2+y^2}-\frac{12x^2}{12yx^2+y^2}=0$$

于是有 $x^2=0, x=0$,并得

$$12yx^2+y^2-3(60x^4+16yx^2+y^2)=0$$

化简此式得

$$90x^4+18yx^2+y^2=0$$

所以

$$y=\frac{-18x^2\pm x^2\sqrt{324-360}}{2}=(-9\pm 3\mathrm{i})x^2$$

即

$$7ax+a^2=-(9-3\mathrm{i})x^2,(9-3\mathrm{i})x^2+7ax+a^2=0, x=\frac{-7\pm\sqrt{13+12\mathrm{i}}}{18-6\mathrm{i}}a$$

又

$$7ax + a^2 = -(9+3i)x^2, (9+3i)x^2 + 7ax + a^2 = 0, x = \frac{-7 \pm \sqrt{13-12i}}{18-6i}a$$

❖三堆火柴

6.有三堆火柴,根数分别是5,10,14.两人轮流来取,每次最少取一根,并可以在一堆中取任意多根,但不能在两堆中同时取.如果规定取最后1根的人算输,试问怎样取法,先取的人一定赢.(提出人:郑有余)

解 先取的人在5根的一堆中取出1根,再按下列取法就一定赢.

这是因为,我们把5,10,14三数用2的幂次和写出来就得

$$5 = 1 + 4, 10 = 2 + 8, 14 = 2 + 4 + 8$$

先取的人在5根的一堆中取出1根,三堆根数就变成4,2+8,2+4+8.这里面恰有两个2,两个4,两个8.

后取的人在根数4,2+8,2+4+8的三堆里面,无论如何取法总要破坏一个8,或破坏一个4,或破坏一个2.例如后取的人在根数2+4+8的一堆里面取出3根,就变成根数是4,2+8,1+2+8的三堆.这时破坏了一个4.

先取的人只要在根数4的一堆里面取出3根就变成根数是1,2+8,1+2+8的三堆.这里面有两个1,两个2,两个8.

后取的人在根数1,2+8,1+2+8的三堆里面,无论如何取法,总要破坏一个1,或破坏一个2,或破坏一个8.

这样下去,先取的人总可以变成根数是1,2,3的三堆,或变成根数相等的两堆.这样后取的人就一定输了.

一般情形,总是把三数写成2的幂次和,而先取的人总使三堆根数中恰有两个2^i($i = 0,1,2,\cdots$),这样先取的人就一定赢.

❖找出假珍珠

7.有珍珠121颗,里面有一颗是假的,它与真的质量不同,但真的每颗质量相同.试问用天平五次,如何将假的找出来?

解 当下式①中a_i($i = 0,1,\cdots,n-1$)相互无关的经过0,1,2的时候

$$a_{n-1}3^{n-1} + a_{n-2}3^{n-2} + \cdots + a_1 3 + a_0 \quad ①$$

就得到下面$2h$个数目

$$0, 1, \cdots, 2h-1, 2h \quad ②$$

但 $h = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1 = \frac{3^n - 1}{3 - 1}$.如果式①减去 h,所得数目就是

$$-h,\cdots,-1,0,1,\cdots,h \quad ③$$

这就是让式①中各 a_i 相互无关的经过 $-1,0,1$ 所得的,这也就证明了③中 $2h$ 个数目的任意一个可以唯一的写成式①,而且使 a_i 只取 $-1,0,1$ 三个数目.

假定3的各次幂分别带上正负号是 $+1,-1,+3,-3,+9,-9,\cdots$ 于是从上面所说可以看出任意正整数 h 或者它的反号数 $-h$ 可以唯一的用3的各次幂相互加减而得,例如 $5 = 9 - 3 - 1$,$-5 = -9 + 3 - 1$.这性质可以用来解决秤珠问题.

这时首先将121颗珍珠用1到121的数目表示,并按下列方法适当的将某些数目改成负的,例如5就一定带上负号写成 $-5 = -9 + 3 + 1$.

一般情形,我们把所有形式 $\frac{3^n - 1}{2}$ 的偶数,即4,40,364,… 与不能写成这种形式的奇数,即除开1,13,121,… 以外的任何奇数都加上负号.为了明了起见,列出下面的表1.

表1

正号数目	(1) + 2	6 + 8 + 10 + 12	(13) + 14 + 16 + … + 38	42 + 44 + … + 120
负号数目	3	(4) + 5 + 7 + 9 + 11	15 + 17 + … + 39	(40) + 41 + … + 119

根据这个表格,我们把121个代表珍珠的数目(有正有负)写成下列形状

$$a_{n-1}3^{n-1} + a_{n-2}3^{n-2} + \cdots + a_1 3 + a_0 \quad (a_i = -1,0,1)$$

一数写成上列形状的时候,如果 $a_i = 1$ 就把它写在 3^i 的下面,如果 $a_i = -1$ 就把它写在 -3^i 的下面.于是构成表2.

第 $i+1$ 次($i = 0,1,2,3,4$)秤珠的时候,只要把表2中 3^i 与 -3^i 下面各数代表的珍珠分别放在左右两盘中,但第121颗总放在盘外.如果第 $i+1$ 次是左盘重记下 $+3^i$,如果是左盘轻就记下 -3^i,如果两盘平衡就记下0,再把各次所记数目相加起来.如果相加得到一个正奇数或负偶数,这数代表的珍珠就是轻珠.如果相加得到的是一个负奇数或正偶数,这数代表的珠就是重珠(但还需注意例外情形1,4,13,40,…).如果相加得到的是0就表示第121颗是坏珠,轻重还没有决定.

例如第1,2,3,4,5次秤得结果分别是左盘比右盘重,重,平,轻,轻,那么

$$3^0 + 3^1 + 0 - 3^3 - 3^4 = -104$$

即第104颗轻珠.如果轻重关系是轻,轻,平,重,重,那么第104颗是重珠.

要注意左盘常重与右盘常重的两种情形决不会发生.这是因为数目

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$$

这数比120要大些,而所秤各珠只有120颗的缘故.

表 2

3^0	-3^0	3^1	-3^1	3^2	-3^2	3^3	-3^3	3^4	-3^4
1	2	2	3	6	5	14	15	42	41
5	4	5	4	8	7	16	17	44	43
10	7	7	6	10	9	18	19	46	45
11	8	12	11	12	11	20	21	48	47
13	14	13	14	13	14	22	23	50	49
16	19	15	16	15	16	24	25	52	51
17	20	20	21	17	18	26	27	54	53
22	25	22	24	19	20	28	29	56	55
23	26	23	29	21	22	30	31	58	57
28	31	25	31	32	33	32	33	60	59
29	32	30	32	34	35	34	35	62	61
34	37	33	34	36	37	36	37	64	63
35	38	38	39	38	39	38	39	66	65
41	40	41	40	41	40	41	40	68	67
46	43	43	42	43	42	43	42	70	69
47	44	48	47	45	44	45	44	72	71
52	49	51	49	47	46	47	46	74	73
53	50	56	50	49	48	49	48	76	75
58	55	58	52	60	59	51	50	78	77
59	56	59	57	62	61	53	52	80	79
64	61	61	60	64	63	55	54	82	81
65	62	66	65	66	65	57	56	84	83
68	67	68	67	68	67	59	58	86	85
70	73	69	70	69	70	61	60	88	87
71	74	74	75	71	72	63	62	90	89
76	77	76	77	73	74	65	64	92	91
82	79	79	78	75	76	67	66	94	93
83	80	84	83	86	87	96	95	96	95
86	85	86	85	88	89	98	97	98	97
88	91	87	88	90	91	100	99	100	99
89	92	92	93	92	93	102	101	102	101
95	94	95	94	95	94	104	103	104	103
100	97	97	96	97	96	106	105	106	105
101	98	102	101	99	98	108	107	108	107
106	103	105	103	101	100	110	109	110	109
107	104	110	104	103	102	112	111	112	111
112	109	112	106	114	113	114	113	114	113
113	110	113	111	116	115	116	115	116	115
118	115	115	114	118	117	118	117	118	117
119	116	120	119	120	119	120	119	120	119
121		121		121		121		121	

从表 2 可以看出颗数比 39 多而比 121 少的情形，秤 5 次也可以找出假珠并决定它比好珠轻些或重些．这时要注意，经过第一次秤珠之后，就可以判定若干颗是好珠．以后秤珠的时候，就可以把好珠从盘中取出一些，或从盘外添进一些使各盘颗数相等．

又从表 2 可以看出秤 n 次可以从$\frac{3^n-1}{2}$颗中找出那颗假珠来，因此一般情形得到解决.

如果 n 颗珍珠中有两颗同样重的假珠，其余真的每颗质量相同，但假珠与真珠质量不同. 试问用天平几次可以找出假珠. 这是一个没有解决的问题. 谢泉同志曾证明 $n=5,9,16,27,47,81$ 的时候，分别要 3,4,5,6,7,8 次可以找出所说的两颗假珠，并证明 $2m$ 次可以在 3^m 颗中找出两颗假珠. 但次数是奇数的一般情形没有解决.

秦树立同志曾经推测，得下列结果：如果 n 颗珍珠中有 t 颗$\left(t<\frac{n}{2}\right)$同样重的假珠，其余真的每颗质量相同，但假珠与真珠的质量不同. 当 $3^m-1\geqslant\frac{2\cdot n!}{(n-t)!t!}>3^{m-1}-1$ 的时候，用天平 m 次可以找出所说 t 颗假珠，并且至少要 m 次才可以找出所说 t 颗假珠. 这一推测只在 $t=1$ 的时候得到证明；在 $t=2$ 的时候，谢泉同志的结果与这相符，但没有全部证明；在 $t\geqslant3$ 的时候，更没有得到解决.

1955 年 10 月号问题征解解答者名单

解答第 1,2,3,4,5,6 题者:陈玉盛,程海杰,马慎余,陈亚文.

解答第 2,3,4,5,6 题者:汪惠鑫,上海和平中学高三(2) 数学小组.

解答第 1,2,4,5,6 题者:杨祥谱,汪壶君,浙江宁波一中七八数学组,钱建中.

解答第 1,2,3,4,5 题者:盛沛根,盛沛栋.

解答第 1,2,5,6 题者:林绍蔚.

解答第 1,2,4,6 题者:廖明忠,沈德强,林锡洲,林应标.

解答第 1,2,3,4 题者:安心平,姜乃剑.

解答第 1,3,4,5 题者:吴友准.

解答第 2,4,5 题者:田增伦,邬思.

解答第 1,2,5 题者:远讯,郭臻雷.

解答 1,3,6 题者:廖佛寿.

解答第 1,2,6 题者:邓光与,张禄度,张国定.

解答第 2,4,6 题者:严梦桥,王其纶,徐孝舜,齐齐哈尔铁路工程学校数学课外活动小组,肖景明,上海南洋模范中学高二科趣小组.

解答第 1,2,4 题者:喻晙,福建惠安第一中学高十二组乙数学小组.

解答第 1,4,6 题者:肖嗣尧.

解答第 2,4,5 题者:林介义.

解答第 1,4,5 题者:彭祖仁.

解答第 2,4 题者:薛祥荣,张鉴燊,施裕焱,姚国宝,王仕璠,程汝良,俞文魮,孙坤保,丁达夫,李维亮,温兆森,王元康,刘奉华,忻华泰,刘麟仲,吴宗汉,任奉祥.

解答第 1,4 题者:雷忠德,胥弈维,肖耀寰,刘鸣山,孙敏生.

解答第 1,2 题者:刘君然,张星辰.

解答第 2,3 题者:砀山一中数学组.

解答第 4,5 题者:何混五,白浪,菲强.

解答第 1,6 题者:李绍唐,杨庆铎.

解答第 4,6 题者:邵惠白,许自荣,屈见秋,马俨,丁景.

解答第 2,5 题者:张钦宜,熊仕文.

解答第 2,6 题者:屠恒艋,田端鹏,麦卓文.

解答第1,3题者:张国栋.

解答第1题者:熊泽元,叶礼锴,米金喜,时索思夫,吴光天,唐汇文,曾滋滔,衣谷平,王仁夫,王积祥,郑天健.

解答第2题者:李盛汉,马尔威,程基沛,朱思铭,宁波诚信补习班数学组,明亮,苏学快,汪关荣,钟光祚,王锦江,悟山龙,某君,刘彗,臧朋年,白燕,朱茂春,陈静剑,左仲虎,崔世杰,高雄伟,姚国宝,洪宪章,张振鑫,潘国梁.

解答第3题者:彭恒,潘咸按,张有紘,孙承贤.

解答第4题者:岩石,火焰,洪志强,姜可璋,裘宝林,白云亭,林进修,金顺铨,辛义德,周永昌,李长诰,上海交通中学高三数学组,米洙.

解答第5题者:朱冬鸥,周景舜,王广有,赵普德,鲍德贤.

解答第6题者:萧平,张麟,何守千,笪远宁,赵正斌,孙文仪,杨诚,唐振华,林名彪,梁杰英,吴耀光,杨惟诚,李抗强,华永一,徐盛福,李本安,吴耀光,李文青,乐伟达,蔡维忠,马成忠,余虹钰,郑道煨,陈筱明.

1955年10月号小知识问题答案

❖两端相遇的直线

1.有人说把一根直线向两端无限延长,是可以相遇的.这是什么道理.(提出人:李诚正)

答 在欧氏几何里面的直线,向两端无限延长是无论如何不能够相遇的.但在射影几何里面,每根直线上有一个无穷远点,这种点可以想象成是把一根直线向两端无限延长而得到的.根据射影性质,无论把直线向哪一端延长都应该得到同一的无穷远点.因此可以说:"把一根直线向两端无限延长,相遇于无穷远点".这与地球上两人一向东走,一向西走,终究会相遇的性质相似.

❖三整数的立方和

2.据说三个边长等于整数的正立方体相加起来,可以得到一个边长等于整数的正立方体,但两个边长等于整数的正立方体相加起来,却无论如何不能得到一个边长等于整数的正方体.这是否有证明?如果有,是怎样证明的.

答 三个边长分别等于3,4,5的正立方体,相加起来恰可以得到一个边长等于6的正立方体.这是因为$3^3+4^3+5^3=6^3$.还有相似的等式

$$1^3+6^3+8^3=9^3,7^3+14^3+17^3=20^3,11^3+15^3+27^3=29^3$$

再当d是任意整数的时候,下列恒等式成立

$$(d^2+16d-21)^3+(16d-d^2+21)^3+$$
$$(2d^2-4d+42)^3=(2d^2+4d+42)^3$$

又当x,y是整数的时候,下列恒等式成立

$$(x^2-7xy+63y^2)^3+(8x^2-20xy+42y^2)^3+$$
$$(6x^2+20xy-56y^2)^3=(9x^2-7xy+7y^2)^3$$

一般情形,我们要求出下列不定方程式的有理数解

$$W^3+X^3+Y^3+Z^3=0 \qquad ①$$

令$W=p+q,X=p-q,Y=r-s,Z=-r-s$,就得到

$$p(p^2+3q^2)=s(s^2+3r^2) \qquad ②$$

再令 $2p=x+w,2s=x-w,2q=y+2,2r=y-2$,就有

$$w^3+3w(x^2+y^2+z^2)+6xyz=0 \qquad ③$$

上式写成行列式的形状就是

$$\begin{vmatrix} w & 3z & -3y \\ -z & w & 3x \\ y & -x & w \end{vmatrix}=0$$

这就是说有有理数 a,b,c 存在,满足下列三式

$$wa+3zb-3yc=0$$
$$-za+wb+3xc=0$$
$$ya-xb+wc=0$$

消去 y 与 z 就得到 $(a^2+3b^2+3c^2)w+6bcx=0$. 如果 $a\neq 0$,所求解就可写成下式

$$\begin{cases} w=-6\rho abc \\ x=\rho a(a^2+3b^2+3c^2) \\ y=\rho b(a^2+3b^2+9c^2) \\ z=3\rho c(a^2+b^2+3c^2) \end{cases} \qquad ④$$

但如果 $a=0$,就有 $(b^2+3c^2)w=0,w=0,x=0$. 这时上列四个式子仍然成立. 这就是说 ① 的一切有理解可以用 ④ 写出,但 a,b,c 是互质的整数,ρ 是任意有理数.

两个边长等于整数的正立方体相加起来,却无论如何不能得到一个边长等于整数的正立方体,这是费马大定理.

❖只用圆规的作图法

3. 请问用直尺与圆规能作的图,单用直尺是否能作?单用圆规呢?(提出人:张鉴卿).

答　欧几里得曾经假定画几何图形的三条规律:(1) 两已知点之间可以连成一直线;(2) 线段可以无限的延长;(3) 用已知圆心与半径可以作圆.

用这三条规律来画几何图形叫做尺规作图法.

如果只允许用第(1)(2) 两条规律来画几何图形,就叫做直尺作图法;如果只允许用第三条规律来画几何图形,就叫做圆规作图法.

几何作图所解决的问题,实际上是从一些已知点求出另外一些未知的新

点.用解析几何的观点来看,就是已知一些点的坐标要求出另外一些未知新点的坐标.

只用直尺作图已经证明所求新点的坐标只能从已知点坐标的有理运算而得,但用圆规作图已经证明所求新点的坐标可能从已知点坐标经过有理运算与开方运算而得.

这就是说用直尺与圆规能作的图,单用圆规可以作出;但单用直尺不一定能够作出.

❖N 与 $2N$ 之间的质数

4.据说 N 与 $2N(N>2)$ 之间,一定有质数存在,这是谁证明的?

答 数学家 Bertrand 曾经推测 N 与 $2N-2(N>3)$ 之间至少有一质数,并试验过小于 6 000 000 的数,这个推测是正确的.因此"N 与 $2N$ 之间一定有质数存在"这性质叫做 Bertrand 推测.

数学家切比雪夫在 1850 年确实证明了 Bertrand 推测的正确性.它的证明属于数论范围,但初等的证明法至今尚未得到.

又 Finsler 曾在 1945 年证明 N 与 $2N$ 之间至少有 $N/(3\ln 2N)$ 个质数,至多有 $7N/(5\ln N)$ 个质数.

❖角的定义

5.角的定义是怎样下的?两根曲线是否能夹成一角?

答 角是什么?通常有下列几种定义:(一)一双相交的直线.(二)一双从原点出发的半直线.(三)从一点出发两根半直线所夹平面的一部分.(四)一个旋转.(五)一段圆弧.(六)一个等腰三角形.

这几种定义都是两条直线的夹角.至于两条曲线的夹角,是在两曲线交点分别作曲线的切线,这样所得两切线的夹角规定为两曲线的夹角.

最近更有数学家,利用角的一些简单的性质来规定角的定义.这种方法叫做公理规定法.例如,利用(1)等式的公理,(2)成"群"的公理,与(3)正负的符号公理,也可以规定一角.这种定义方法,在近世代数学中有一些应用.

1955年10月号小知识解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:卢沛鎏,刘揆一.

解答第1,2,3,5题者:喻畯,白云,威辛洛,麦卓文.

解答第1,3,5题者:谢树霆,陈静剑,张国定,姜可璋,许自荣,林进修,方典武,张国栋,宁波诚信补习班,金顺全.

解答第1,2,5题者:尹遗生.

解答第1,2,3题者:程基沛.

解答第3,5题者:张河秀,张南雄.

解答第1,3题者:寒影,李自健.

解答第1,5题者:张星辰,李盛汉,许早,吴耀光.

解答第1题者:李英,朱英起,张懋雄,胥奔维,黄国胜,杨诚,叶礼镭,张熙延,王普,华永一,马全右,许禄楷,曾溢滔,林名彪,杨秉杰.

解答第2题者:彭祖仁.

解答第3题者:罗文波,袁君浩,顾明根.

解答第4题者:李迪.

解答第5题者:张介丞,于飞,钟宝臣.

1955年11月号问题答案

❖四个三角形的内心

1. 圆上四定点所成四个三角形,求证:联结它们的内心作成一个四边形必是矩形.(提出人:程基沛)

假设:如图 1,A,B,C,D 为圆上四定点:O_1,O_2,O_3,O_4 各为 $\triangle ABC$,$\triangle BCD$,$\triangle ACD$,$\triangle ABD$ 的内心.

求证:$O_1O_2O_3O_4$ 为矩形.

证法 1 $\angle AO_1B = \angle AO_1E + \angle EO_1B = (\angle O_1CA + \angle O_1AC) + (\angle O_1CB + \angle O_1BC) = \angle O_1CA + 90° = \frac{\angle ACB}{2} + 90°$

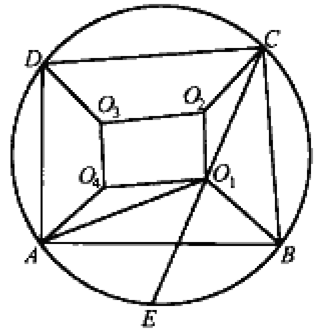


图 1

同样

$$\angle AO_4B = \frac{\angle ADB}{2} + 90°$$

但 $\angle ACB = \angle ADB$,所以 $\angle AO_1B = \angle AO_4B$,所以四点 A,O_4,O_1,B 共圆.

同样 B,O_1,O_2,C;C,O_2,O_3,D;D,O_3,O_4,A 分别共圆.

在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BO_1C = \frac{\angle BAC}{2} + 90°$,所以

$$\angle AO_1B + \angle BO_1C = \frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle BAC}{2} + 180° \qquad ①$$

又 $\angle CO_1O_2 = \angle CBO_2$,$\angle AO_1O_4 = \angle ABO_4$(同弧上的圆周角相等),所以

$$\angle CO_1O_2 + \angle AO_1O_4 = \angle CBO_2 + \angle ABO_4 = \frac{\angle ABC}{2} \qquad ②$$

① + ② 得

$$\angle AO_1B + \angle BO_1C + \angle CO_1O_2 + \angle AO_1O_4 = 270°$$

所以

$$\angle O_4O_1O_2 = 90°$$

同样

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = 90°$$

所以 $O_1O_2O_3O_4$ 为矩形.

证法2 如图2,取$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CD}$,$\overset{\frown}{DA}$的中点E,G,F,H. 联结 EF,GH 相交于 O. 因 $\angle EOG$ 是以 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{EB}+\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{FD}+\overset{\frown}{DH})$度量的.

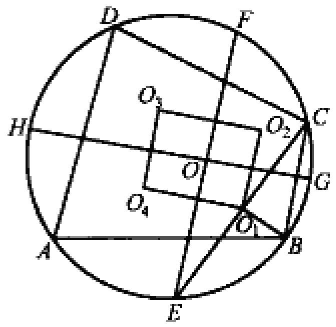


图2

所以$\angle EOG=90°$,因此 $EF\perp GH$.在$\triangle EO_1B$ 中

$$\angle EO_1B=\angle O_1CB+\angle O_1BC=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC)$$

$$\angle EBO_1=\angle EBA+\angle ABO_1=\angle ECA+\angle ABO_1=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC)$$

所以 $EO_1=EB$(等腰三角形的两腰).

同样,$EA=EO_4$.但 $EB=EA$,所以 $EO_1=EO_4$.

在$\triangle O_1EO_4$ 中,EF 是$\angle O_1EO_4$ 的二等分线,所以 $O_1O_4\perp EF$,同样得 $O_2O_3\perp EF$,O_1O_2 及 $O_3O_4\perp GH$,所以 $O_1O_2O_3O_4$ 为矩形.

❖分余粮的补偿费

2.甲乙丙三人携带粮食出外旅行,经过了若干日之后,甲剩粮1斗,乙剩粮6升,丙已吃光,经他们协商共食余粮,后来同时回来,丙拿出1元6角作为补偿费,问甲乙两人应该怎样分法?

解 三人共食粮1.6斗,丙付出1.6元,即三人应共付3×1.6元=4.8元,就等于粮1.6斗的价值.

4.8元÷1.6=3元——粮每斗的价值

1×3元=3元,3元-1.6元=1.4元——甲应收进数

0.6×3元=1.8元,1.8元-1.6元=0.2元——乙应收进数

❖在三角形内作矩形

3.在$\triangle ABC$内,求作一个内接矩形,使其对角线等于定长l.(提出人:刘伟之)

作法 作与$\triangle ABC$同底等高的Rt$\triangle ABD$.以A为心,l为半径,作弧交BD

于 E.过 E 作 $FM \parallel AB$,交 AC,BC 于 M,N;过 M 作 $MP \perp AB$,过 N 作 $NQ \perp AB$,那么长方形 $PQNM$ 为所求.

证 $FE : AB = DF : DA = CN : CB = MN : AB$,所以 $MN = FE$,所以长方形 $AGEF \cong$ 长方形 $PQNM$,所以 $AE = PN = l$.

讨论 作 $AR \perp BD$.

(1) 若 $l > AR$,作 $AE = AE' = l$ 交 BD 于 E,E'.这时所作矩形的一边与 AB 相重合的,可有两个,如图 3 中的 $PQNM$,$P'Q'N'M'$.

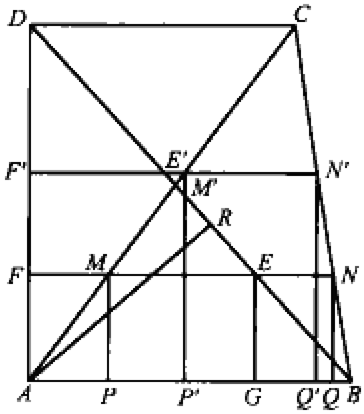


图 3

仿此亦可作出矩形,使它的一边与 BC 及 CA 相重合.因此最多时共可作出六个矩形.

若 $l = AR$,这时所作矩形的一边与 AB 相重合的只有一个.

若 $l < AR$,这时不能作出矩形使它的一边与 AB 相重合.

(2) 略.

❖余弦求和

4.试求:$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$.(提出人:徐德之)

解

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx =$$

$$\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$\frac{\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{5x}{2} + \cdots + \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

❖1 365的倍数

5.设 x 与 y 各对于1 365都是互质的,求证:$x^{12}-y^{12}$ 为1 365的倍数.

解 因为 $1\ 365=3\times5\times7\times13$,$x,y$ 各对于1 365互质,也就是对于3,5,7,13互质.又 $x^{12}-y^{12}=x^{12}-1-(y^{12}-1)$.由费马定理,知

$$x^{12}\equiv1,y^{12}\equiv1(\text{mod }13),即\ x^{12}\equiv y^{12}(\text{mod }13)$$

同理

$$x^{2}\equiv y^{2}(\text{mod }3),x^{4}\equiv y^{4}(\text{mod }5),x^{6}\equiv y^{6}(\text{mod }7)$$

所以

$$x^{12}\equiv y^{12}(\text{mod }3,5,7,13),即\ x^{12}\equiv y^{12}(\text{mod }1\ 365)$$

1955年11月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:卢沛鎏,刘汉檬,陈玉槿,过伯祥,朱世照,封辅智,吴良兰,龙运佳,王宝慧,王升润,珍谊,徐孝舜,盛沛根,盛沛栋,朱思铭.

解答第1,2,3,4题者:李杰仁,安心平,戈炳岷,邓舜勤,杨照球,周业芳,高锡钟.

解答第1,2,3,5题者:梦卓文,马俨,吕耀钰,陈光年,王铮,林锡珊,林影飘.

解答第1,2,4,5题者:徐继成,方华鹏,上海市和平中学高三(2)数学小组,汪惠鑫,马慎馀,陈亚文,程海杰,瞿幼志,俞文魮,陈良模,吴遵宪,陈增福,联璋,叶昌荣,吴刚良,宁波信诚补习班数学组,彭镇澜.

解答第1,3,4,5题者:黄人杰,哈家定.

解答第2,3,4,5题者:黄水源.

解答第1,2,3题者:刘根洪,杨仁杰,葛元冲,汪德生,喻畯,邵文才,楼宇同,王先怀,翟世福,河南杞县第三初中数学组,粱振珊,周聘初,陈契初,李绍唐,刘云梯,陈育庄,张乾华,张宝富,黄国强,于学汉,上海交通中学高三数学小组.

解答第1,2,4题者:安徽砀山一中数学组,杨泽,纪汉光,邓光兴,文如庆,李安华,沈珏铭,田洁,张畛寰,张存寰,姜乃钊,秦铁虎,杨又芬,王雪生.

解答第1,2,5题者:全绥安;解答第1,4,5题者:孙坤保,丁达夫,臧朋年,钟家庆.

解答第2,3,4题者:张强,熊仕文,张敦穆,孙钢,金绍裘,水乃翔,区世焯,朱松林.

解答第2,4,5题者:张禄度,李方钥,杨祥谱,萧嗣尧,陈兰孙,桂麟,龚克奎.

解答第3,4,5题者:彭承衡,刘启咸.

解答第1,2题者:陈家泽,郭秉正,韩淑悦,施裕焱,邬廷康,罗嗣,曾繁远,钟宝臣,蒋丁昌,张鉴桀,陈大器,汪金锠,楼滨城,孙承贤,潘咸桉,张有紘,刘忠全,马成忠,福建惠安第一中高三乙数学兴趣小组,刘麟仲,吴宗汉,史俊云.

解答第1,3题者:秦秋君,戴锦锟,伍必勤,师宗漾,周家坪,黄仲晔,罗宗皎,罗忠厚.

解答第1,4题者:浦祖康,朱连喜,舒鼎荣.

解答第1,5题者:高元恕.

解答第2,3题者:周龙祥,王栋材,刘瑞徵,姚启华,梁嘉华,邱全金,廖佛寿,袁君浩,顾明根,黄成天,沈世镒,陈怀惠,郑炳南.

解答第2,4题者:金永镇,陈屏虚,柳光轩,莱阳一中二级二班,乐家骏,王其纶,华宇敬,白云亭,吴景基,钱建中,杨庆铎,非青,棣彰芽,正南,王仕璠.

解答第2,5题者:古新妙,陈钧海,吴邦荣,甄伯纯,邬思,皮禹廷,汪裕民,陈景贤,华永一,绥靖,任奉祥.

解答第3,4题者:邱松文,姚国宝,俞滋生,周玉铭,洪宪章,陆维林,柯凤英.

解答第4,5题者:潘捷建,何厚毅,赵永久,张南岳.

解答第1题者:唐承元,许克,彭大中,陈光仪,陈坤方,甄维藩,施昌彦,樊逢乙,王维钧,廖代银,何顺祥,贾树榛,张敦穆,费宗耀,喻正元,张之中,温暖,黄水源,徐声鸣,严鸿山,甄蔚一,程永昌,衣佩发,于民,潘捷建,刘方中,汤春潮,咸陈守,孙秉权,万德锋,陈光仪,玉东植.

解答第2题者:朱英超,田增伦,万杭强,陈东庆,葛苏仁,杨郁文,苏民生,李河清,张嘉宗,刘宪章,顾伟浩,何敏,贾圣应,张保禄,俞钟铭,万德传,包启明,黄文祥,徐昉,梁雄成,谢嘉平,马豪援,刘光瑞,李善同,张长新,毅角,苏锡珰,张全清,李熹,孙承德,陈之懿,王学孔,赵士廉,姜可章,宋铭庚,黎富华,黄健,邓伟,刘兆春,成又相,安徽滁县中学高三数学组,陆福全,陈代亮,萧景明,方纯义,鲁迪,赵鹤林,志研,阮天恩,余祥祺,刘鸣山,张明亮,杨长水,夏典修,向家炳,劳高才,任纯先,刘平东,鞠福顺,林贞良,宋元东,杨泽发,梁杰英,周寄石,许禄楷,夏业动,咸陈守,孙秉权,韩念国,施荫锐,谢燮阳,魏德寿,文广珣,本培,龚邦本,金千里,徐知行,张荆琪,周长生,衣谷平,邹子栋,张素鹏,曾溢滔,陆森,孙承贤,万祥,孙其梅,赵钊群,张铸民,许早,吴联祥,滕德欣,陈林发,滕成基,樊金魁,陈经纬,敏先,章庆权,陈延邻,张国定,鞠洪滋,勤益,曹式军,黄震西,储三籁,方斌,石名峰,刘永才,梅彩英,何其俊,李文青,林乐善,谢逢荃,洪正福,吕达仁,朱振华,严敦禧,曹琴南,舒瓦,刚生,弓尚书,王德政,段成善,李振圻,于昌言,张济中,马诗安,龚介民,林三石,杨见三,孙传华,上海动力机校锅(212)班数学爱好者,贾竹笑,山东齐东九户小学,刘继钧,彭祖仁,程光斗,李文孙,安徽阜南初中数学组,陈学参,彭兴立,贾绪五.

解答第3题者:倪苗萌,陈理君,徐德富,邵惠伯,丁德彰,邓德元,何厚毅,邬廷康,何敏,沈济良,潘逢乙,方丁,张荆琪,吕烈翰,田豫桐,施伯超,奚定华,柯定生,王祝然,刘家琦.

解答第4题者:邱松文,孙殿楼,程宝龙,杨时辉,程家骅,胡松华,何开颖,

吴遵宪,何顺祥,喻正元,蓝以中,胡耀堂,吴冠义,房迎春,刘揆一,徐声鸣,陈杰初,方仁义,上海嵩山区孝和学习小组数学组,郑玮,傅常正,钱韦泰,林介义,唐翘健,赵迪鸿,谭希舜,刘广祥,乐伟达,陈河霖.

解答第5题者:陈敬时,陈锡嘏,巢捷,张洪发,孙吴.

1955 年 11 月号小知识问题解答

❖费马大定理

1. 费马(Fermat) 大定理说道:当 $n>2$ 时,满足于下式

$$x^n+y^n=z^n$$

的 x,y,z,如取任意的整数,都不能有解.费马于 1637 年提出这问题,到现在已有了三百多年,是否彻底解决了?(提出人:黄振云)

答　写出式子

$$x^n+y^n=z^n$$

当 $n>2$ 时,我们能不能够找到任意的三个正整数代入 x,y,z,使上面的式子两边相等呢?这个问题,看起来简单极了.费马肯定地说,本问题是没有解答的.据说他已经得到证明,只因当时在手边上没有记录册子,就以小注的形式,写在丢番图著作的窄小书页边缘上,说道:"我已经找到这个定理的奇妙证明,但这里地方太小,写不下了."

后来经过许多数学家的研究,发现要证明这个问题,是一件非常困难的事情.欧拉(1707—1783) 只证明了当 $n=3$ 及 4 时的特殊情形.1823 年勒让德(1752—1833) 又证明了当 $n=5$ 时的特殊情形.1849 年库麦(1810—1893) 证明了当 $n<100$ 时的一切数值均合.1850 年和 1853 年法国科学院曾悬奖三千法郎,两次征求解答,结果毫无所得.1908 年德国哥廷根科学会再悬赏十万马克,限期一百年,要到 2007 年截止,公开征求解答,现在又差不多过了半世纪,还是没有得到满意的答案.

这个问题到今天,虽是还没有得到彻底的解决,但因为仔细研究的关系,在数论园地里,却无意中增添些另外的收获,这也是可喜的事情啊!例如库默尔就在证明这个问题过程中,发现了理想数.

数学家对于这个问题的处理方法,现在进行到怎样的地步呢?我们把这个问题分做两类式样,处理如下:

(1) 当 n 对于 x,y 或 z 没有公因子时,叫做第一类.

在第一类式样,费马定理有一部分已经证明是成立的.但下列的情况,还待研究,即

$\begin{cases} n > 253\ 747\ 889 \\ \text{且三数 } x,y,z \text{ 中的最小的一数大于 } n(2n^2+1)^n \end{cases}$

(2) 当 n 对于 x，y 与 z 有公因子时，叫做第二类.

在第二类式样，费马定理有一部分也已经证明是成立的. 但下列的情况，还待研究，即 $n > 2\ 512$ 的情形.

❖微积分是什么人发明的

2. 微积分是什么人发明的?(提出人:喻畯)

答　我们首先应当认识到一切科学的成就，都不能完全归之于一个人的天才创造，而是许多人的劳动创造成果. 微积分的发明，就是一个很明显的例子. 这个学科的基础，是建筑在极限，无穷小，无穷大等概念之上. 我国在两千四百年以前墨翟(前 498?— 前 418?) 墨经中说道:"若累次平分物礼，截取它的一半，长此继续下去，末了必会进到一个不动的端点."庄周(前 365?— 前 290?) 天下篇亦说道:"一尺长的棰子，若每天截取它所存留的一半，虽到千万年，仍是有剩余的." 这是极限概念的最早说法，庄周天下篇又谈到惠施(前 380?— 前 300?) 的历物十事，其中有一条说道，"至大无外，叫做大一. 至小无内，叫做小一." 这就是无穷大与无穷小两个概念的解释. 希腊的阿基米得(前 287— 前 212) 用穷竭法来求圆面积，我国魏时刘徽(三世纪) 用割圆术以计算圆周，这是积分原理的显露光芒. 我国人祖暅之于六世纪初，曾独立发现球体积的公式，意大利人卡瓦雷利(1598—1642) 于十七世纪提出了求积定则，这是启发后人去完成积分观念的重要指示. 法国人笛卡儿(1596—1650) 于 1619 年创立了解析几何学正式地把变量引进于数学，恩格斯对此说道:"笛卡儿的变数，是数学中的转折点，于是运动与辩证法便进入了数学，因此必然会产生微积分学"，此外，如伽利略(1564—1642)、开普勒(1571—1630) 研究力学和动力学，加深了对于速度，加速度和力的变化等的认识. 费马(1601—1665) 应用导数原理，解决了一些特殊问题. 这些都是对于微积分的完成有重要的影响. 世人称牛顿(1642—1723)，莱布尼兹(1646—1716) 发明微积分. 正确地说，牛顿和莱氏是总结了前人的成果，使微积分成为有系统的且便利于广大用途的学科. 他们的成果，都是依赖于从前的许多丰富知识堆积而成，却不是凭空掉下来的. 今记录几个重要事项如下:

1665 年 5 月 20 日，牛顿的手册中最初记有流数术也就是微积分.

1675 年 10 月 29 日，莱布尼兹在巴黎创立微积分.

1684 年莱氏公布微分法于学艺杂志(Acta Eruditorum).

1686 年莱氏公布积分法.

1693 年牛顿公布流数术.

莱氏的微积分,就是牛顿的流数术,只是他们各人所使用的记法不相同.牛顿知道流数术,比较莱氏公布微分法的时期,早了十九年.但牛顿对于它的法术,秘密着多少年,没有对大众宣布,后来经过友人的劝告,才来付印,那时莱氏的方法,早已传于世了,欧洲大陆诸人,竞相争取研究微积分.流数术的使用,只是限于英国的一个小小角落,等到世人知道流数术,这距牛顿最初知道的时候,已经有 30 年了.因此英德两国的数学工作者们,互相攻击,以为对方是袭取成法,加以改篡而得的.据实说来,当时各种条件已具备,时机已成熟,他们各自独立地完成一步总结的工作,至于谈到他们所用的记法,以莱氏的为较优,所以后来通行于世的,也就相沿采用莱氏的记法.

❖傅里叶级数

3.傅里叶(Fourier)级数是什么?(提出人:王有志)

答 傅里叶级数亦名三角级数,是法国数学家傅里叶(1768—1830)于1807年所发表的.他说道:“任意一个实变数的函数,可用图解法表示,也可把它写成三角级数.”设已知的函数是 $f(x)$,写出下式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

若这个三角级数是收敛的,所得的和为 $f(x)$,就得

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

上列的级数,叫做傅里叶级数.式中的 $a_0, a_k, b_k (k = 1,2,3,\cdots)$,叫做傅里叶系数,这些系数表示为

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

上式中的 x,是从 $-\pi$ 到 π 为一个周期.

若 $f(x)$ 的周期为 $2l$,就得

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

此时

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x,a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x,b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

傅里叶级数在热力学,振动学,音学,电的传导和交流理论各方面都有广泛的应用.

❖最小二乘法

4.什么叫做最小二乘法?它有什么重要的用途?(提出人:邬思)

答 最小二乘法这门学科,大约有150年的发展历史了.它所研究的内容如下:

(1)由观测的结果中求出一个数值,假定由它所产生诸误差的二乘幂之和(即平方和)为最小,那么它就是算术平均值,或是最佳逼近值.例如有方程 $y=mx$,式中的 $x=1,2,3,4$.由观测得到的 $y=2,4,7,6$(图1).根据最小二乘法原理,本题 m 所取的数值,必须使

$$(m-2)^2+(2m-4)^2+(3m-7)^2+(4m-6)^2$$

为最小.换句话说,取 $m=\frac{11}{6}\approx 1.8$,因此通过原点的直线 $y=1.8x$ 是最好的图线,因为它很靠拢于下列诸点

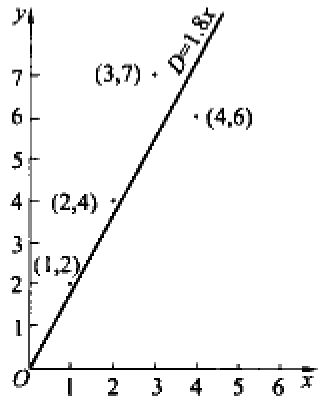


图1

$$(1,2),(2,4),(3,7),(4,6)$$

(2)假定诸误差的二乘幂之和,即 $\sum\varepsilon_n^2$ 为最小,那么所得的数值,就会最接近于真值,也就是最佳逼近值.

所以说,用来研究这些问题的学科,叫做最小二乘法.

这门学科的最早发明者,是法国数学家勒让德(1752—1833)和德国数学家高斯(1777—1855).高斯在哥廷根大学学习时(1795—1798),就发明了最小二乘法.在1809年才在他的著作里发表出来.勒让德于1805年在他的作品《决定彗星轨道方法》,提出了同样去处理观测的方法,这个名称也是由他定出的.

那么它有什么重要的意义呢?我们知道凡一个数量只有一个真值.但是就一个数量反复地施行若干次观测,虽是使用同一的仪器,施行相同的方法,采取同样的注意,所得到的结果,却永远不能一致.这样观测者很难得到某个数量的真值,所生误差的来源,主要的便是观测中所生的误差,这种误差的成因是:天

气不好，仪器欠精，观测者目不适中…… 无论如何，始终存在着有些误差，且很不规则.这样要解决上述的问题，最小二乘法便能担任这个艰巨的任务.用最小二乘法，就能求出最佳逼近值.在求精确度时，我们也就在观测中找到一个完全可以信任的数值，尤其是在现代，无论是天文学，测地学，重力学，航海学，土木工程，采矿学等部门，如要进行仔细的测量，深入地研究，那么都离不了最小二乘法.

❖差分方程

5.什么叫做差分方程，在哪一门数学中讨论它？(提出人：穆怀球)

答　差分的起源，是在研究代数学中有穷项的级数，后来发展成为解析数学中的一个分科.用它可以研究高阶级数及函数等.它和级数微积分都有相似的地方，但也有些区别，因为微积分中的变数，是用连续变化来处理所需要的概念是无穷小.差分中的变数，是用间断变化来处理，所产生的增减数值却是常数.设有函数 $f(x)$，其中 x 的变化每次所增的值为常数 h.令

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h = x_0 + h_2$$

$$x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h = x_0 + h_3, \cdots, x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh = x_0 + h_n, \cdots$$

得到下面的叙列：

$$\cdots, f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \cdots$$

由此造出下面诸第一差分：

$$\cdots, \Delta f(x_1), \Delta f(x_2), \Delta f(x_3), \Delta f(x_4), \cdots$$

式中

$$\Delta f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n)$$

由此又造出下面诸第二差分

$$\cdots, \Delta^2 f(x_1), \Delta^2 f(x_2), \Delta^2 f(x_3), \Delta^2 f(x_4), \cdots$$

式中

$$\Delta^2 f(x_n) = \Delta[\Delta f(x_n)] = \Delta f(x_{n+1}) - \Delta f(x_n) = f(x_{n+2}) - 2f(x_{n+1}) + f(x_n)$$

同样再造出第三差分，第四差分等.

举例说明如下.

设有函数

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

令式中 $x = \cdots, 0, 1, 2, 3, \cdots$，得出下面的差分表，如表 1.

表 1

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	-4			
		-2		
1	-2		2	
		-4		-6
2	2		8	
		-12		-6
3	14		14	
		-26		-6
4	40		20	
		-46		-6
5	86		26	
		-72		
6	158			

表 1 中每次的差分，是由前次的相邻两数相减而得．这样造出来的差分，可以继续地做下去．最后得到第 k 差分的诸个数值都相等，或者它们的数值取作近似地相等．

在差分中的 $\Delta^n f(x_n)$，相当于微分中的 $d^n f(x)$．因差分中所取的差值是有穷数，微分中所取的差值是无穷小．故差分有时亦称做有穷差分．

所谓差分方程，就是在式中含有差分的方程，列式如下

$$F[x,\Delta f(x),\Delta^2 f(x),\cdots,\Delta^n f(x)] = 0$$

若要求出这式的解答，就叫做解差分方程．

差分在我国从前的时候，叫做招差术．早在隋朝，刘焯(544—610)就用它来造皇极历(600)．唐朝一行作大衍历(724)，徐昂作宣明历(822)，宋秦九韶著数书九章(1247)，元郭守敬作授时历(1280)，朱世杰著四元玉鉴(1303)，都曾使用过招差术，或载入书中．

在西洋，最初使用差分来研究有穷级数的是 1670 年法国人莫顿，这比我国的刘焯滞后了一千多年．1715 年泰罗才把差分成为有系统的学科．1860 年布尔著有差分学．嗣后继续研究的，又有切比雪夫(1821—1894)，厄米特(1822—1901)，庞加莱(1854—1912)，马尔科夫(Марков，1856—1922)诸氏．

差分学科于数值积分法、微分方程近似解法、概率论和数论都有很大的用处．

近来这科的研究，更进一步地发展了，好像函数的范围，扩大成为泛函解析一样，苏联数学家盖尔芳特(Гельфона)竟把差分的应用，推进到复变函数的领域里面去了，贡卡洛夫(Гончаров)更发挥差分的功用，来解决超越数论的难题，也获得了极大的成功！

1955年11月号小知识解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:高锡钟,周业芳,宁波诚信补习班数学组,王思训.

解答第1,2,3,4题者:盛沛根,盛沛栋.

解答第1,2,4题者:顾益生,龙运佳,郑玮.

解答第2,3,4题者:非青.

解答第1,2题者:彭超宇,罗文波,喻畯,张国定,乐伟达.

解答第2,3题者:刘揆一.

解答第2,5题者:柯永生.

解答第1题者:蓝以中,邬鸿锡,王中坤,舒凡,彭祖仁,沈仰璋,李文孙,徐国琦.

解答第2题者:朱英超,邬思,刘平东,咸陈守,曾繁远,钟宝臣,廖佛寿,邱全金,周邦煊,周金敏,上海嵩山区孝和学习小组数学组,联璋,叶昌荣,谭立平.

1955年12月号征解问题答案

❖雨季抽水

1. 某地有甲乙两个水池，今要在那里做基本建设，虽值雨季，也要先将池水抽出以便开工，已知甲池的面积是2亩，用3个水车可于2天将水抽尽；若改用2个水车便要4天才可将水抽尽. 乙池的面积3倍于甲池，今要于6天将水抽尽，问该用几个水车？（提出人：广州 邓允根）

解法1 设甲池原有水量为 v，每天降于甲池的雨量为 x，那么

$$\frac{v+2x}{3\times 2} \text{及} \frac{v+4x}{2\times 4}$$

都是表示一个水车一天抽出甲池的水量，即

$$\frac{v+2x}{6}=\frac{v+4x}{8}$$

得 $v=4x$，所以 $x=\frac{v}{4}$. 由此可知一个水车一天抽甲池的水量为

$$\frac{v+2x}{6}=\frac{v+\frac{v}{2}}{6}=\frac{v}{4}$$

从上面两式，得知降于甲池一天的雨水，恰被一个水车抽尽.

因乙池的面积3倍于甲池，故要当天抽尽乙池当天的雨水，恰需要水车3个. 又因甲池原有水量为 v，那么乙池原有水量为 $3v$. 已知一个水车抽甲池的水量为 $\frac{v}{4}$，那么一个水车抽尽乙池原有水量，必须 $3v\div\frac{v}{4}=12$（天）. 今要6天抽尽乙池原有水量，就需要水车2个，故要于6天抽尽乙池的雨量和原有水量，共该用 $3+2=5$（个）水车.

注 解本题，应假定每天下雨量及两池深度相同. 又题中所说甲池面积为2亩，是一句无谓的话，在解题过程中，可以不用它.

解法2 （算术解法）(1) 因甲池的水（包括下的雨水），用3个水车，2天抽尽；若一天抽完，要用6个水车. 同样，用2个水车，4天抽尽；若一天抽尽，要用8个水车.

因为多经过两天，多下了两天雨，所以多用 $8-6=2$（个）水车.

所以，甲池每天的雨要用一个水车才能抽尽.

若只抽甲池原存水量，用 $3-1=2$(个)水车，2天抽尽；用一个水车，4天抽尽.

所以每个水车每天抽甲池原存水量的$\frac{1}{4}$.

(2) 因乙池是甲池的3倍，所以抽当天下的雨水，需要3个水车.

又每个水车是抽乙池原存水量的$\frac{1}{4}\div 3=\frac{1}{12}$.今要于6天抽尽乙池的水，每天应抽出$\frac{1}{6}$.

所以只抽乙池原存水量，每天需$\frac{1}{6}\div\frac{1}{12}=2$(个)水车.

所以抽乙池雨水和原存水量共用的水车是 $3+2=5$(个).这就是说，5个水车在6天抽尽乙池的水.

解法3 (算术解法)3个水车车2天的车工数是：$3\times 2=6$，2个水车车4天的车工数是：$2\times 4=8$，后者多出的天数是 $4-2=2$，多用的车工数是 $8-6=2$，可见甲池每天的降雨量正好合一个水车车一天.

乙池的面积3倍于甲池，故原存水量所需车工数是 $3\times 4=12$.

乙池每天的降雨量也是3倍，即需要的车工数是3，那么6天的降雨量，所需要的车工数是 $6\times 3=18$.

所以乙池共需要的车工数是 $12+18=30$.

所以每天的车工数是 $30\div 6=5$.

所以6天将乙池水抽尽，每天要用5个水车.

❖直角三角形各边的旋转体

2.以直角三角形的两腰和斜边分别作轴来旋转.设所得三个旋转体的体积是 V_1，V_2 及 V.试证：$\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}=\frac{1}{V^2}$.(提出人：常熟 丁达夫)

解 如图1，设直角三角形为 CAB，直角顶在 C，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$hc=2\triangle=ab$，$\triangle$ 是表示三角形的面积，$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.由题意，知 V_1，V_2 是两个圆锥体，V 是两个圆锥体之和.依原理：圆锥的体积等于它的底面积乘高的三分之一，于是

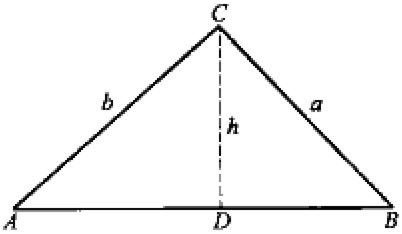


图1

$$V_1=\frac{\pi a^2 b}{3},V_2=\frac{\pi ab^2}{3}$$

$$V=\frac{\pi h^2\cdot AD}{3}+\frac{\pi h^2\cdot BD}{3}=\frac{\pi h^2\cdot AB}{3}=\frac{\pi h^2 c}{3}=\frac{\pi hab}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_1^2}=\frac{9}{\pi^2a^4b^2}+\frac{9}{\pi^2a^2b^4}=\frac{9(a^2+b^2)}{\pi^2a^4b^4}=\frac{1}{V^2}$$

❖六点共圆

3.设三角形的两底角的三等分线相交于 M,N.从 M,N 向三边作垂线,设垂足为 M_1,M_2,M_3 及 N_1,N_2,N_3.试证下列三事:

(1) 六垂足 M_1,M_2,M_3 及 N_1,N_2,N_3 共圆.

(2) 以 M_1,M_2,M_3 为圆心,过点 N 分别作圆,交三角形各边于六点,试证这六点共圆;以 N_1,N_2,N_3 为圆心,过点 M 分别作圆,交各边于六点,试证这六点也共圆.

(3) 证(2) 中所得的两圆大小相等.

证　(1)$\triangle ABC$ 两底角的三等分线交于 M,N.只有图 2 及图 3 两种情况.

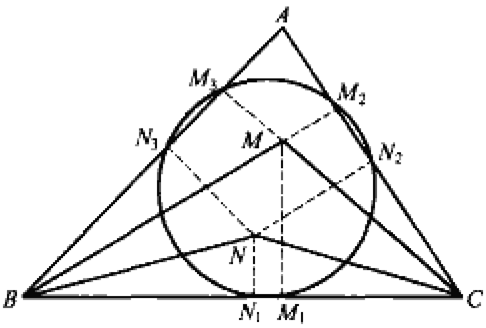


图 2

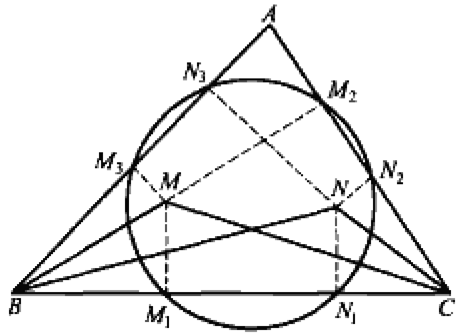


图 3

$$\frac{\overline{BM_1}}{\overline{BM_3}}=\frac{\cos\angle MBM_1}{\cos\angle MBM_3}=\frac{\cos\angle NBN_3}{\cos\angle NBN_1}=\frac{\overline{BN_3}}{\overline{BN_1}}$$

所以 $BM_1\cdot BN_1=BM_3\cdot BN_3$.

于是六点中每两对的点在一圆上.但六点是在三角形的三边上,故六点共圆.

(2) 设以 M_1,M_2,M_3 为圆心过点 N 的圆,分别交各边于六点 $P_1,P'_1;P_2,P'_2;P_3,P'_3$.

$$\overline{MP'_1}^2=\overline{MM_1}^2+\overline{M_1P'_1}^2=\overline{MM_1}^2+\overline{M_1N}^2$$

令 O 为$\overline{MN}$ 的中点,得 O 为(1) 中六点圆的圆心.

$$\overline{MM_1}^2+\overline{M_1N}^2=2\,\overline{M_1O}^2+\frac{1}{2}\,\overline{MN}^2$$

易得

$$\overline{MP'_1}^2+2\,\overline{M_1O}^2=\frac{1}{2}\,\overline{MN}^2$$

又 $M_1O=M_2O=M_3O$,MN 为定值.所以

$$MP'_1=MP'_2=MP'_3=MP_1=MP_2=MP_3$$

所以六点 $P_1,P'_1;P_2,P'_2;P_3,P'_3$ 共圆.同理以 N_1,N_2,N_3 为圆心所作过 M 的圆,分别交各边于 $Q_1,Q'_1;Q_2,Q'_2;Q_3,Q'_3$,这六点也共圆.

(3)在图4中,$\overline{MP'_1}^2=\overline{MM_1}^2+\overline{M_1P'_1}^2=\overline{MM_1}^2+\overline{M_1N}^2=\overline{MM_1}^2+\overline{M_1N_1}^2+\overline{NN_1}^2=\overline{MN_1}^2+\overline{NN_1}^2=\overline{Q_1N_1}^2+\overline{NN_1}^2=\overline{NQ_1}^2$,所以

$$\overline{MP'_1}^2=\overline{NQ_1}^2$$

即两圆的半径相等,故两圆的大小相等.

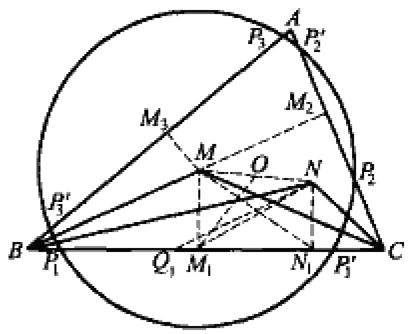


图 4

❖含有虚数的方程

4.试解方程:$i^x=e^i$.(提出人:龙君)

解 $i^x=e^i$,即 $i^{x\cdot\frac{1}{x}}=e^{i\cdot\frac{1}{x}}$,即 $i=e^{\frac{i}{x}}$,令$\frac{1}{x}=y$,得

$$i=e^{iy}=\cos y+i\cdot\sin y\text{(欧拉定理)}$$

所以

$$i=\cos y+i\cdot\sin y$$

又当 $a+ib=a'+ib'$ 时,$a=a'$,$b=b'$,所以

$$0+i\cdot 1=\cos y+i\cdot\sin y,\cos y=0,\sin y=1$$

于是 $y=2n\pi+\frac{\pi}{2}$(若取 $y=2n\pi-\frac{\pi}{2}$,就得 $\sin y=-1$,所以 $y=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ 不适合).

但 $y=\frac{1}{x}$,所以

$$\frac{1}{x}=2n\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{(4n+1)\pi}{2}$$

所以

$$x=\frac{2}{(4n+1)\pi}$$

❖九个数字的方程

5.设以不同的字母代表九个数字1,2,3,…,9.试求同时满足下列两方程的解答,$a+b+c+de=fg+hi$,$a\times b\times c\times de=fghi$.式中几个字母连写的是代表几位的数值.(提出人:重庆 许自荣)

解
$$a+b+c+de=fg+hi \quad ①$$
$$a\times b\times c\times de=fghi \quad ②$$

所以 $a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$ 是9的倍数.
由九余法知 $a+b+c+de+fg+hi$ 是9的倍数.将9的倍数分为两部分:$a+b+c+de$,$fg+hi$ 或 $a\times b\times c\times de$,$fghi$ 各部分必都是9的倍数.于是知道 $a+b+c+d+e$ 及 $f+g+h+i$ 都是9的倍数(18或27).

不同四个正整数相加等于18的情形,只有下列十一种:

1,2,6,9　1,2,7,8　1,3,5,9　1,3,6,8　1,4,5,8　1,4,6,7

2,3,4,9　2,3,5,8　2,3,6,7　2,4,5,7　3,4,5,6

不同四个正整数相加等于27的情形,只有下列三种:

3,7,8,9　4,6,8,9　5,6,7,9

由此可知,如果不计较前后排列的次序,式①②两边的 a,b,c,d,e 与 f,g,h,i 只有下列十四种分组方法,如表1.

表1

组别	a,b,c,d,e	f,g,h,i	$a+b+c+de$	$fg+hi$	$a\times b\times c\times d\times e$	$fghi$
I	3,4,5,7,8 二偶三奇,$d=5$	1,2,6,9 $i=2$	72	81,108, 153		
II	3,4,5,6,9 二偶三奇,$d=5$	1,2,7,8 $i=8$	72	45,90,99		
III	2,4,6,7,8	1,3,5,9 四奇			偶数	奇数
IV	2,4,5,7,9 二偶三奇,$d=5$	1,3,6,8				$i\neq4$

续表 1

组别	a,b,c,d,e	f,g,h,i	$a+b+c+de$	$fg+hi$	$a\times b\times c\times d\times e$	$fghi$
V	2,3,6,7,9	1,4,5,8	45,54,81, 90,108	72,99,135; 63,72,99		
VI	2,3,5,8,9 二偶三奇,$d=5$	1,4,6,7				$i\neq 2$
VII	1,5,6,7,8 二偶三奇,$d=5$	2,3,4,9				$i\neq 6$
VIII	1,4,6,7,9 二偶三奇	2,3,5,8	63	63	2 538	2 538
IX	1,4,5,8,9 二偶三奇,$d=5$	2,3,6,7				$i\neq 8$
X	1,3,6,8,9 二偶三奇	2,4,5,7	81, 99	81, 99	1 656,1 836,4 536, 13 176;1 602,2 322, 4 482,13 122	
XI	1,2,7,8,9 二偶三奇	3,4,5,6	90, 99	90, 99	1 404,5 184,10 224; 1 566,5 166,10 206	
XII	1,2,4,5,6	3,7,8,9	$\leqslant 72$	$\geqslant 117$		
XIII	1,2,3,5,7	4,6,8,9	$\leqslant 81$	$\geqslant 117$		
XIV	1,2,3,4,8	5,6,7,9	$\leqslant 90$	$\geqslant 126$		

我们由式 ②,可以看出 i 必须为偶数.因若四个数 a,b,c,e 都是奇数,那么 $a\times b\times c\times de$ 的积 $fghi$ 必是奇数,亦即 i 是奇数.如在四个奇数 a,b,c,e 中含有5时,就得 i 为5,这样数字5便在两边出现了.又在四个奇数 a,b,c,e 中不含有5时,就得 i 为9,这样数字9也在两边出现了.这都是不适合于式 ②,所以 i 非为偶数不可.

在组 III 中,f,g,h,i 都是奇数,因此不能排成 $fghi$ 为偶数,我们应该舍去.

在组 XII 中,$fg+hi\geqslant 30+70+8+9=117$,$a+b+c+de\leqslant 1+2+4+5+60=72$,不适合于式 ①.

在组 XIII 中,$fg+hi\geqslant 40+60+8+9=117$,$a+b+c+de\leqslant 1+2+3+5+70=81$,不适合于式 ①.

在组 XIV 中,$fg+hi\geqslant 50+60+7+9=126$,$a+b+c+de\leqslant 1+2+3+4+80=90$,不适合于式 ①.

下面我们来研究剩下的十种分组.

四个数 a,b,c,e 不能都是奇数,已如上述.但这四个数也不能都是偶数.因为九个基数中,一共只有四个偶数 2,4,6,8,但 i 已占去一个,所以这四个数 a,b,c,e 只有下列三种情形之一:

(A) 三个偶数,一个奇数;

(B) 两个偶数,两个奇数;

(C) 一个偶数,三个奇数.

在剩下的十种分组中,就 a,b,c,d,e 来说,没有一组含有三个偶数,也没有一组只含有一个偶数,因此情形(A)与(C)都是不存在的.

在四个数 a,b,c,e 中,如果两个是偶数,两个是奇数,那两个奇数中,决不能有一个是5,不然式②的 i 就成为0.又若 a,b,c,d,e 中有三个奇数,其中有一个是5,那么5只能是 d.

在组 I 中,a,b,c,d,e 的值为3,4,5,7,8,其中 $d=5$,得

$$a+b+c+de=3+4+7+8+50=72$$

是一个定值,又 f,g,h,i 的值为1,2,6,9,把它作成 $fg+hi$,但 i 须为偶数.由式②知 $a\times b\times c\times e$ 的个位数必等于 i.此时 $i=2$,因得 $fg+hi$ 为 $19+62=69+12=81$,或 $16+92=96+12=108$,或 $61+92=91+62=153$.

由于72与 $81\neq108\neq153$ 互不相等,故组 I 不适合于式①.

在组 II 中,a,b,c,d,e 的值为3,4,5,6,9,其中 $d=5$,得

$$a+b+c+de=3+4+6+9+50=72$$

又 f,g,h,i 的值为1,2,7,8.由式②知 $i=8$,因得 $fg+hi$ 为 $17+28=27+18=45$,或 $12+78=72+18=90$,或 $21+78=71+28=99$.由于72与 $45\neq90\neq99$ 互不相等,故组 II 不适合于式①.

在组 IV 中,a,b,c,d,e 的值为2,4,5,7,9,其中 $d=5$.由式②,知 $i=4$.但 f,g,h,i 的值为1,3,6,8不含有4,故组 IV 不适合于式②.

在组 VI 中,a,b,c,d,e 的值为2,3,5,8,9,其中 $d=5$.由式②,知 $i=2$.但 f,g,h,i 的值为1,4,6,7不含有2,故组 VI 不适合于式②.

在组 VII 中,a,b,c,d,e 的值为1,5,6,7,8,其中 $d=5$.由式②,知 $i=6$.但 f,g,h,i 的值为2,3,4,9不含有6,故组 VII 不适合于式②.

在组 IX 中,a,b,c,d,e 的值为1,4,5,8,9,其中 $d=5$.由式②,知 $i=8$.但 f,g,h,i 的值为2,3,6,7,不含有8,故组 IX 不适合于式②.

现在剩下要考虑的,还有 V,X,XI,VIII 四种.

在组 V 中,a,b,c,d,e 的值为2,3,6,7,9,把它作成 $a+b+c+de$,有下列五种情形:

$$3+6+7+9+20=45$$
$$2+6+7+9+30=54$$
$$2+3+7+9+60=81$$
$$2+3+6+9+70=90$$
$$1+3+6+8+90=108$$

又 f,g,h,i 的值为 1,4,5,8,令 i 为偶数:

当 $i=4$ 时,得 $fg+hi$ 为

$$58+14=18+54=72$$

$$\text{或}\ 85+14=15+84=99$$

$$\text{或}\ 81+54=51+84=135$$

当 $i=8$ 时,得 $fg+hi$ 为

$$45+18=15+48=63$$

$$\text{或}\ 54+18=14+58=72$$

$$\text{或}\ 51+48=41+58=99$$

由于 $45\neq54\neq81\neq90\neq108$ 与 $72\neq99\neq135$ 及 $63\neq72\neq99$ 互不相等,故组 V 不适合于式 ①.

在组 X 中,a,b,c,d,e 的值为 1,3,6,8,9,把它作成 $a+b+c+de$,有下列五种情形:

$$3+6+8+9+10=36$$

$$1+6+8+9+30=54$$

$$1+3+8+9+60=81$$

$$1+3+6+9+80=99$$

$$1+3+6+8+90=108$$

又 f,g,h,i 的值为 2,4,5,7,令 i 为偶数:

当 $i=2$ 时,得 $fg+hi$ 为

$$47+52=57+42=99$$

$$\text{或}\ 45+72=75+42=117$$

$$\text{或}\ 54+72=74+52=126$$

当 $i=4$ 时,得 $fg+hi$ 为

$$27+54=57+24=84$$

$$\text{或}\ 25+74=75+24=99$$

$$\text{或}\ 52+74=72+54=126$$

在这里,若式 ① 的两边等于 81 时,用它的值代入式 ② 中,得 $a\times b\times c\times de$ 为 $1\times3\times8\times69=1\,656$,或 $1\times3\times9\times68=1\,836$,或 $1\times8\times9\times63=4\,536$,或 $3\times8\times6\times61=13\,176$.若式 ① 的两边等于 99 时,用它的值代入式 ② 中,得 $a\times b\times c\times de$ 为 $1\times3\times6\times89=1\,602$,或 $1\times3\times9\times86=2\,322$,或 $1\times6\times9\times83=4\,482$,或 $3\times6\times9\times81=13\,122$.在这些式的两边,都含有相同的数字,故组 X 不适合于式 ②.

在组 XI 中,a,b,c,d,e 的值为 1,2,7,8,9,把它作成 $a+b+c+de$,有下

列五种情形:

$$2+7+8+9+10=36$$
$$1+7+8+9+20=45$$
$$1+2+8+9+70=90$$
$$1+2+7+9+80=99$$
$$1+2+7+8+90=108$$

又 f,g,h,i 的值为 3,4,5,6,令 i 为偶数:

当 $i=4$ 时,得 $fg+hi$ 为

$$56+34=36+54=90$$
$$或\ 65+34=35+64=99$$
$$或\ 63+54=53+64=117$$

当 $i=6$ 时,得 $fg+hi$ 为

$$45+36=35+46=81$$
$$或\ 54+36=34+56=90$$
$$或\ 53+46=43+56=99$$

在这里,若式 ① 的两边等于 90 时,用它的值代入式 ② 中,得 $a\times b\times c\times de$ 为 $1\times2\times8\times79$(此式不是 9 的倍数),或 $1\times2\times9\times78=1\ 404$,或 $1\times8\times9\times72=5\ 184$,或 $2\times8\times9\times71=10\ 224$;若式 ① 的两边等于 99 时,用它的值代入式 ② 中,得 $a\times b\times c\times de$ 为 $1\times2\times7\times89$(此式不是 9 的倍数),或 $1\times2\times9\times87=1\ 566$,或 $1\times7\times9\times82=5\ 166$,或 $2\times7\times9\times81=10\ 206$.在这些式的两边,都含有相同的数字,故组 XI 不适合于式 ②.

最后剩下的只有组 VIII 一种了.

在组 VIII 中,a,b,c,d,e 的值为 1,4,6,7,9,把它作成 $a+b+c+de$,有下列五种情形:

$$4+6+7+9+10=36$$
$$1+6+7+9+40=63$$
$$1+4+7+9+60=81$$
$$1+4+6+9+70=90$$
$$1+4+6+7+90=108$$

又 f,g,h,i 的值为 2,3,5,8,令 i 为偶数:

当 $i=2$ 时,得 $fg+hi$ 为

$$58+32=38+52=90$$
$$或\ 85+32=35+82=117$$
$$或\ 83+52=53+82=135$$

当 $i = 8$ 时,得 $fg + hi$ 为

$$35 + 28 = 25 + 38 = 63$$

或 $53 + 28 = 23 + 58 = 81$

或 $52 + 38 = 32 + 58 = 90$

在这里,若式 ① 的两边等于 63 时,用它的值代入式 ② 中,得

$a \times b \times c \times de$ 为 $1 \times 6 \times 7 \times 49$(此式不是 9 的倍数)

$1 \times 6 \times 9 \times 47 = 2\ 538$

$1 \times 7 \times 9 \times 46 = 2\ 898$(此式右边有两个 8)

$6 \times 7 \times 9 \times 41 = 15\ 498$(此式两边同有 1)

若式 ① 的两边等于 81 时,用它的值代入式 ② 中,得 $a \times b \times c \times de$ 为

$1 \times 4 \times 7 \times 69$(此式不是 9 的倍数)

$1 \times 4 \times 9 \times 67 = 2\ 412$(此式两边同有 1 与 4)

$1 \times 7 \times 9 \times 64 = 4\ 032$(此式两边同有 4)

$4 \times 7 \times 9 \times 61 = 15\ 372$(此式两边同有 1 与 7)

若式 ① 的两边等于 90 时,用它的值代入式 ② 中,得 $a \times b \times c \times de$ 为

$1 \times 4 \times 6 \times 79$(此式不是 9 的倍数)

$1 \times 4 \times 9 \times 76 = 2\ 736$(此式两边同有 6 与 7)

$1 \times 6 \times 9 \times 74 = 3\ 996$(此式两边同有 6 与 9)

$4 \times 6 \times 9 \times 71 = 17\ 892$(此式两边同有 1,7 与 9)

由上面看来,可知要同时满足于 ①②,只能在组 VIII 中. 因此合于题意的解答是

$$\begin{cases} 1 + 6 + 9 + 47 = 25 + 38 \\ 1 \times 6 \times 9 \times 47 = 2\ 538 \end{cases}$$

即 $a = 1, b = 6, c = 9, d = 4, e = 7, f = 2, g = 5, h = 3, i = 8$. 但三个数字 a, b, e 共有 $3! = 6$ 个不同的排列法,故本题的解答一共有六个.

1955年12月号问题征解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:过伯祥.

解答第1,2,3,5题者:陆森,上海和平中学高三(2)数学小组,施裕焱,汪惠鑫,温暖,乐正,程海杰,马慎余,陈亚文,陈玉橦.

解答第1,2,4,5题者:王升润.

解答第1,2,3题者:彭超宇,杨洋,万德政,臧朋年,龙运佳,河北威师六班数学小组,朱冠章,丁木英,杨仁杰,杨连鸿,程基沛,张国定,楼宇同,陈育樟,张乾华,上海第七十一中学高二科趣小组.

解答第1,2,4题者:乐嘉泉,温兆森.

解答第1,2,5题者:吴益敏,王铮,陈光年,朱成环,陈剑豪,喻畯,郑守璋,肖镜国,俞忠元,裘宗沪,余虹钰,朱思铭,朱翘健.

解答第2,3,5题者:张耀辉,林锡洲,林应标.

解答第1,2题者:田增伦,杨欣,于增祥,谢家杭,黄人杰,古新妙,张强,邬思,华宇校,马世国,姚冬青,卓春兴,纪梅,周寄石,严梦桥,胡孝伦,辛世赞,林可容,汪振廷,胡金德,蔡路加,董荣春,杨振山,孙植,舒长禄,张岳华,田维中,张敦穆,邓舜勤,杨照球,光军,曹勃,方纯义,舒凡,陶醒民,高秉杰,贺麓,姜文锋,杨衍机,刘启才,金顺铨,林进修,王其纶,谢礼浩,张鉴桀,郑庆云,丁秀琼,祝毅清,杨见三,高锡钟,周业芳,徐仁茂,布扬,谢尧天,肖锡天,谢运茎,李文青,黄佑之,麦卓文,张铸民,娄文,房迎春,翁成雄,华永一,徐孝舜,张荣庭,胡本培,高金桓,周聘初,蒋丁昌,杨长水,程家骅,纪汉光,卢沛鋆,林介义,戴寿祺,邵惠伯,张有紘,孙承贤,孙承德,潘咸楼,瞿幼志,浙江嵊县中学高三乙第三数学小组,程光斗,余文彪,吴刚良.

解答第1,3题者:马垣,左立宙,贾彦宾.

解答第1,5题者:汪裕民,吕烈翰.

解答第2,3题者:封辅智,喻正元,静海,静晖,蒋时铎,瞿世福,刘汉标,陈增福.

解答第2,4题者:李方钥,戴锦锟,王梦兰,左宗明.

解答第2,5题者:张禄度,张宁生.

解答第1题者:赵英鳞,宋赞普,诸声扬,方斌,王治华,蔡璋,赵全福,熊泽元,安徽阜南初级中学数学组,王孝良,祁开敏,王传祉,许世选,韩纯杰,孙传华,李恩舜,钟礼慎,湖北黄冈中学高三数学爱好小组,朱茂春,陈烽,郭仲篪,彭

祖仁,张凤书,唐培坤,王明亮,陈学参,木日大,张浚源,宋兆彭,王铁英,杜建林,伍祚,王绍基,刘珍儒,杨怿珖,孙其梅,萧景明,黄金富,陈智贤,王厚传,韩念国,仲秀美,洪作清,郑炳南,吴侃,戴旭升,陈经纬,鲁迪,储三籁,贾竹笑,叶希孟,孔凡斌,弓尚书,林乐善,郑元偍,衣佩发,马俨,张宝富,张耀辉,孙承贤,孙承德,孙言能,项兴观,安有权,林宝文,孟宪斌,张洪发,郑炜,蔡连英,裘宝林,杨林森,段成善,袁成光,马诗安,束文正,彭素琴,任美娟,徐俊美,朱桂林,韦素华,俞秀华,杨冬小,张屺瞻,李明芬,刘鳞仲,吴新,邵炎.

解答第2题者:廖佛寿,宋兆澎,张俊源,王铁英,王治华,江在森,萧覆崐,郑德彰,张国定,潘捷建,华明,陈康元,王俊天,吴刚基,李兰德,刘大常,李赋重,梁玉衡,杨泽珖,曾国华,孙开学,陈士燮,彭志成,郭清亮,俞钟铭,陈开金,周龙祥,孙绍恩,黄官诚,郭臻宙,吴敏敢,沈毓沂,鲁真,刘广祥,吴建民,张宗相,伏开五,黄善明,李庆鹏,汪福天,陈庆云,起云鹏,张柏江,王富威,柳光轩,陆方,赵汉生,范秉光,张家起,马任骥,吴丙粱,欧阳光明,洪宪章,沈景秀,莫仲文,杨祥谱,邹大城,张兼善,易吉文,宁日晖,宋永森,官民泽,刘大康,陈铁华,王绍基,韩念国,陈烽,赵迪鸿,王连俊,蓝以中,耿梦榛,杨德华,聂乡生,郑万嵩,李联军,傅文宇,邹鸿斌,方丁,熊裴理,吴方成,方仲景,浦祖康,彭庚生,苏民发,刘乃新,柯斯年,李秀才,张芷香,胡梅生,葛托久,陈钧海,万荣成,全文度,张玮,柯永生,吴中乾,刘殿魁,孙钢,陶林,肖国标,章世祎,包淳福,郑桂仙,施毅,江明行,丁时成,李作新,甘尉棠,周邦煊,金明树,鲁琦,朱树芳,戈少耳,安心平,房鹤鹏,李宪权,张景滔,常武,王昭宇,上海市二十三业余中学数学教研组,饶家榆,张光玮,赵剑群,胡宝玉,汪德生,姚国宝,龚遂,钱韦泰,刘希圣,张重华,王沂官,尹文彦,孙坤保,李维亮,白川,张畛寰,张存寰,萧景明,钱建中,张钦宜,杨庆铎,姜乃钊,励金华,凌鄂生,桂麟,林敏智,俞有万,王宝慧,王元康,黄友川,忻华泰,上海市交通中学高三数学小组.

解答第3题者:范伟民,梁杰英.

解答第4题者:萧覆崐,陈光运,陈志超.

解答第5题者:朱建如,叶秀明,曾溢滔.

1955年12月号小知识问题解答

❖策算

1.策算是什么?(提出人:姬春年)

答　我国算数所用的工具,古代是用策,以后又用筹.策和筹是相似的东西,都用竹或木削成筷子的形象,储备若干个,拿来作为计数的用途.后汉书说道:“隶首用策,陈平用筹”.可见策、筹的使用,起源是很早的.仪礼乡射礼记载比射或投壶的时候,都是用筹来计算胜负.当时盛放算筹的东西,名叫闾中.闾是一种兽名,形状像驴.闾中就是用木刻成一个像驴子的算器,在它背上开有一孔,孔里用来容纳算筹.唐代有算袋,宋代有算子筒,亦都是用来装载算筹的东西.这样看来,我国用算筹的时间是很长久的.

718年唐瞿昙悉达译九执历,我国开始用笔算,但民间仍是沿用筹算.1592年明程大位著算法统宗,谈到有写算,亦是笔算的一种.程氏的写算,如配合筹策来用,在计数时,更能增加迅速,发挥巨大的力量.因此学习程氏算法的人们,创立了一种筹写两用的算法.这种算法,不必熟读歌诀,只是一方面排出算筹,一方面用笔写下来.这样既可减少错误,亦可节省时间,所以大家乐于采用,并且远远地流传到日本去了.

筹写两用的算法,于计算时所用的主要工具是筹策,所以一般人仍旧简称为筹算或称为策算.1678年梅文鼎著筹算,1744年戴震著策算.在这两书中所谈的,就是这种算法的一些内容.

❖矢量和张量

2.什么叫做矢量和张量?(提出人:喻峻)

答　在平面或空间的一条直线,不只有长度且有方向的,叫做矢量,亦称向量.例如三角形的三边,矩形的各边与对角线,平行六面体的各棱与对角线,速度,动量半径等,都是具有大小及方向的一些矢量.又如在空间一点的位置,如用直角坐标表示,它的位置矢量可写为

$$p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

式中 $x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}$,叫做点 P 的分矢或矢的分支. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$,叫做各坐标轴方向的幺矢或单位矢.

一个抽象的东西,在任何坐标系中,具有某个特殊分支的系.若将这些分支的全体,移于其他不同的坐标系中,也能把这个东西表示出来.这些分支所成的系,叫做张量.当坐标系转换时,张量的各分支也就是转换.在转换的前后,各个分支都是线性式.又对于坐标转换的一阶偏微分都是齐性式.举例说明如下.

设有 n 个变数 $x^i(i = 1,2,3,\cdots,n)$,由各个变数 x^i 可作成一组的函数.设在这些函数中的一个写出为

$$A_{jk\cdots m}^{pq\cdots t}$$

在这式中,上标$(pq\cdots t)$的数字有 r 个,下标$(jk\cdots m)$有 s 个.
于是得 n^{r+s} 个数值 A,叫做 $r+s$ 阶张量的 x 分支.但这些分支 x^i,由原坐标系,转换为它系得 $x'^i(i = 1,2,3\cdots,n)$ 时,必须满足下列的条件:即

$$x'^i = A'^{pq\cdots t}_{jk\cdots m} = A^{ab\cdots d}_{ef\cdots k} \times \frac{\partial x'^e}{\partial x^a}\cdots\frac{\partial x'^t}{\partial x^d}\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\cdots\frac{\partial x^h}{\partial x'^m}$$

在这式中的引标 $a,b,\cdots,d$ 及 $e,f,\cdots,h$ 须一律地用到.

❖渐伸线和渐缩线

3.怎样去区别渐伸线(Involute)和渐缩线(Evolute)?(提出人:夏永金)

答 曲线上各点的曲率中心之轨迹,叫做这曲线的渐缩线.如图1,AP 为曲线,在点 A 的曲率半径为$A\alpha$,曲率中心为 α;点 P 的曲率半径为$P\pi$,曲率中心为 π.当曲线上的点 A 在AP上走动,曲率中心 α 就在$\alpha\pi$上走动.那么 $\alpha\pi$ 称为 AP 的渐缩线,AP 称为 $\alpha\pi$ 的渐伸线.

曲率半径是渐伸线的法线,亦是渐缩线的切线.根据这个性质,就可以作出曲线的渐缩线之近似图形.作法如下:

在曲线上诸点 $A,P,P',\cdots$ 作若干条法线 $A\alpha, P\pi, P'\pi',\cdots$,再作一曲线 $\alpha\pi\pi'$ 切于这些法线,那么 $\alpha\pi\pi'$ 就是AP 的渐缩线,这样作法,当法线的条数作得愈多时,所得的精确度也愈超精密.

反转上面的方法,也可由渐缩线来作渐伸线如下:设已知渐缩线为 $\alpha\pi\pi'$,在诸点 $\alpha,\pi,\pi'\cdots$ 作若干条切线 $\alpha A,\pi P,\pi'P'\cdots$ 这些切线也就是渐缩线的包线.试任取一切线 αA,在这线上以任意的长度决定一点 A.另以一绳贴合于 αA,固定于 α,在 A 附一铅笔,将绳张紧,把它逐渐地伸开,当绳转动时,铅笔在 A 所描

写的曲线 APP'，就是 $\alpha\pi$、π' 的渐伸线．这样作法，因为 αA 的长度，可以自由地伸缩，故由一个渐缩线，可以作出无穷个渐伸线，彼此都是互相平行的．但由一个渐伸线，却只能作出一个渐缩线．

示例如图 1．抛物线：$y^2=4ax$ 是渐伸线，半立方抛物线：$27ay^2=4(x-2a)^3$ 就是渐缩线．

椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 是渐伸线，四尖点曲线 $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$ 就是渐缩线．

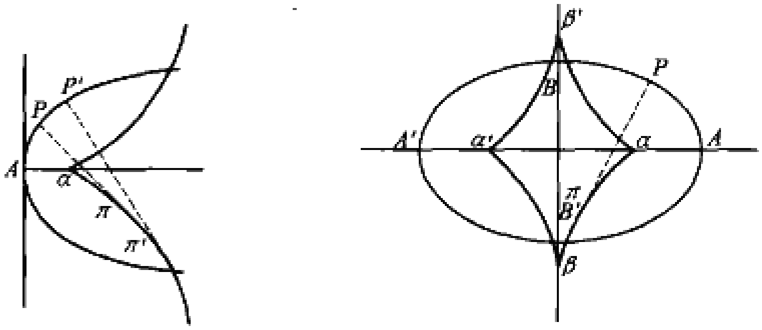


图 1

❖费尔巴哈定理

4．什么是费尔巴哈(Feuerbach)定理？（提出人：陈文立）

答　三角形三边的中点，三条高的足，三角顶与垂心连接线的中点，一共九点，是同在一圆周上．这个圆叫做九点圆，亦称费尔巴哈(1800—1834)圆．费氏于 1822 年发现这个圆有下列的

定理　九点圆切于内切圆，亦切于三个傍切圆．这叫做费氏定理．

扩张这个定理，又得着一个重要的定理如下．

定理　四圆同切于一圆（图 2），设第一圆与第二圆的公切线表示为 $\overline{12}$，余仿此．就得

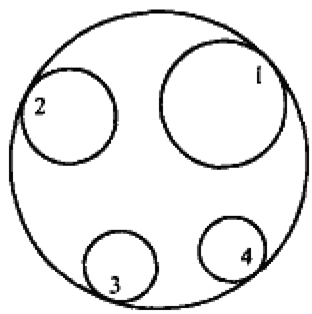


图 2

$$\overline{12}\cdot\overline{34}+\overline{14}\cdot\overline{23}=\overline{13}\cdot\overline{24}$$

在这式中的 $\overline{12}$ 亦可解释如下：设一公切线在第一圆的切点为 A，在第二圆的为 B，那么 $\overline{12}$ 可改写为 AB，余仿此．因此上式亦可写作

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

❖三角形三内角之和

5.三角形三内角之和为什么可以小于两直角,也可以等直于两角,还可以大于两直角?(提出人:程基沛)

答 欧氏几何学的基础,是建筑在五个公理和五个公设的上面.他的第五公设就说道:“过直线外的一点,可以作一条且只能够作一条直线跟原来的那条直线平行”.这个公设没有像其余的公理公设那么显明易见.因此有许多数学家们总想尽办法要来证明它.可是花费了大量的精力心血,经过了两千年的不懈努力,却得到结论说:“要证明这个公设是不可能的事情咧!”

1829年俄国数学家罗巴切夫斯基(1793—1856)做了一件数学上最伟大的革命工作.他把从前几何学上的公理公设仍旧保留,只除掉第五公设,从此创立了一种几何学,叫做非欧几何学.换句话说,他的几何学,不用欧氏的第五公设,而代替以下面的公设:“过直线外的一点,可以作无数条直线跟原来的那条直线平行”.这样的几何学,也叫做绝对几何学.他所作的无数条直线,组成一个角,在那个角的范围内,一切的线都跟原来的直线平行.

在罗氏绝对几何学中,有些奇怪性质,略举出几个如下:(1)三角形三内角之和,总是小于两直角.它的数值,因在各个三角形也就不相同.(2)三角形的面积,是由三内角之和的数值来作决定.它的最大面积是一个有穷数值.(3)过直线外的一点,可作无数条直线跟原来的直线平行.(4)在任意三角形的外面,不能随便去作外接圆.(5)没有大小不等的相似图形.(6)没有正方形.所有这些性质,都显得意外惊人.因此有人说道:“要做推动地球的工作,比要做减少三角形三内形之和的工作还容易些哩.”

1854年德国数学家黎曼(1826—1866)又创立了一种几何学.在这个几何学里,也有些奇怪性质如下:(1)三角形三内角之和,总是大于两直角.(2)过直线外的一点,不能作出平行线跟原来的直线平行.(3)各条直线都只有同样的有穷长度.(4)任意两条直线必相交.(5)两点间的距离不是直线而是捷线.(6)根据次序的意思来说,没有居中公理.

欧氏几何学亦称抛物几何学,罗氏几何学亦称变曲几何学,黎曼几何学亦称椭圆几何学.欧氏几何学认为三角形三内角之和是等于两直角.像这样的性质,如应用于实际的空间,只在小范围以内(即有几百万公里的距离以内)是正确的.若谈到广大的宇宙,例如要计算恒星世界里所构成的三角形,就得到三内角之和是小于两直角,所以它是适合于罗氏几何学.若我们如果研究光学,波动

学,相对论等,从那里所表现诸现象来看,却又得到结论说:在物理世界里的一些计算,是适合于黎曼几何学.

三角形三内角之和,或是等于两直角,或小于两直角,或大于两直角,有更明显的实例:(1) 在平面上,三角形三内角之和等于两直角(图 3(a)).(2) 在曲率半径为负数的滚面上,三角形三内角之和,小于两直角(图 3(b)).

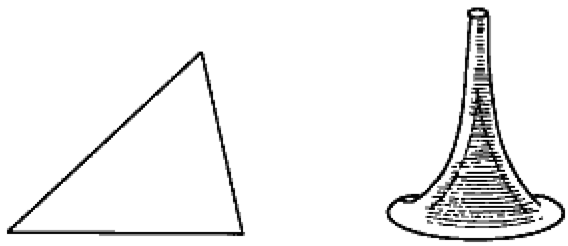


图 3

❖九条路问题

6. 什么叫做九条路问题?(提出人:白云,威辛洛,方伟之)

答 某处有甲乙丙三家,他们要到公共的工作室,合作社和文化宫三个房子去,因此共有九条路.问该怎样走法,才能使那九条路互不相交?

上面的描述叫做九条路问题.这题属于拓扑学,是不可能得到解答的.如图 4 的画法,A 为工作室,B 为合作社,C 为文化宫.由甲乙两家各有三条路,这样把地面分成子,丑,寅三部分.若丙家在子部分就无法去通 B;在丑部分就无法去通 A;在寅部分就无法去通 C.

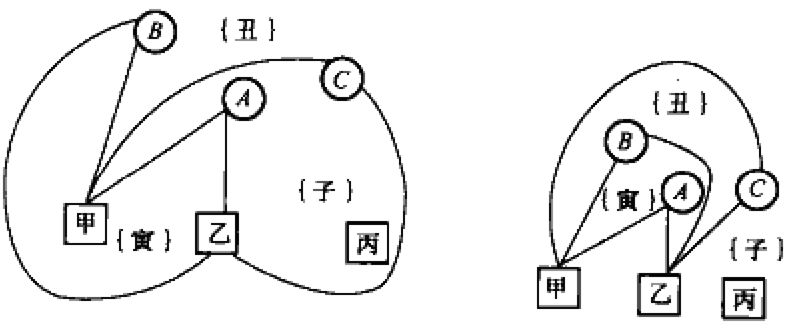


图 4

1955年12月号小知识解答者名单

解答第1,2,3,4,5,6题者:陈玉槛.

解答第1,3,4,5,6题者:俞忠元,裘宗沪.

解答第2,3,5题者:喻畯.

解答第3,5,6题者:曾繁远.

解答第1,6题者:陈智贤.

解答第3,5题者:高锡钟,周业芳.

解答第5,6题者:乐传达,楼宇同,陈育樟,张乾华.

解答第1题者:扬亦亨,安徽阜南初级中学数学组,李善.

解答第2题者:廖佛寿,沈景秀,贺麓成.

解答第4题者:河北威师六班数学小组,杨嘉靴,王元康,刘奉华.

解答第5题者:李教金,林进修,金顺铨,梦卓文.

解答第6题者:罗文波.

1956 年 1 月号问题征解答案

❖内接极大锥体

1. 已知正圆锥的底和高，求作一个内接正圆锥，使它的体积为极大.(提出人:秦秋君)

解法 1 若所作内接正圆锥与已知正圆锥同向，显然所作的必定与已知的重合，体积才为极大.

若所作正圆锥与已知的反向，令已知正圆锥的高 $AD = H$，底半径 $BD = R$，所作正圆锥的高 $DG = h$，底半径 $FG = r$，那么$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$，所以

$$h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

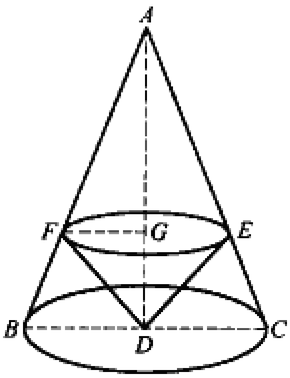


图 1

设所作内接正圆锥的体积为 V，则

$$V = \frac{\pi H}{3}\left(1 - \frac{r}{R}\right)r^2 (但\ r > 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \pi H\left(\frac{2r}{3} - \frac{r^2}{R}\right)$$

在这式中，取$r < \frac{2}{3}R$，得$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} > 0$；取 $r > \frac{2}{3}R$，得$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} < 0$. 故当 $r = \frac{2}{3}R$，即 $h = \frac{1}{3}H$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0$，$V$ 为极大.

注 所求的锥体体积

$$V = \frac{\pi H}{3}\left(1 - \frac{r}{R}\right)r^2 = \frac{\pi H}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 R^2 = \frac{\pi R^2 H}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4\pi R^2 H}{81}$$

设已知锥体的体积为 $V_0 = \frac{\pi HR^2}{3}$，所以$\frac{V}{V_0} = \frac{4}{27}$.

这就是说，所作内接极大圆锥的体积，等于已知圆锥体积的$\frac{4}{27}$.

解法 2 因为 $\triangle AGF \backsim \triangle ADB$(图 1)，得

$$\frac{AG}{AD} = \frac{FG}{BD}$$

即
$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R}$$
所以
$$r=\frac{R(H-h)}{H}$$
$$V=\frac{\pi hr^2}{3}=\frac{\pi R^2}{3H^2}h(H-h)^2$$
$$2V=\frac{\pi R^2}{3H^2}\cdot 2h(H-h)^2$$
上式中$\frac{\pi R^2}{3H^2}$是一个定数，要使 V 或 $2V$ 为极大，必须使 $2h(H-h)^2$ 为极大，但 $2h+(H-h)+(H-h)=2H$ 是一个定数，故当 $H-h=2h$，即 $h=\frac{H}{3}$ 时，V 为极大.

❖七分三角形

2. 如图 2，在 $\triangle ABC$ 的各边上，取 $AC'=\frac{AB}{3}$，$BA'=\frac{BC}{3}$，$CB'=\frac{CA}{3}$，联结 AA'，BB'，CC'，把原三角形分做七部分，试证：

(1) 各角上所成三个小三角形的面积相等，即
$$S_{\triangle ADC'}=S_{\triangle BEA'}=S_{\triangle CFB'}$$
(2) 三个小三角形面积之和等于中间的三角形，即
$$S_{\triangle ADC'}+S_{\triangle BEA'}+S_{\triangle CFB'}=S_{\triangle DEF}$$
(3) 各边上所成三个四边形的面积亦相等，即
$$S_{四边形BC'DE}=S_{四边形CA'EF}=S_{四边形AB'FD}$$
(提出人：廖蓝心)

证法 1 (1) 联 DB(图 3)，因为 $CA'=2A'B$，得 $S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ADB}$. 又 $3S_{\triangle ADC'}=S_{\triangle ADB}$(式中 $2AC'=C'B$)，所以
$$7S_{\triangle ADC'}=S_{\triangle ACC'}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$$
同理
$$7S_{\triangle BEA'}=S_{\triangle BAA'}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$$

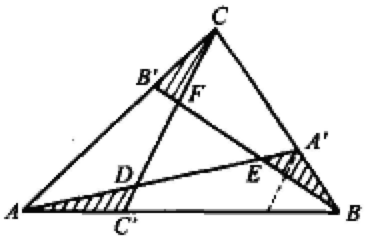


图 2

$$7S_{\triangle CFB'} = S_{\triangle CBB'} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$$

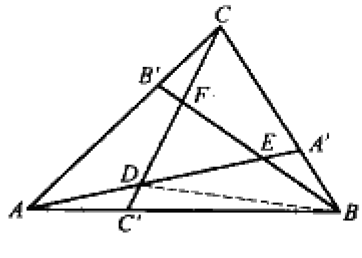


图 3

又证：从点 A' 作 $A'G \parallel CC'$，得 $\frac{BG}{BC'} = \frac{BA'}{BC}$，即

$$\frac{BG}{\frac{2}{3}AB} = \frac{\frac{1}{3}BC}{BC}$$

于是 $BG = \frac{2}{9}AB$，所以 $AG = \frac{7}{9}AB$. 又 $\frac{AD}{AA'} = \frac{AC'}{AG}$，即

$$\frac{AD}{AA'} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{7}{9}AB}$$

所以 $AD = \frac{3}{7}AA'$. 因为 $\angle DAC' = \angle A'AB$，所以

$$\frac{S_{\triangle ADC'}}{S_{\triangle AA'B}} = \frac{AD \cdot AC'}{AA' \cdot AB}$$

即

$$\frac{S_{\triangle ADC'}}{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3}{7}AA' \cdot \frac{1}{3}AB}{AA' \cdot AB}$$

所以 $S_{\triangle ADC'} = \frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$. 同理

$$S_{\triangle BEA'} = S_{\triangle CFB'} = \frac{1}{21}S_{\triangle ABC}$$

(2) 因为

$$S_{四边形BC'DE} = S_{\triangle BAA'} - S_{\triangle ADC'} - S_{\triangle BEA'} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21} - \frac{1}{21}\right)S_{\triangle ABC} = \frac{5}{21}S_{\triangle ABC}$$

同理

$$S_{四边形CA'EF} = \frac{5}{21}S_{\triangle ABC}$$

又

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle CC'B} - S_{四边形BC'DE} - S_{四边形CA'EF} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} - \frac{10}{21}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$$

所以

$$S_{\triangle ADC'}+S_{\triangle BEA'}+S_{\triangle CFB'}=S_{\triangle DEF}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}$$

(3) 由上得

$$S_{四边形BC'DE}=S_{四边形CA'EF}=S_{四边形AB'FD}=\frac{5}{21}S_{\triangle ABC}$$

证法 2 (1) 把 AEA' 看做 $\triangle BCB'$ 的截线，得

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{AC}{AB'}\cdot\frac{EB'}{EB}=1$$

已知$\frac{A'B}{A'C}=\frac{1}{2},\frac{AC}{AB'}=\frac{3}{2}$，所以$\frac{EB'}{EB}=\frac{4}{3}$，所以 $EB=\frac{3}{7}BB'$. 又把 CFC' 看做 $\triangle ABB'$ 的截线，得

$$\frac{C'B}{C'A}\cdot\frac{CA}{CB'}\cdot\frac{FB'}{FB}=1$$

已知$\frac{C'B}{C'A}=2,\frac{CA}{CB'}=3$，所以$\frac{FB'}{FB}=\frac{1}{6}$，所以$FB=\frac{6}{7}BB'$. 于是

$$EF=FB-EB=\frac{3}{7}BB'=EB$$

同样 $DF=FC,ED=DA$. 所以

$$S_{\triangle ADC'}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADB}=\frac{1}{3}S_{\triangle BED}=\frac{1}{3}S_{\triangle DEF}$$

同理得

$$S_{\triangle BFA'}=\frac{1}{3}S_{\triangle DEF},S_{\triangle CFB'}=\frac{1}{3}S_{\triangle DEF}$$

(2) 由上得

$$S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BEA'}+S_{\triangle CFB'}=S_{\triangle DEF}$$

(3) 因为 $S_{\triangle ABA'}=S_{\triangle BCB'}=S_{\triangle CAC'}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，所以

$$S_{四边形BC'DE}=S_{四边形CA'EF}=S_{四边形AB'FD}$$

证法 3 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle CAC'}=3S_{\triangle ABA'}=3S_{\triangle BCB'}$，所以

$$S_{\triangle CAC'}=S_{\triangle ABA}=S_{\triangle BCB'}.S_{\triangle ADC}=S_{四边形BC'DA'}=$$
$$S_{\triangle BEA}=S_{四边形CA'EB'}=S_{\triangle CFB}=S_{四边形AB'FC'}$$
$$S_{\triangle CAC'}-S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABA'}-S_{\triangle BEA}=S_{\triangle BCB'}-S_{\triangle CFB}$$

所以

$$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle BEA}=S_{\triangle CFB}$$

即(1)得证.

$$\left.\begin{aligned}S_{\triangle ABA'}-2S_{\triangle ADC'}&=S_{四边形BC'DE}\\S_{BCB'}-2S_{\triangle BEA'}&=S_{四边形CA'EF}\\S_{\triangle CAC'}-2S_{\triangle CFB'}&=S_{四边形AB'FD}\end{aligned}\right\}$$这三式左边相等，即右边亦相等，所以(3)

得证.

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABA'}+S_{\triangle BCB'}+S_{\triangle CAC'}-(S_{\triangle ADC'}+S_{\triangle BEA'}+S_{\triangle CFB'})+S_{\triangle DEF}$,

但 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABA'}+S_{\triangle BCB'}+S_{\triangle CAC'}$,所以

$$S_{\triangle ADC'}+S_{\triangle BEA'}+S_{\triangle CFB'}=S_{\triangle DEF}$$

即(2)得证.

❖三角形内所作小三角形的性质

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 取 $\angle BAA'=\angle CBB'=\angle ACC'=\theta$(图 3). 试证: (1)$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$. (2)$\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的对应边之比 $\left(\text{即}\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{AC}\right)$为$\dfrac{\sum\sin(2A+\theta)-3\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}$.(提出人:孙钢)

证 (1)$\angle FDE=\angle DAC+\angle DCA=\angle A-\theta+\theta=\angle A$,同样$\angle DEF=\angle B$,所以 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

(2) 求$\dfrac{DE}{AB}$,由正弦定理得

$$AE=\frac{AB\cdot\sin(B-\theta)}{\sin B},AD=\frac{AC\cdot\sin\theta}{\sin A}=\frac{AB\cdot\sin B\sin\theta}{\sin A\sin C}$$

于是

$$\frac{DE}{AB}=\frac{AE-AD}{AB}=\frac{\sin(B-\theta)}{\sin B}-\frac{\sin B\sin\theta}{\sin A\sin C}=$$

$$\frac{\sin(B-\theta)\sin A\sin C-\sin^2B\sin\theta}{\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{4\sin B\sin A\sin C\cos\theta-4(\sin A\sin C\cos B+\sin^2B)\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)\cos\theta-4(\sin A\sin C\cos B+\sin^2B)\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{\cos\theta\sum\sin 2A-4(\sin A\sin C\cos B+\sin^2B)\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}$$

但

$$\sin A\sin C\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A-C)-\cos(A+C)]\cos B=$$

$$\frac{1}{2}\cos(A-C)\cos B+\frac{1}{2}\cos^2B=$$

$$\frac{1}{2}(\cos A\cos C+\sin A\sin C)\cos B+\frac{1}{2}\cos^2B=$$

$$\frac{1}{2}\cos A\cos B\cos C+\frac{1}{2}\sin A\sin C\cos B+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 B$$

所以 $$\sin A\sin C\cos B+\sin^2 B=\cos A\cos B\cos C+1$$

代入上式

$$\frac{DE}{AB}=\frac{\cos\theta\sum\sin 2A-4(\cos A\cos B\cos C+1)\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{\cos\theta\sum\sin 2A+(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C-3)\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{\cos\theta\sum\sin 2A+\sin\theta\sum\cos 2A-3\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{\sum\sin(2A+\theta)-3\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}$$

同样亦得 $$\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}=\frac{\sum\sin(2A+\theta)-3\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}$$

(2) 的又证. 由正弦正理

$$CC'=\frac{b\sin A}{\sin(A+\theta)},CF=\frac{a\sin\theta}{\sin C},AD=\frac{b\sin\theta}{\sin A}$$

$$DC'=\frac{AD\sin\theta}{\sin(A+\theta)}=\frac{b\sin^2\theta}{\sin A\sin(A+\theta)}$$

$$FD=CC'-DC'-CF=\frac{b\sin^2 A\sin C-b\sin C\sin^2\theta-a\sin A\sin\theta\sin(A+\theta)}{\sin A\sin B\sin C\sin(A+\theta)}=$$

$$\frac{b\sin B\sin C(\sin^2 A-\sin^2\theta)-b\sin^2 A\sin\theta\sin(A+\theta)}{\sin A\sin B\sin C\sin(A+\theta)}=$$

$$\frac{b\sin B\sin C(\sin A+\sin\theta)(\sin A-\sin\theta)-b\sin^2 A\sin\theta\sin(A+\theta)}{\sin A\sin B\sin C\sin(A+\theta)}=$$

$$\frac{b\sin B\sin C\sin(A+\theta)\sin(A+\theta)-b\sin^2 A\sin\theta\sin(A+\theta)}{\sin A\sin B\sin C\sin(A+\theta)}=$$

$$\frac{b\sin B\sin C\sin(A-\theta)-b\sin^2 A\sin\theta}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$\frac{FD}{CA}=\frac{\sin B\sin C\sin(A-\theta)-\sin^2 A\sin\theta}{\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{[\cos(B-C)-\cos(B+C)]\sin(A-\theta)-2\sin^2 A\sin\theta}{2\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{2\sin(A-\theta)\cos(B-C)-2\sin(A-\theta)\cos(B+C)-4\sin^2 A\sin\theta}{4\sin A\sin B\sin C}=$$

$$\frac{\sin(2B+\theta)+\sin(2C+\theta)+\sin(2A-\theta)+2\cos 2A\cos\theta-3\sin\theta}{4\sin A\cos B\sin C}=$$

$$\frac{\sin(2A+\theta)+\sin(2B+\theta)+\sin(2C+\theta)-3\sin\theta}{4\sin A\cos B\sin C}$$

❖四位数的一个性质

4.有一个四位数,其四位数字之和的一半,等于首尾或当中两个数字之和;第一第二位两个数字之和,等于单位的数值;第一位数字的二倍等于第三位的数值,问具有这样性质的数有多少个?(提出人:汪关荣)

解　设各位的数字依次为 a,b,c,d.

依题意
$$\frac{a+b+c+d}{2}=a+d=b+c \qquad ①$$
$$a+b=d \qquad ②$$
$$2a=c \qquad ③$$

由③知 $a<5$,由②知 $a+b<10$.

$$当\ a=4\ 时,c=8\begin{cases}b=0 & d=4\\ \quad 1 & \quad 5\\ \quad 2 & \quad 6\\ \quad 3 & \quad 7\\ \quad 4 & \quad 8\\ \quad 5 & \quad 9\end{cases};当\ a=3\ 时,c=6\begin{cases}b=0 & d=3\\ \quad 1 & \quad 4\\ \quad 2 & \quad 5\\ \quad 3 & \quad 6\\ \quad 4 & \quad 7\\ \quad 5 & \quad 8\\ \quad 6 & \quad 9\end{cases}$$

$$当\ a=2\ 时,c=4\begin{cases}b=0 & d=2\\ \quad 1 & \quad 3\\ \quad 2 & \quad 4\\ \quad 3 & \quad 5\\ \quad 4 & \quad 6\\ \quad 5 & \quad 7\\ \quad 6 & \quad 8\\ \quad 7 & \quad 9\end{cases};当\ a=1\ 时,c=2\begin{cases}b=0 & d=1\\ \quad 1 & \quad 2\\ \quad 2 & \quad 3\\ \quad 3 & \quad 4\\ \quad 4 & \quad 5\\ \quad 5 & \quad 6\\ \quad 6 & \quad 7\\ \quad 7 & \quad 8\\ \quad 8 & \quad 9\end{cases}$$

因此像这样的四位数是

1 021,1 122,1 223,1 324,1 425,1 526,1 627,1 728,1 829,2 042
2 143,2 244,2 345,2 446,2 547,2 648,2 749,3 063,3 164,3 265
3 366,3 467,3 568,3 669,4 084,4 185,4 286,4 387,4 488,4 589

一共有三十个.

❖求证级数的和

5. 求证：$\frac{5}{1\cdot2\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{9}{5\cdot6\cdot7}+\cdots=3\ln 2-1$.（提出人：洪立文）

证 $$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

令

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}=$$
$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}-\frac{3}{7}\right)+\cdots+$$
$$\left(\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{2n}-\frac{n}{2n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\frac{n}{2n+1}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}$，所以 $S_n=\ln 2-\frac{1}{2}$.

$$\frac{5}{1\cdot2\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{9}{5\cdot6\cdot7}+\cdots=$$
$$\left(\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5}+\frac{6}{5\cdot6\cdot7}+\cdots\right)+$$
$$3\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\cdots\right)+3\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots\right)+3\ln 2-\frac{3}{2}=3\ln 2-1$$

1956年1月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:袁育才,龙运佳,张耀辉,刘汉标,汪惠鑫,陈亚文,马慎余,程海杰,方博仁,程家骅,纪汉光,王升润,林立,林起,过伯祥,徐孝舜,麦卓文,白云,威辛洛,非青,膨政,癸癸,辛航.

解答第1,2,3,4题者:丁木英,辛开河,哈尔滨一零三部队23号信箱.

解答第1,2,3,5题者:卢沛銮,程培基,陈增福,陈玉櫨,吴顺唐,丁秀琼,陈炳盛,周安授.

解答第1,2,4,5题者:薛梵,陈朝瑞,肖建球.

解答第2,3,4,5题者:黄水源,棠彰华.

解答第1,2,3题者:胡晖,房迎春,戈炳昆,陈龙昊.

解答第1,2,4题者:王鸣,李大孙.

解答第1,2,5题者:杨祥谱,汪壶君,江荣禧,卢哲谅,江苏阜宁中学高二甲数学爱好小组,钱建中,王其纶,刘家琦,潘以德,朱思铭,俞文鮍,林锡珊,林应标,吴刚良.

解答第1,3,4题者:钟灿兴.

解答第1,4,5题者:程汝良.

解答第2,3,5题者:陈水深.

解答第2,4,5题者:黄人杰.

解答第1,2题者:宋麟范,喻畯,刘忠厚,李善同,程宝龙,伍家德,李金昌,李兆喜,张畛寰,陈怀惠,臧朋年,楼宇同,刘麟仲,吴宗汉.

解答第1,4题者:许伯济,范志强,林乐善,林熙民,刘大常,陈筱明.

解答第1,5题者:钱聿泰,吴益敏,曾瑛.

解答第2,3题者:王天俊,少华,丁俊若,安心平.

解答第2,4题者:董琳,姚国宝,陈剑豪,王英武,朱长生,贾彦宾,葛元冲,朱维平,张学文,华永一,徐锦鸿,彭祖仁,忻华泰,上海市立交通中学高三数学小组.

解答第2,5题者:李方钥,汪裕民,郑家琪,宁兆喜,杨泽,裘宗沪,俞忠元,张家珍,任永复,杨铎,戴寿琪,王祝然.

解答第4,5题者:柳光轩,王裕灏,洪宪章,姚国宝.

解答第1题者:王春光,吴方成,戴锦锟,邱忠琪,徐化恩,聂振纲,潘元奇,王兴发,陆方,赵汉生,田增伦,丁正良,黄德清,宋盛飞,杨衍机,何京,杨连鸿,

张玮，高一萍，葛金荣，朱平，杨德华，张敦穆，邓舜勤，杨照球，王家林，熊昌备，赵迪鸿，黄佑之，程光门，洪正福.

解答第2题者：王茹，周持中，孙承贤，孙承德，李文浩，华中师院附中高二（一）数学学习小组，成遗本，黄斯岫，潘敬礼，翟世福，袁振才，孙纲，曹家鼎，朱宪民，梁杰英，那延芳，耿德金，李一亚，吴道焱，邬思，姚钫，沙新民，于汝强，张浚源，左立角，喻信良，毛树杰，沈柏林，陈玲瑛，苏刚，张海祥，李师正，杨泰福，郭万成，张心成，胡仁元，河南许昌第一初师数学组，张国定，程基沛，萧景明，蒲元定，邓炜，李召蓍，顾恒基，介遵道，张文宽，方丁，吴兆祥，邱双灿，章胤善，杨怿光，张起平，樊金魁，王亮，曾繁远，张溥，吕烈翰，赵林，宋林，陈烈楷，张宁生，温暖，钟义甫，朱铿，石啸生，陈荣基，朱云波，陈孔祥，程乾生，杨莲子，福建漳州王于君，郑天健，邱伟伦，缪发范，方关宝，张钦宜，封辅智，巢志齐，林介义，陈欣高，龚克奎，叶希孟，张南岳，张有絃，潘咸按，郭秉正，冯鸣庄，洪毅，李敦平，赵育吾，曲大天，殷士光，任奉祥，张书楷，吴友准.

解答第4题者：陈静剑，裘宝林，彭士炎，张铸民，郑道民，胡久稔，葛文祺，曾溢滔，陆淼，朱冠章，马俨，广州广雅中学高二乙数理小组，杨传珠，却日勒扎布，华宇枚，谢毓厚，上海继光中学高三甲数理小组，金钰帛.

解答第5题者：张禄度，张代荣，朱连喜，李宪权，陈宪权，方仁焰.

1956年1月号小知识问题答案

❖走路拐弯

1. 有些平行的纵线，在各两平行线间又有些不等高的横线，如甲从点 A 开始走动，见弯就拐，结果甲、乙、丙、丁、戊…… 所到的终点，并不同在一点，如用从 A 走到 A'，乙从 B 走到 B'，丙从 C 走到 C'，……，要是再有己、庚……，从 F，G，… 走动，同样会走到不同的终点，这是什么道理？(提出人：毓星)

答 题中所谓见弯就拐，应该解释为朝向下方或水平方向走动的意思，图 1 上所画诸横线因不等高，故在各横线线段的左右两端要拐弯时，必有一条且只有一条路可通，因此任意从某点出发，最后总可达到一个终点，今再要证明的是：甲、乙、丙、…… 中的某两个或几个，能否达到同一个终点，比方说，甲从 A 到 A'，甲从 B 也到 A'. 如能证明这话不成立，问题便解决了，证法如下：

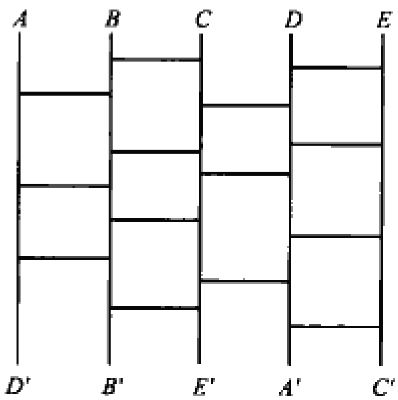


图 1

设甲、乙能够同到点 A'，那么在到 A' 以前，必定有一段同伴的路程，他们达到同伴的方式，有下列三点：

(1) 经过不同的横线，到同一点相遇，但这是不可能. 因为如果真的这样的话，这两条横线便等高，是与题设相矛盾了.

(2) 原来甲在一条纵线上走，乙从一条横线达到同一纵线. 但这也不可能. 如果是这样的话，甲便没有在乙进入这纵线的交点地方拐弯，即是甲没有遵守见弯就拐的规则.

(3) 甲在某条横线上走，后来乙进入同一横线，且方向与甲相同. 但这也不可能. 因为如果真有这样的话，那么他们便在进入这条横线的拐弯点以前的纵线上，便早已经是同伴了.

事实上，他们在纵线上所走的各线段都不相同，在横线上所走的各线段，只能相对地走动，方向总是相反的，故本题得到证明.

2. 九九有些什么的解释?(提出人:姬年仪)

答 管仲(公元前705?— 前645年) 管子轻重戊篇载:"宓戏作九九之数". 吕不韦(卒于公元前235年) 吕氏春秋载:"东野有以九九见者". 这两书所载,只有九九的名称.

魏刘徽九章术序(263) 载:"包羲氏作九之术" 这里以九九所指的是一种算术. 唐颜师古(581—645) 注汉书载:"九九:若今九章五曹之辈" 这里又以九九所指的是一种算书了.

九九也可解释为九九歌诀或九九表. 九九歌诀的记载,散见于荀况(公元前298— 前238年顷) 荀子,贾谊(公元前201—169年) 新书,刘安(公元前179— 前122年) 淮南子诸书. 九九表早见于敦煌汉简及居延汉简.

九九的应用,有下列各方面:

(1) 九九用于算数,把九九当作自一到九每两数相乘的乘法表,亦称九九数,在计算时能够得到方便.

(2) 九九用于起度,淮南子载:"黄钟的标准为九寸,每寸九分. 九九相乘得八十一分". 所以古时的标准长度是81分.

(3) 九九用于立量,前汉书律历志载:"量的规定,从龠会开始. 二龠为合,十合为升,十升为斗,十斗为斛. '龠,合,升,斗,斛' 五者,叫做'五量'". 刘歆所造嘉量,就具有这五个容量. 依嘉量上的铭文计算,得一龠的容量为810立方分,高1寸,底的面积81方分,也是一个九九数.

(4) 九九用于定律,管子地员篇载"取九九得八十一,作为'宫' 音的律数". 所谓"宫" 音就是"宫,商,角,徵,羽" 五音中第一个标准音. 为什么要定九九为宫音的律数呢?这是因为要使五音的律数都能成为整数的缘故.

(5) 九九用于计日,550年顷梁代宗懔著荆楚岁时记说道:"民间有计算寒冷日子的习惯方法,从冬至的第二天起算,经过八十一天,冷气都已消尽,叫做九九. 十一世纪宋代苏轼(1036—1101) 有诗说道:"算来九九无多日". 1630年顷明代刘侗著帝京景物略说道:"在冬至的这天,书好一枝九朵的梅花,每朵花都有九个瓣. 从冬至的第二天起,每天填染一瓣的颜色,填完一朵花,表示过了一九. 九朵花都填完,九九都消尽,也到了第二年的惊蛰节,天气度得和暖起来. 这叫做九九消寒图." 十九世纪清稗类钞时令类说道:"在1830年顷,有人选定'亭前垂柳珍重待春風' 九个字,用笔双勾画好,装潢制成一个条幅,叫做九九消寒图. 因为那九个字的笔画都是一样的,每字都由九笔构成. 若要计算冬天寒冷日期,从冬至开始,每天填写一笔,经过八十一天,九个字都填完,寒气也跟着消尽了". 这些记载都是拿九九来表示天气寒冷的程度. 在实际上,全年中最寒冷日期,正是处于三九到四九之间,因此现在民间还流传有谚语说道:"三九四九,冻

破茶酒”.又说道:“三九二十七,见火亲如蜜;四九三十六,关住门子把炉守”.至于九九的头一天,应该从哪天起算呢?要答复这个问题,只凭着实际的经验来处理,是得不到解决的.因为气温的升降,每年不尽相同,那么把寒冷日期前后移动几天,都是没有多大关系.若依宗懔的记载九九是从冬至的第二天起算,这个说法,相沿引用,到今已有一千四百年.可是现在有些气象书籍和历书,却载着九九从冬至天起算,那就不免有失古意了.

(6) 九九用于幻方,宋杨辉续古摘奇算法(1275) 载有九九纵横图,就是把1到81的八十一个整数,排成一个方阵形,使每行每列和两对角线诸数的和都是369.

❖十五个女学生问题

3.什么叫做十五个女学生问题?(提出人:夏大焕)

答　十五个女学生问题就是:某女生宿舍里,有学生十五人,规定三人合成一组,每天一起出来旅行,在每次每组中,同伴的人必须不相同,并且每个学生必须和其他的各个同学同组一次,也恰巧只有一次.照这样的旅行法,问该怎样去编组?又至少需要多少天才能做到?

这是一个有名的问题,很不容易得到解答的.经过数学家的研究,得到下面的编组法.在各法中所需要的天数都是一个星期.

第一法:(题中各女生用数目字1到15来表示)

星期日	1,2,5	3,14,15	4,6,12	7,8,11	9,10,13
星期一	1,3,9	2,8,15	4,11,13	5,12,14	6,7,10
星期二	1,4,15	2,9,11	3,10,12	5,7,13	6,8,14
星期三	1,8,10	2,13,14	3,7,4	5,6,9	11,12,15
星期四	1,6,11	2,7,12	3,8,13	4,9,14	5,10,15
星期五	1,7,13	2,4,10	3,5,11	6,13,15	8,9,12
星期六	1,12,13	2,3,6	4,5,8	7,9,15	10,11,14

第二法:

星期日	1,2,5	3,10,12	4,11,13	6,8,14	7,9,15
星期一	1,3,9	2,13,14	4,5,8	6,7,10	11,12,15
星期二	1,4,15	2,3,6	5,7,13	8,9,12	10,11,14
星期三	1,6,11	2,7,12	3,8,13	4,9,14	5,10,15
星期四	1,7,14	2,8,15	3,5,11	4,6,12	9,10,13

星期五　1,8,10　2,9,11　3,4,7　5,12,14　6,13,15

星期六　1,12,13　3,14,15　5,6,9　1,4,10　7,8,11

这个问题,如稍扩大一些,就度成下列问题:

设有 N 个东西,把每三个编成一组,每次有 $\frac{N}{3}$ 组.在每次组中的东西必须不相同,并且每个东西必须和其他的各个东西有一次是同组,也恰巧只有一次.问该怎样编组?并须要多少次数?

令本题所需要的次数是 n,那么应该用怎样的办法,使 N 个东西恰巧组成 n 次?又满足于 N 的必要充分条件是什么?现在都还没有得到解答.

❖e 是什么

4. e(e = 2.71828…)是一个什么数?具有什么性质?是谁先发现的?(提出人:汪关荣)

答　e 是一个超越数,也是一个无理数,是无穷级数表示,得

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

用小数法写出,得

e = 2.718 281 828 459 049 235 360 287 471 352 662 497 757 247 093 699 959
574 966 967 627 724 076 630 335 354 759 457 138 217 852 876 642 742
746 639 193 200 305 992 181 741 359 662 904 357…

现在这个数用真空管计算机已算到小数点后 2 010 位.

e^x 叫做指数函数,$\ln x$ 叫做对数函数.指数函数是对数函数的反函数.对数函数可表示为下列的积分

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

e 具有几个意义非常重大的性质如下:

(1) 自然对数

在代数学的对数领域里,e 占着极重要的位置.

苏格兰人纳皮尔(1550—1617)选择 e 作为对数的底,便创立了自然对数.为什么纳氏要选择 e 作为对数的底呢?我们从下列的例题,可以说明这个问题.

实际上　$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

例:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

取 $y=\frac{1}{x}$，得 $x=\frac{1}{y}$；当 $x\to0$ 时，$y\to\infty$.

所以

$$\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\ln\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=1$$

(2) 常用对数与自然对数：

由 $N=a^x$，得

$$\log_a N=x\text{ 或 }N=a^{\log_a N}$$

在自然对数里，取 e 作底，得

$$\ln N=\log_a N\cdot\ln a$$

所以
$$\log_a N=\frac{1}{\ln a}\ln N$$

当 a 固定时，$\frac{1}{\ln a}$ 是一个常数. 于是得出结论：用任意数作底的对数，是等于这个数的自然对数乘以一个常数.

在常用对数里，取 10 作底，得

$$\lg N=\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln N$$

式中
$$\frac{1}{\ln 10}=\mu=0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 9\cdots$$

这是一个从自然对数化为常用对数的一个常数，称作常用对数的对数率，或称常用对数的模.

自然对数亦称变曲线对数. 因为它与等边双曲线及其渐近线间所夹的面积有关系.

(3)e^x 的微商

$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

因为 $e^h=1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots$，得

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\cdots\right)-1}{h}=\lim_{h\to0}\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\right)=1$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x}=e^x$$

(4)$\ln x$ 的微商

令 $y=\ln x$，得

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{x}\right)=$$

$$\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

令 $n=\frac{x}{h}$,得

$$\frac{h}{x}=\frac{1}{h}$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

e是这样发现的.步吉于1603年至1611年间,作成"算术及几何级数表"(Arithmetische and Geometrische Progress—Tabuln),那个表的组成如下:对于一系列的数 $x_n=10n$,作另外一系列的数 y_n,在此 $y_n=10^8$,其后每个数 y 都较前者多万分之一,即

$$y_{n+1}=y_n+\frac{y_n}{10\ 000}=y_n\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$$

这样,x_n 成为算术级数,y_n 成为等比级数,其公比为1.000 1,而

$$y_n=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{\frac{x_n}{10}}$$

若令 $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}=1.000\ 1^{10\ 000}=\beta$,得

$$y_n=10^8\cdot\beta^{\frac{x_n}{10^5}}$$

故
$$x_n=10^5\log_\beta\left(\frac{y_n}{10^8}\right)$$

从而可知步吉的表是以 $\beta=2.718\ 145\ 926$ 为底的对数表.不过他的表迟至1620年才刊行.在这个时期之前,纳皮尔于1614年已印行有自然对数表(Miritici Logarithmorum Canonio deseriptio),因此一般人就认为自然对数是纳氏所发现的.又用e来表示自然对数的底是1728年欧拉(Euler)首先使用的,e字是欧姓的第一个字母.

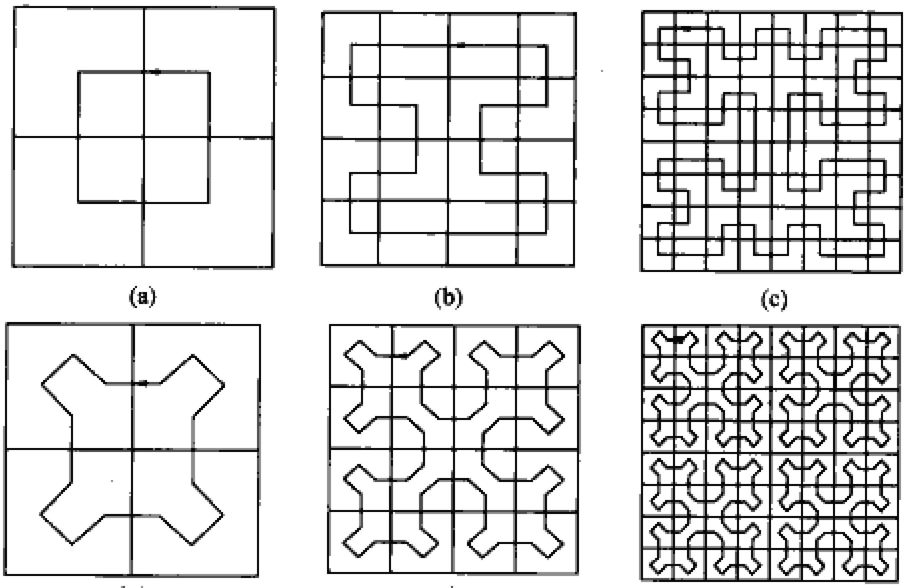
❖一笔画

5.用一笔画的曲线,能不能够填满一个有穷的平面?(提出人:程基沛)

答　为简单起见,假定一个有穷的平面是一个平方形,我们用一笔画的曲

线,要把它填满,经过的步骤如下.

首先把方形分成四块,画一个首尾相连的多边形,如图2(a)((a′))所示.把图2(a)((a′))的每块各分做四块,使全方形为$4^2=16$块,联结四块像图22(a)((a′))的图形画,画成图2(b)((b′)).再细分方形为$4^3=64$块,画成图2(c)((c′)).以后继续地细分方形,并且重复地画下去.



(a) (b) (c)

(a′) (b′) (c′)

图2

这样所画的图形趋近于一个极限,这个极限就是通过正方形内所有诸点的一笔画曲线.可是要实际画出这样的图形是不可能的事.这是表示画图只能趋近于极限,但决不能达到极限的重要区别.

1956年1月号小知识解答者名单

解答第2,3,4,5题者:上海继光中学高三甲数学小组.

解答第1,2,4题者:喻畯.

解答第1,3,4题者:卢沛鎏.

解答第2,3,4题者:裘宗沪,俞忠元,麦卓文.

解答第1,3题者:华永一.

解答第3,4题者;廖佛寿,张国定.

解答第4,5题者:薛梵.

解答第1题者:邬思,于汝强,徐云鹤,曾溢滔,龚克奎,张相辅.

解答第2题者:龙祝夷.

解答第3题者:王鸣,郑玮.

解答第4题者:马丁园,曾繁远,介遵道,李士彰,棣彰华,姚国宝,张畛寰,乐伟达,丁大吉.

1956年2月号问题答案

❖四人分酒

1. 有一斤酒，装在两个容量都是半斤的瓶子里. 今用一只容量恰好是三两的杯子把酒均分给四人吃，问该怎样分法？（提出人：浙江嘉兴吴良芝）

解 设两个瓶子为甲，乙；四人为 a,b,c,d.

先从乙瓶中，用杯子量出了3两给 a 吃. 又从乙瓶中用杯子量出3两，把乙瓶剩下的2两给 b 吃. 将杯子的3两倒入乙瓶，从甲瓶经过杯子倒3两入乙瓶中，这时乙瓶有6两酒. 又从甲瓶用杯子再量3两倒入乙瓶，但乙瓶容量是8两，故剩下1两于杯中给 a 吃，将甲瓶剩下的2两倒入杯中，又从乙瓶倒出1两于杯中，再将杯中的3两倒入甲瓶. 从乙瓶经过杯子倒3两于甲瓶，于是甲瓶有6两酒. 又从乙瓶用杯子量出3两，将乙瓶留下的1两给 c 吃. 将杯中的3两倒入甲瓶，但因甲瓶容量是8两，于是又留下1两于杯中给 d 吃. 甲瓶还有8两，用杯子量出两个3两分给 c,d 两人吃. 最后甲瓶还剩下2两给 b 吃. 这样酒便均分完了.

上面的解释，也可列式如下：（式中写出各次的先后. 每次以第一字表示甲瓶中的量，第二字表示乙瓶中的量，第三字表示杯中的量. 各字下有附标的，表示某人所吃的量.）

(1)880，853_a，82_b3，830，533，560，263，281_a，082，073，370，343，640，61_c3，801_d，503_c，2_b03_d.

(2)880，853_a，82_b3，830，533，560，263，281_c，082，073，370，343，640，61_d3，801_a，503_c，2_b03_d.

(3)880，853_a，82_b3，830，533，560，263，281_c，082，073，370，343，640，811_a，513，54_d0，2_b03_c.

(4)880，853_a，82_b3，830，533，560，263，281_c，253，073，370，343，640，61_a3，801_d，503_d，2_b03_c.

(5)880，853_a，82_b3，830，533，560，263，281_c，253，073，370，343，640，61_a3，801_d，503_c，2_b03_d.

注 本题只用两个瓶子和一个杯子，此外并不需要其他的饮具，就能把酒

分给四个人吃.

上列的五种分法,无论用哪种方法,都能均分酒量.

❖指数方程

2. 试解方程:$x^{x^2-1}=3$.(提出人:广东大埔高陂方丁)

解 设 $x=\sqrt{y}$(x 可为有理数或无理数),$x^2=y$,故原方程变为 $\sqrt{y}^{\,y-1}=3$,即 $y^{y-1}=3^{3-1}$,因此 $y=3$,即 $x^2=3$,所以 $x=\pm\sqrt{3}$.

以 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ 代入原方程均合,故本题的解答有两个,即 $x=\sqrt{3}$ 及 $x=-\sqrt{3}$.

❖卖苹果

3. 甲乙两小贩售出不同数量的苹果,所得的钱数相同.假若甲依乙价售出,得钱为8角,若乙依甲价售出,得钱为1元2角5分.已知乙比甲多有的苹果数是方程

$$x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$$

之根的3倍,问甲乙各有苹果若干?(提出人:江苏南通 李大耀)

解 依题意,x 的值只能为整数,不能为负数,小数或无理数.取对数 $\sqrt{x}\lg x=x\lg\sqrt{x}$,即 $\sqrt{x}\lg x=\frac{x}{2}\lg x$,即 $\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)\lg x=0$.由 $\lg x=0$ 得 $x=1$;由 $\sqrt{x}-\frac{x}{2}=0$ 得 $x=\frac{x^2}{4}$,即 $x^2-4x=0$,所以 $x=4$($x=0$ 不合理).故知乙比甲所多的苹果是3个或12个.

设甲有苹果为 y 个,那么乙有苹果为 $y+3$ 个或 $y+12$ 个.设甲每个的苹果价为 a 分,乙的为 b 分,就得两个方程组:

$$(\text{I})\quad\begin{cases}ay=b(y+3) & ①\\ a(y+3)=125 & ②\\ by=80 & ③\end{cases}$$

$$(\text{II})\quad\begin{cases}ay=b(y+12) & ④\\ a(y+12)=125 & ⑤\\ by=80 & ⑥\end{cases}$$

在组(Ⅰ)中,由③得 $b=\frac{80}{y}$,由①得 $a=\frac{b(y+3)}{y}$,代入②得

$$\frac{80}{y^2}(y+3)^2=125$$

即 $16(y^2+6y+9)=25y^2$,即 $9y^2-96y-144=0$,即 $3y^2-32y-48=0$,即

$$(y-12)(3y+4)=0$$

所以 $y=12$.由此得甲的苹果是 12 个,乙的是 15 个.

在组(Ⅱ)中,由⑥得 $b=\frac{80}{y}$,由④得 $a=\frac{b(y+12)}{y}$,代入⑤得

$$\frac{80}{y^2}(y+12)^2=125$$

即 $16(y^2+24y+144)=25y^2$, 即 $9y^2-16\times24y-16\times144=0$, 即 $3y^2-128y-728=0$,即

$$(y-48)(3y+16)=0$$

所以 $y=48$.由此得甲的苹果是48 个,乙的是 60 个.

注 上列两组解答,都适合于题意.在组(Ⅰ)中,得 $a=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$,$b=\frac{20}{3}=6\frac{1}{3}$;在组(Ⅱ)中得 $a=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$,$b=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.这样所得的苹果价虽都为分数,但是可以解释的.即在组(Ⅰ)中,甲的苹果是每三个售价二角五分,乙的是每三个价二角.在组(Ⅱ)中,甲的苹果是每十二个售价二角五分,乙的是每三个价五分.

❖三角形——性质

4.设 $\triangle ABC$ 的各边 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$.今在边上取两点 A',B',令 $AA'=A'B'=B'B=\frac{AB}{3}$.试证:

(1)设 $B'C=\alpha$,$A'C=\beta$,得$\frac{a^2-b^2}{\alpha^2-\beta^2}=3$(图 1(a)).

(2)若 $\angle ACB=90°$,得 $9(\alpha^2+\beta^2)=5c^2$(图 1(b)).(提出人:陕西渭南 田增伦)

证 (1)$\alpha^2+\beta^2=2\left(\alpha^2+\frac{c^2}{9}\right)$,即

$$\alpha^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{c^2}{9}$$

$$b^2+\alpha^2=2\left(\beta^2+\frac{c^2}{9}\right)^2$$

即
$$\beta^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{9}$$

所以 $2(\alpha^2 - \beta^2) = \beta^2 - \alpha^2 + a^2 - b^2$，所以 $\frac{a^2 - b^2}{\alpha^2 - \beta^2} = 3$.

(2) α 为 $\triangle A'CB$ 中 $A'B$ 上的中线，得
$$a^2 = \alpha^2 + \frac{c^2}{9} + 2B'B \cdot B'D = \alpha^2 + \frac{c^2}{9} + \frac{2c}{3} \cdot B'D$$

β 为 $\triangle ACB'$ 中 AB' 上的中线，得
$$b^2 = \beta^2 + \frac{c^2}{9} + 2A'A \cdot A'D = \beta^2 + \frac{c^2}{9} + \frac{2c}{3} \cdot A'D$$

所以
$$a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{2c^2}{9} + \frac{2c}{3} \cdot \frac{c}{3} = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{4c^2}{9}$$

但 $a^2 + b^2 = c^2$，所以 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{5c^2}{9}$，所以 $9(\alpha^2 + \beta^2) = 5c^2$.

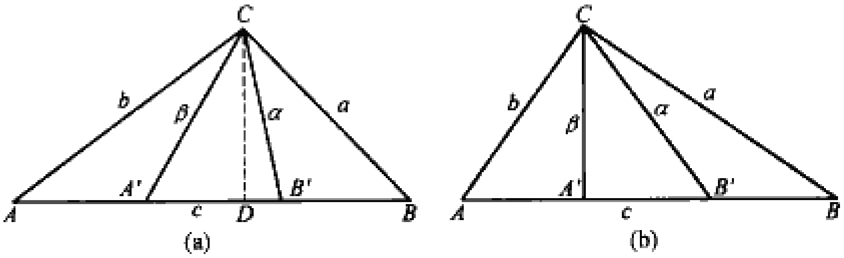


图 1

❖正弦级数

5. 求幂级数：$1 + 2\sin x + 3\sin^2 x + 4\sin^3 x + \cdots + n\sin^{n-1} x + \cdots$

式中 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.（提出人：广东中山 郑鉴杰）

解 令
$$S_n = 1 + 2\sin x + 3\sin^2 x + \cdots + (n-1)\sin^{n-2} x + n\sin^{n-1} x$$
$$\sin x \cdot S_n = \sin x + 2\sin^2 x + 3\sin^3 x + \cdots + (n-1)\sin^{n-1} x + n\sin^n x$$
$$(1 - \sin x)S_n = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots + \sin^{n-1} x - n\sin^n x =$$
$$1 - n\sin^n x + \frac{\sin x(1 - \sin^{n-1} x)}{1 - \sin x}$$
$$S_n = \frac{(1 - n\sin^n x)(1 - \sin x) + \sin x(1 - \sin^{n-1} x)}{(1 - \sin x)^2} =$$

$$\frac{n\sin^{n+1}x-n\sin^n x-\sin^n x}{(1-\sin x)^2}+\frac{1}{(1-\sin x)^2}=$$

$$\frac{n\sin^2 x}{\sin x-1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{(1-\sin x)^2}$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\sin^n x}{\sin x-1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{(1-\sin x)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)$$

在这式中,若取 $x=\frac{\pi}{2}$,$n\to\infty$,得 A_n,B_n 的分母都为零,这时 S 没有意义.若取 $x=-\frac{\pi}{2}$,$n\to\infty$,得 A_n 可为 $+\infty$ 及 $-\infty$ 两值,这时 S 没有确定的极限.

只有当 x 取下列的数值时:$-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,得 $S=\frac{1}{(1-\sin x)^2}$.

注 (1)当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时,原级数变为 $1-2+3-4+5-6+\cdots$.这式如取1项,得数值为1;取2项,得和为 -1;取3项,得和为2;取4项,得和为 -2;取5项,得和为3;取6项,得和为 -3;取7项,得和为4;取8项,得和为 -4;……

由此可见这个级数,如取很多的奇数项,得和为很大的正数;如取很多的偶数项,得和为很大的负数.像这样的级数,在高等数学内,根据赛萨罗(Cesaro)的公式,得和为$\frac{1}{4}$.又若于上面 $S=\frac{1}{(1-\sin x)^2}$ 式中,以 $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$ 代入,亦得数值为$\frac{1}{4}$.读者如要知道舍氏详细算法,可参阅法国数学公报(Bulletin des Sci. Math.)第二集十四卷第114面.

(2)当 $x=0$ 时,原级数只剩下第一项,得数值为1.

(3)当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,原级数的开首八项是

$$1,1,\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{15}{16},\frac{3}{16},\frac{7}{64},\frac{1}{16}$$

这里各项与其次项的比分别为

$$1,\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{5}{8},\frac{3}{5},\frac{7}{12},\frac{4}{7}$$

除第一数外,其余都小于1.这个无穷级数之和,依着上式为$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4$.但这级数开首八项之和,已经是$3\frac{59}{64}$,其余从第九项起,所有无穷项之和只有$\frac{5}{64}$.考其第十项为$\frac{5}{256}$,第十一项为$\frac{11}{1\,024}$,可知项数越居后,所得的值也越小.

(4) 当 $x=\pm\frac{\pi}{6}$ 时,原级数的开首八项是

$$1,\ -1,\frac{3}{4},-\frac{1}{2},\frac{5}{16},-\frac{3}{16},\frac{7}{64},-\frac{1}{16}$$

这里如取绝对值,各数都依次减少.且各项与其次项的比,除第一比外,都小于1.这个无穷级数之和,依着公式亦得数值为4.

1956年2月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:孙基强,龚介民,上海延安中学高二丙班数学小组,吴良芝,马慎余,程海杰,陈亚文,汤正谊,过伯祥,汪裕民,李肇泰,施裕焱,卢美与,李宝淦,辛开河,马俨,黄远视,林基资,徐孝舜,曾卢湘,孙纯生,汪金锠.

解答第1,2,3,4题者:叶秀明,程基沛,张国定,葛元冲,张钦宜,陈玉樾,王绍舜,刘相和,胡东强,姚国宝,喻正元,肖嗣尧,杨永靖,楼宇同,翁成雄,上海市上海中学高三(5)数学组,刘大常,彭承衡,饶光度,张儒瑞,徐元钟,秦耀堂,朱振华,柯福堂,潘秉仪,石德富,倪师孔,倪雍孔,林宜中,金安寿.

解答第1,2,4,5题者:邵锡彬,李安全,湖南湘乡一中数学教研组,王升润,吕远仁,程家骅,纪汉光,石啸生,张长甲,吴育斌,邬思.

解答第1,3,4,5题者:杨祥谱,汪壶君,杨泽,重庆建筑工程学校数学学科委员会,洪毅,江苏省南菁中学高三数学研究小组,张立,张中和.

解答第2,3,4,5题者:宋麟范,陈炳盛.

解答第1,2,3题者:刘慧,上海和平中学高三(2)数学小组,陆森,李善同,华士俊,潘咸桉,孙承贤,孙承德,林乐善,郭秉正.

解答第1,2,4题者:袁先寿,龙运佳,王起凤,张禄度,上海行知中学高二X数学小组,思辑,秦端六,郑万嵩,王柏坚,柯斯年,王传祉,龙文俊,杭耀光,杨国培,王印杰,方傅仁,严鸿泰,严鸿山,文如庆,喻畯,赵省三,徐秉超,江苏盐城中学高二甲数学爱好者小组,王雪生,杨又芬,湘潭如意补习学校数理组,李华康,忻华泰,徐仁茂,杨铎,孙桓,杨振山,孙锦华,周国銮,田果仁,赵普德,许自荣,王宝翰,胡耀堂,何俊若,彭公志,王银常,李锦廉,谢毓厚,张培忠,王金桃,余泓扬,朱长懋,郑国粱,上海复旦中学高二(三)数学爱好者小组,重庆动力学校数学兴趣小组,华永一,陈学参,周介民,孙义鹄,章思俊,章思楷,黄德谦,黄德存,雨马,郑家祺,江苏与化中学高三乙数学小组,吴振华,马成忠.

解答第1,2,5题者:袁育才.

解答第1,3,4题者:朱成环,赵钊群,梁权成,赵可祥,林国华,梁杰英,邹蓬,蔡鹤,杨大栋,黄又兴,裘明儿,黄克,丁逢彬,钟灿兴,卢振河,周立华,林熙民,冯鸣庄,李德重,潘以德,王重保,王大富,周忠泰,徐士进,包起煜,李嘉祖,姜乃钊,吴天禄,吴刚良.

解答第1,3,5题者:张玮.

解答第1,4,5题者:李兆喜,李金昌,李振坤,闻立经,屠寅,吴咏梅,毕冀远,钟家庆.

解答第2,3,4题者:安心平,刘庆祥,张星辰,杨华雄,戈炳焜,黄树森,吴宗澄,臧朋年,童世祎,棣彰芽,谢元枢,励金华,刘应明,俞文魮,卢沛鎏,浙江新胜镇补习学校,上海七十一中高二(2)科趣小组.

解答第2,4,5题者:文涛,徐君浩.

解答第3,4,5题者:翟世福,王维新,邬廷康,丁木英,方耀森.

解答第1,2题者:罗声雄,梁雄成,徐昉,徐询,温瑞兴,崔世杰,四川大学数学系一年级乙班,范志强,罗宗明,罗忠厚,毛树杰,余延生,于淇.

解答第1,3题者:陈正平,蔡德畲,胡云,吴冠义,和宝龙,麻勃然,孙志坚,王润豪,蔡忠全,龙文林,河南道国完全中学高一乙丙班数学小组,黄佑之,宋永森,胡秀良,朱德生.

解答第2,3题者:汤利亿,裘宝林,朱振寰.

解答第2,4题者:严梦桥,华宇枚,李方钥,李若愚,梁振珊,刘水生,薛祥荣,张梁,孙钢,上海敬业中学华罗庚数学小组,顾益生,侯国强,余以炎,梁惠仁,程汝良,殷士光,吴柱鳌,黄水源,张存寰,张畛寰,王槐钰,范尚武,刘克亮,卜攸成,李国栋,张一球,吴泽藩,达木林扎布,舍布格扎布,却日勒扎布,王元康,陈剑豪,李抗强,林锡珊,林应标,刘家琦.

解答第3,4题者:邱松文,陈静敛,吴益敏,彭祖仁,吴顺唐,易明,张文彦,刘恒基,栾小春,杨连鸿,秦秋君,何文辰,董志荣,李文孙,胡仁元,张文宽,戴锦锟,甘治安,陈业勤,朱平,张凤仞,郑雅琴,杜凤英,徐锦鸿,马国宾,马玉生,汪俊天,叶希孟,王达庆,钱立业,邵青海,刘铣春,麦卓文,黄祖荫.

解答第4,5题者:陈祖浩,于牧王,林哲,张文宽,周持中,戴寿祺.

解答第2题者:朱连喜,邹身坊,赵汉光,韩念国,汪远声,陆寅生,孙瑛,徐国昌,张志,何海宾,曹致德,张述尧,罗来卿,王汉生,李潜锴,胡久稔,陈烈楷,姚珍芝,宋祖和,河北石家庄二中高一数学小组,梁春庆,饶德宏.

解答第3题者:王静华,孙开学,刘镜先,柳光轩,徐知行,罗卓掮,广西武鸣一中数学组,左其义,徐祖毅,李国民,张三驭,刘培浩,阮天恩,宫庆,杨衍机.

解答第1题,第4题,以及第1,4两题的同志超过百人姓名从略.

1956年2月号小知识问题答案

❖航空路线

1.设甲乙两人各坐飞机从北京起飞,甲朝着固定的方向飞往欧洲,乙保持一定的纬度,向东飞行.问他们所走的航空路线,是不是最短的?也是不是笔直的?(提出人:潘阳 许昌顺)

答 甲坐飞机,从北京朝着固定的方向飞往欧洲,他所走的航线,表现在矩形格子的地图上,是一条直线,叫做定向线,亦称斜航线,它和地面上各条经线,保持着一定的角度,看起来,好像是最简单的,但不是最短的航线.因为地球是一个球形,在球面上两地间的最短距离,应该是一段大圆的弧.这种圆弧叫做直航线.若把它画在矩形格子的地图上,却表现为一条弯曲的线段,好像是正弦曲线的样子.

北京的地理位置是在北纬 39°54′23″.乙从那里坐飞机,保持这个纬度向东飞行,所走的航线,实际上是和地面平行.如果他不停地继续前飞,就形成一个圆圈,会回到起飞的地方来,所以那也不是一条笔直的直线.

❖四元与四原

2.问四元与四原有怎样的区别?(提出人:福建仙游 言华英)

答 代数学在我国旧称曰天元术.我国天元术的发明,较西人的代数学早得多.九章算术有衰分和盈不足两章.衰分所讨论的就是配分比例,其中的比率相当于未知数的系数.盈不足是先假定了所求的数,用类似于天元的方法,这可算做天元术的起源.唐王孝通著缉古算经,用有二次或三次方程以解问题.宋秦九韶著数书九章,开始用天元的名称,后世称一元方程,二元方程等的元字,就是从天元的元字得来.

元朱世杰著四元玉鉴(1303),较天元术更进了一步.所谓四元就是以天元,地元,人元,物元代表四个未知数,因此天元术所能解决的问题,用四元术必能解决;天元术所不能解决的问题,用四元术有时也能够解决的了.

四原术是广义代数学的一分科,内容所讨论的是关于空间的量.它的发明经过,有下面一段趣事:

"在空间互相垂直的两线所表现的是什么?"这个问题,早已存在于爱尔兰人哈密尔顿心中有多时了.当四原术还没有发明之前,哈氏常命令他的儿子于每次进餐时,必向他发问说道:"互相垂直的两线相乘,应该怎样的解释呢?"这样做法,是在随时提醒他,催促他,使不要忘却的意思.

1843年10月16日,哈密尔顿和他的爱人散步于都柏林市,经过布洛汉桥.因为他对于那个问题,已苦思了多日,所以当时成功地得到基本的算式如下:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

哈氏对于这个结果,觉得非常高兴,就在桥的石栏边旁,用把小刀刻记这事.嗣后他的儿子又更改那桥的名称,叫做四原桥,作为永远的纪念.

四原术的发明,被称做十九世纪中七大奇物的一个.近世代数受到它的影响很大.1844年又发明了多原术,那就是类似于四元术而更加推广的了.

❖反平行线

3.什么叫做反平行线?(提出人:云南昆明 周报青)

答 设$\triangle ABC$,$\angle A$的两边为AB,AC.于AC上取点c,AB上取点b.令

$$\angle Abc = \angle B, \angle Acb = \angle C$$

那么$\triangle ABC$与$\triangle Acb$叫做反相似.bc称为BC的反平行线,BC亦称为bc的反平行线.

在图1中,四点B,C,b,c是共圆的.因此圆的内接四边形,每两对边都互为反平行线.

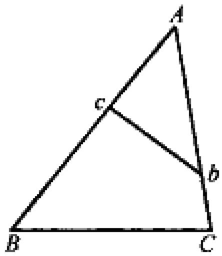


图1

❖狮身女怪问题

4.什么叫做狮身女怪问题?(提出人:广西梧州 萧丰云)

答 在埃及开罗附近,现在还保存着一座用整块岩石雕成的狮身女怪石像,这是四千年前的古物.关于这个女怪有下面的问题:

这女怪抓去了一个娃儿,却对这娃儿的妈妈说道:若她能够猜中这女怪的行动,就可把娃儿还她,不然便不归还.在这样的条件下,我们知道这个娃儿是

永远不会交还的了.因为妈妈如果猜说"女怪会把娃儿交还",那么女怪不交还时,妈妈的猜说便不对,所以女怪可以不把娃儿交还.又妈妈如果猜说"女怪不会把娃儿交还",那么女怪亦不能把娃儿交还,因为如果交还,那么妈妈的猜说便不对,因而女怪亦可不交还的了.这样,无论妈妈猜说交还或不交还,这娃儿总是不会交还的了.

这个问题的复杂处,在于同时有许多关系聚集于一处,本来妈妈的猜说是否正确,和后来女怪的行动有关.同时女怪的行动亦和妈妈的猜说有关,可是关系的联结以及所产生的种种可能性,我们无法把它们列成一个明确的对应概念.但是在我们寻常的想法中,对于其他较简单的事例,以为妈妈的两个猜说中,必有一个可使女怪把娃儿交还,另一个使女怪不交还,实则情形并不是这样简单,所以有矛盾发生了.

本问题的思想状况,用数学形式表出如下:设有一个符号ε,若妈妈猜说"会交还",就在这符号前记以$+1$;若妈妈猜说"不交还",就记以-1.同样,另有一个符号δ,当女怪把娃儿交还,就在符号前记以$+1$;不交还就记以-1.这样,当妈妈猜说对时,ε与δ的正负号相同;当妈妈猜说错时,ε与δ的正负号相异.合起来讲,妈妈猜说对时,$\varepsilon\delta=+1$;猜错时,$\varepsilon\delta=-1$.在前一种情形,女怪把娃儿交还;在后一种情形,女怪不把娃儿交还.这两种情况,在妈妈方面,是以为娃儿交还时,$\delta=+1$;不还时,$\delta=-1$.但在女怪方面所规定的,却是下面一个式子

$$\varepsilon\delta=\delta$$

这式的解释,当妈妈的猜说对,娃儿可以交还,必须$\varepsilon=+1$,且只有这种情况才有可能.但女怪自己所规定的式子,两边含有$\delta=\delta$,是不能用来决定δ的正负的.因此δ的值仍可为$+1$或-1,就是女怪的行动可以自由,丝毫不受任何拘束咧!

❖诺模术

5.诺模术所讲的内容是什么?(提出人:四川奉节公羊珍)

答 诺模术亦称图算法,是数学中用图线以进行计算的一门科学.它所用的图线叫做诺模图,亦称算图.这是一门较青年的数学分科,系法国数学家奥卡涅(Maurice d'Ocagne)于1891年着手研究.他著有诺模学(Traite de nomographie),于1899年刊行.诺模图主要所用的是一些列线图式:如几条平行线,对数尺线,函数尺线,方形线,三角形线,三条或多条曲线,网络图线等.此外还用有很复杂的图线.应用诺模术可以解决一些极其繁杂的方程,就是用诺模

图来表出变数间的对应数值.

苏联对于这科有很大的发展.现今莫斯科大学开设有诺模室,促进这科进展的应该归功于格拉戈列夫(Н.А.Глаголев).此外诺模术学者,还有赫尔舍凡诺夫(Н.М.Герсеванов),安德烈耶夫(П.П.Андреев),波波夫(П.Н.Попов),曼得秀克(А.И.Мандзюк)诸人.

1956 年 2 月号小知识解答者名单

解答第 1,3,4,5 题者:张国定,程基沛.

解答第 2,3,5 题者:麦卓文.

解答第 1,5 题者:曾繁远,陈智贤.

解答第 3,5 题者:龙祝夷.

解答第 1 题者:叶秀明,邬思,四川城口初中几何教师,宋运祁,毕冀还,华永一,潘咸桉,张有紘.

解答第 3 题者:余百龄,王绍舜,丁大吉,臧明年,邵丁,喻畯,赵普德,廖佛寿,朱鑫华,田洁,何俊若,彭承衡,非青,浮萍,远航.

解答第 4 题者:张洛新.

解答第 5 题者:戈炳焜,崔世杰,栾立中,许自荣,陈兴昭.

1956年3月号征解问题答案

❖分油

1. 有三只瓶，各瓶的容量是10 kg，7 kg及3 kg. 今在10 kg的瓶里装满油. 如不用秤要平分它，问该怎样分法？并且有多少种分法？（提出人：程海杰、马慎余）

解法1 这是我国有名的韩信走马分油法问题. 设容量10 kg，7 kg及3 kg的瓶子为 A，B，C.

首先把 A 瓶的油，倒入于7 kg的 B 瓶，又用 C 瓶从 B 瓶里取出油两次共6 kg，转倒入 A 瓶. 这时 A 瓶有油9 kg，B 瓶1 kg. 把 B 瓶的1 kg转到 C 瓶，再从 A 瓶倒满7 kg入 B 瓶. 又把 B 瓶的油灌满2 kg到 C 瓶. 这时 A 瓶有油2 kg，B 瓶5 kg，C 瓶3 kg. 最后把 C 瓶的3 kg倒入 A 瓶，就得 A，B 两瓶恰各有油5 kg，便把油平分成功了.

上面的解释，也可列式如下：（式中写出各次分法的先后. 以第一个数字表示 A 瓶的量，第二个数字表示 B 瓶的量，第三个数字表示 C 瓶的量）

次数 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

- 10,0,0
  - 370
    - 343
      - 640,613
        - 910,901
          - 271
            - 253,550
            - 073,703,730,433,460,163,172,802,820,523,550
          - 703,730,433,460,163,172,802,820,523,550
        - 073,703,730,433,460,163,172,802,820,523,550
      - 073,703,730,433,460,163,172,802,820,523,550
      - 703,730,433,460,163,172,802,820,523,550
    - 073,703,730,433,460,163,172,802,820,523,550
  - 703
    - 703
      - 433
        - 460
          - 163
            - 172
              - 802,820,523,550
              - 370,343,640,613,910,901,271,253,550
            - 073,370,343,640,613,910,901,271,253,550
          - 370,343,640,613,910,901,271,253,550
        - 073,370,343,640,613,910,901,271,253,550
      - 370,343,640,613,910,901,271,253,550
    - 073,730,343,640,613,910,901,271,253,550

就上列的式子看来,可知本题的分油法,共有十四种.又这些式子,如用图1表示更是有趣.

注 在每种分法中,前后动作不要重复.最短的一种只需倒九次.

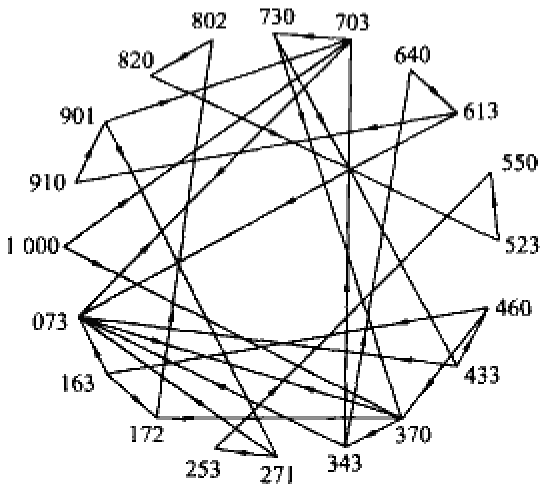


图1

解法2 画一个平行四边形,令一边的长为7以代表7 kg瓶的量,在图上所写的数码是(1),(2),(3),…,(7).另一边的长为3,以代表3 kg瓶的量,在图上所写的数码是〇,一,二,三.把这个四边形分成许多小三角形,以诸斜线代表10 kg瓶的量,在图上所写的数码是0,1,2,3,4,…,10.在这些小三角形的每个角顶都有三个方向,各平行于三角形的各边.我们用这样的图形,从小三角形的某个角顶出发,沿着一边行走,碰到四边形的边缘时就要转弯,再选择另一个方向行走.在折线中从一条线到另一条线的每个线段,用来表示某个瓶里装满着油,或者从那个瓶里将油倒空了.本题的分油法,分做两类情况,说明如下.

(1)若从10 kg瓶里,首先将油倒入7 kg瓶里,用图2.从左下角顶出发,沿着水平方向的边缘走到 a,这是倒法的第一次.在点 a 是表示10 kg瓶里有油3 kg,7 kg瓶里装满有7 kg,3 kg瓶里空着.用上面的表示法就是370.第二次由 a 引折线到 b,在 b 所表示的是343.但第二次亦可由 a 引折线到 b',在 b' 所表示的是073.第三次由 b 引折线到 c,在 c 所表示的是640;亦可由 b 到 b',在 b' 所表示的是073;更可由 b 到 a,在 a 所表示的是703;还可由 b' 到 c',在 c' 所表示的是703.第四次以后的倒法,照样做法.在图中用粗线所表示的,是这类倒法中最简单的一种,只要倒九次.

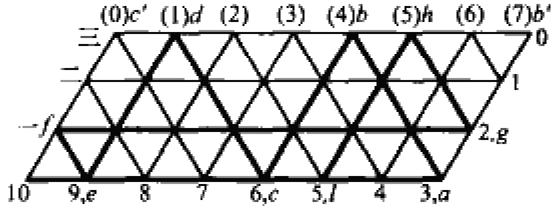


图2

(2)若从10 kg瓶里,首先将油倒入3 kg瓶里,用图3.从左下角顶出发,向着上方的边缘行走,第一次到 a,在 a 所表示的是703.第二次由 a 到 b,在 b 所表

示的是730. 但第二次亦可由 a,到 b',在 b' 所表示的是073. 第三次由 b 到 c,在 c 所表示的是433;亦可由 b 到 c',或者由 b' 到 c',在 c' 所表示的是370. 第四次以后的倒法,照样做法. 在图中用粗线所表示的,是这类倒法中最简单的一种,须要倒十次.

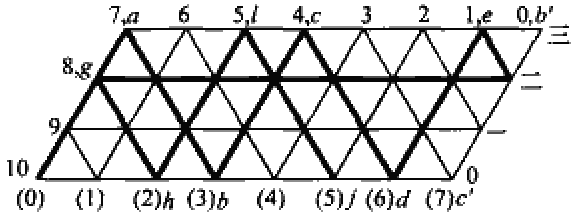


图 3

详细研究上面两个图形,也得到分油法共有十四种.

❖取卡片

2. 有颜色不同的三种卡片,每色各有 A,B,C,D,E 五张. 若每次取出五张,文字各不相同,但三色必须齐备. 问共有多少种取法?(提出人:周英彦)

红	A	B	C	D	E
黄	A	B	C	D	E
绿	A	B	C	D	E

图 4

解法 1 如图 4, 在第一列取一张, 第二列取一张, 第三列取三张, 这样的取法有

$$C_5^1\cdot C_4^1\cdot C_3^3=20(\text{种})$$

在第一列取一张, 第二列取二张, 第三列取二张, 取法有

$$C_5^1\cdot C_4^2\cdot C_2^2=30(\text{种})$$

在第一列取一张, 第二列取三张, 第三列取一张, 取法有

$$C_5^1\cdot C_4^3\cdot C_2^1=20(\text{种})$$

所以在第一列取一张的取法共有

$$C_5^1(C_4^1\cdot C_3^3+C_4^2\cdot C_1^1+C_4^3\cdot C_1^1)=70(\text{种})$$

同理, 在第一列取二张的取法共有

$$C_5^2(C_3^1\cdot C_2^2+C_3^2\cdot C_1^1)=60(\text{种})$$

在第一列取三张的取法共有

$$C_5^3\cdot C_2^1\cdot C_1^1=20(\text{种})$$

上面这些取法, 对于各列的元, 机会都是相同的. 故知本题的解答为

$$70+60+20=150(\text{种})$$

解法 2 设每次取 5 张不同文字的卡片, 不论颜色, 应有

$$C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1=243(\text{种})$$

但这样的取法,有些是不合题意的.这里面有些取法是5张卡片颜色完全相同;有些5张卡片,颜色只有两种,所以应该把这些不合题意的取法减掉.

5张卡片颜色相同的,有3种取法.

5张卡片颜色是两样的,有两种情况:(a)其中四张颜色相同,另外一张是别样的颜色,这种情况的取法有

$$C_3^1\cdot C_5^4(C_1^1+C_1^1)=3\times5\times2=30(\text{种})$$

(b)其中三张颜色相同,另外两张是别样相同的颜色,这种取法有

$$C_3^1\cdot C_5^2(C_1^1+C_1^1)=3\times10\times2=60(\text{种})$$

故合乎题意的取法共有

$$243-(3+30+60)=150(\text{种})$$

解法3　从一色中取三张不同文字的卡片,再从其他两色中各取一张不同文字的卡片,这样取法有

$$C_5^3\cdot C_3^1\cdot C_2^1=60(\text{种})$$

从两色中,各取二张不同文字的卡片,再从另一色中取一张与前不同文字的卡片,这样取法有

$$C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_3^1=90(\text{种})$$

故合乎题意的取法共有

$$60+90=150(\text{种})$$

❖四边形一个性质

3.如图5,在四边形$ABCD$的各边AB,BC,CD,DA上,分别取四点E,F,G,H.使$\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{CG}{GD}=\frac{DH}{HA}=\frac{m}{n}$.求证:$\frac{S_{\text{四边形}EFGH}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$.(提出人:孙钢)

解　因为$\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n},\frac{DH}{HA}=\frac{m}{n}$得

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AE}{AE+EB}=\frac{m}{m+n}$$

$$\frac{AH}{AD}=\frac{AH}{AH+HD}=\frac{n}{m+n}$$

$$\frac{S_{\triangle AEH}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AE\cdot AH}{AB\cdot AD}=\frac{mn}{(m+n)^2}$$

所以

$$S_{\triangle AEH}=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot S_{\triangle ABD}$$

同理

$$S_{\triangle CGF}=\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot S_{\triangle CDB}$$

$$S_{\triangle AEH}+S_{\triangle CGF}=\frac{mn}{(m+n)^2}(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CDB})=$$

$$\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot S_{四边形ABCD}$$

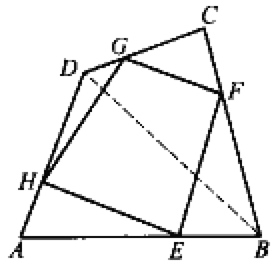


图 5

所以

$$\frac{S_{\triangle AEH}+S_{\triangle CGF}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{mn}{(m+n)^2}$$

同理

$$\frac{S_{\triangle BFE}+S_{\triangle DHG}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{mn}{(m+n)^2}$$

将上两式相加得

$$\frac{S_{\triangle AEH}+S_{\triangle CGF}+S_{\triangle BFE}+S_{\triangle DHG}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$$

依分比定理得

$$\frac{S_{四边形ABCD}-(S_{\triangle AEH}+S_{\triangle BFE}+S_{\triangle CGF}+S_{\triangle DHG})}{S_{四边形ABCD}}=\frac{(m+n)^2-2mn}{(m+n)^2}$$

所以

$$\frac{S_{四边形EFGH}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}.$$

❖走遍二十面体的棱

4.有一个正二十面体，棱长为 a m.今从一个角顶出发，要走遍各棱，问最少须走多少米?(提出人:柳光轩)

解法1 正二十面体有20个面，12个角顶，30条棱.在12个角顶中，若从一个角顶出发，每条棱不走两次，要走遍各棱，依照棱数计算，所走的路程是 $30a$ m.但在实际上，无论如何都不能走遍各棱，最多只能经过25条棱.如图6，从 A 走到 E，在中途所不能走到的各棱，如图6中双线所表示的，即 IC，JF，LH，KG，BD 五棱.若把这五条棱除外，其他25条棱，只经过一次是可以走遍的，走

法的顺序如下：

AB, *BC*, *CD*, *DE*, *EC*, *CF*, *FE*, *EG*, *GD*, *DH*, *HB*, *BI*, *IA*, *AJ*, *JI*, *IF*, *FK*, *KJ*, *JL*, *LG*, *GH*, *HA*, *AL*, *LK*, *KE*.

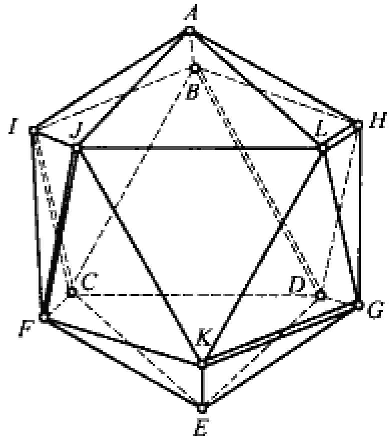
照这样的走法，所经过的路程是 25*a* m.

今要走遍各棱，须把那除外的 5 条棱插入，并且在那些棱上各走两次，走法的顺序如下：

AB, *BC*, *CI*, (*IC*), *CD*, *DB*, (*BD*), *DE*, *EC*, *CF*, *FE*, *EG*, *GK*, (*KG*), *GD*, *DH*, *HL*, (*LH*), *HB*, *BI*, *IA*, *AJ*, *JF*, (*FJ*), *JI*, *IF*, *FK*, *KJ*, *JL*, *LG*, *GH*, *HA*, *AL*, *LK*, *KE*.

这里在括弧内所表示的是插入的 5 条棱. 故本题最少所走的路程是

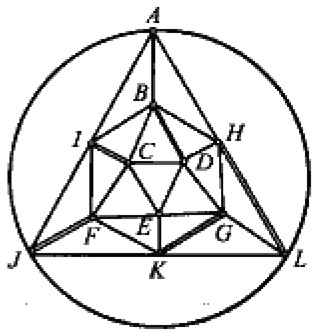
$$25a\ \text{m} + 2\times 5a\ \text{m} = 35a\ \text{m}$$



二十面体图

图 6

解法 2　本题在数学上是一个一笔画问题. 若从一个角顶出发，到另一个终点，通过这两角顶的棱数可为奇数. 其他十个角顶，是中途路过的顶点. 通过这十个角顶，每个角顶的棱数就必须为偶数，这样才不会有棱是走过两次的. 但在实际上，通过每个角顶的棱数是 5 条，故通过这十个角顶每个顶点的 5 条棱中，须有一条要走过两次，且走过两次的棱中没有一条与出发点或终点相连. 这样只需有 5 条棱走过两次，就能走遍各棱使所走的路程为最短. 如从 *A* 出发要走到 *E*，所经过的路程顺序如下：



二十面体变形图

图 7

AI, *IJ*, *JA*, *AL*, *LH*, *HA*, *AB*, *BI*, (*IJ*), *JL*, (*LH*), *HB*, *BC*, *CI*, *IF*, *FJ*, *JK*, *KL*, *LG*, *GH*, *HD*, *DB*, (*BC*), *CF*, *FK*, *KG*, *GD*, *DC*, *CE*, *ED*, (*DG*), *GE*, *EK*, (*KF*), *FE*.

即本题最少所走的路程是 35*a* m.

解法 3　正二十面体有 30 条棱，12 个角顶. 每个角顶都有五条棱聚合在一起，所以它们都是奇点. 我们知道 $2n$ 个奇点的图形，须要 n 笔才能画成. 本题有 12 个角顶，得 $12=2n$，所以 $n=6$. 因此六笔才能画成. 故在图 7 上，可把某五条棱看成是二条重复的棱拼合在一起的. 这样的五条棱通过各不相同的十个角顶(当然选择各棱的方法很多). 如从 *A* 出发要走到 *E*，走法的顺序如下：

AI, *IJ*, *JA*, *AL*, *LJ*, (*JL*), *LH*, *HB*, (*BH*), *HA*, *AB*, *BI*, *IC*, (*CI*), *IF*, *FJ*, *JK*, *KF*, (*FK*), *KL*, *LG*, *GD*, (*DG*), *GH*, *HD*, *DB*, *BC*, *CF*, *FE*, *EK*, *KG*, *GE*, *ED*, *DC*,

CE.

共 35a m.

解法 4 正二十面体有 12 个角顶,每个角顶聚合看五条棱,都叫做奇点.除出发点与终止点可为"奇点"外,其他十个奇点都有棱联结着.若在一条棱上走两次,就意味着奇点数减少两个.因此若在五条棱上都走两次,便把那十个奇点统统取消了,本题如从 A 出发要走到 E,走法的顺序如下:

AI, IF, FC, CD, DG, GK, KF, (FI), IJ, JL, LH, HB, BI, IC, CB, BD, DH, HG, GL, LK, KJ, JF, FE, EK, (KJ), JA, AL, (LG), GE, ED, (DH), HA, AB, (BC), CE.

共 35a m.

解法 5 如从 A 要走到 E,走法的顺序如下:

AJ, JI, IA, AB, BH, HA, AL, LH, HG, GD, DH, (HB), BD, DC, CB, BI, IC, CF, FI, (IJ), JF, FK, KJ, JL, LK, KG, GL, (LG), GE, ED, (DC), CE, EF, (FK), KE.

共 35a m.

解法 6 如从 A 要走到 G,走法的顺序如下:

AB, BD, DE, EK, KJ, JA, AH, HG, GE, EF, FI, IA, AL, LK, (KE), EC, CB, BI, IJ, JF, FC, CD, DG, GK, KF, (FC), CI, (IJ), JL, LH, HB, (BD), DH, (HL), LG.

共 35a m.

解法 7 如从 A 要走到 F,走法的顺序如下:

AI, IJ, JA, AL, LH, HA, AB, BI, IF, FJ, JL, LG, GH, HB, BC, CI, (IC), CE, EF, FC, CD, DB, (BD), DE, EG, GD, DH, (HC), GK, KE, (EK), KL, (LJ), JK, KF.

共 35a m.

解法 8 如从 A 要走到 H,走法的顺序如下:

AI, IJ, JA, AL, LJ, JK, KL, (LK), KF, FJ, (JF), FI, IC, CF, FE, EK, KG, GL, LH, HA, AB, BI, (IB), BC, CD, (DC), CE, EG, (GE), ED, DB, BH, HD, DG, GH.

共 35a m.

解法 9 如从 A 要走到 H,走法的顺序如下:

AJ, JI, IA, AB, BI, IF, FC, CI, (IF), FJ, JK, KF, FE, EC, CB, BD, DC, (CE), EK, (KJ), JL, LK, KG, GL, LH, HG, GE, ED, DG, (GL), LA, AH, HB, (BD), DH.

共 35a m.

解法 10 如从 A 要走到 B,走法的顺序如下:

AJ, JL, LA, AI, IJ, JK, KL, LH, HA, AB, BI, IF, FJ, (JF), FK, KG, GL, (LG), GH, HB, BC, CI, (IC), CF, FE, EK, (KE), EG, GD, DH, (HD), DE, EC, CD, DB.

共 35a m.

解法 11 如从 A 要走到 B,走法的顺序如下:

AH, HL, LA, AB, BH, HG, GL, (LH), HD, DG, GE, EK, KG, (GD), DE, EF, FC, CE, (EK), KF, FI, IJ, JF, (FC), CI, IA, AJ, JK, KL, LJ, (JI), IB, BC, CD, DB.

解法 12 如从 B 要走到 A,走法的顺序如下:

BD, DC, CB, BH, HD, DE, EC, CT, IJ, JA, AI, (IJ), JL, LK, KJ, JF, FK, KG, GL, LA, AB, BI, IF, FC, (CF), FE, EK, (KE), EG, GD, (DG), GH, HL, (LH), HA.

共 35a m.

解法 13 如从 D 要走到 C,走法的顺序如下:

DC, CE, ED, DG, GE, EK, KG, GL, LK, KJ, JL, LA, AH, HL, (LG), GH, HD, DB, BH, (HB), BA, AI, IB, BC, CF, FE, (EK), KF, FJ, JA, (AI), IJ, (JF), FI, IC.

共 35a m.

注 本题若推广到五个正多面体上的走法,设每条棱的长还是 a m,从一个角顶出发,要走遍各条棱,那么求得最少所走的米数列下:

正四面体(4 角顶,6 棱,每角有 3 棱)是 7a m;

正六面体(8 角顶,12 棱,每角有 3 棱)是 15a m;

正八面体(6 角顶,12 棱,每角有 4 棱)是 12a m;

正十二面体(20 角顶,30 棱,每角有 3 棱)是 39a m.

❖正弦函数的积

5.若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,求证:$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$(提出人:陈容,李大耀)

解法 1

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]$$

因为 $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$ 及 $\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\geqslant 0$,所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

解法 2 $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$

$$-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

在这式中,设 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\gamma}{2}$ 为定值时,$\sin\frac{\gamma}{2}$ 也为定值,故要使上式为极大,必须 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 为极大,即 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1$,所以 $\alpha-\beta=0$,即 $\alpha=\beta$.

同理,设 $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ 为定值时,要使上式为极大,必须 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$,因此将上式的极大值为 $\sin^3 30^\circ=\frac{1}{8}$,所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

解法 3 设 α,β,γ 为原三角形的内角,它们的对边分别为 a,b,c.

因为

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(b-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

式中

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=$$
$$\frac{1}{8}\cdot\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}$$

在原三角形中,令 $a=b=c$ 都等于 d,得

$$b+c-a=a+c-b=a+b-c=d$$

于是

$$\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}=\frac{d^3}{d^3}=1$$

将这个值代入上式,得

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{8}$$

在原三角形中,令 $a\neq b\neq c$,得

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)<abc$$

即
$$\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}<1$$

即
$$\frac{1}{8}\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}<\frac{1}{8}$$

即
$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{8}$$

总结上面两式,所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

解法 4 设 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径,γ 为内切圆半径,OI 为外心 O 与内心 I 的连线,得 $\overline{OI}^2=R^2-2Rr$.

当 $OI=O$,即 $\triangle ABC$ 为正三角形时,得 $\frac{R}{r}=2$,也就是 $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$,又依公式 $r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$,即

$$\frac{r}{4R}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

由上面知道 $\frac{r}{4R}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ 为极大值,所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

1956年3月号问题征解解答者名单

解答第2,3,4,5题者:龙运佳,过伯祥,蓝毓伟,付其生,刘全彬,常继慈,上海延安中学高二丙班数学小组,叶秀明,汤玉谊,张麟书,马慎余,程海杰,陈亚文,施裕淼,龚介民,肖嗣尧,马殿荣,杨祥谱,汪壶君,朱企曾,重庆建筑工程学校数学学科委员会,丁斗南,孙植,孙振山,袁育才,朱冠章,曾庐湘,吴良芝,徐孝舜,郑守璋,朱恩铭,上海七十一中学约里奥居里物理学习小组.

解答第2,3,4题者:吴冠义,陶尊光,陈荣基,马润尧.

解答第2,3,5题者:赵钊群,程薰,袁先寿,孙坤保,李维亮,丁达夫,梁杰英,王柏坚,汪裕民,屠寅,吴咏梅,梁振珊,刘广祥,黄远视,皮禹廷,王雪生,杨又芬,孙镜明,王祝然,张立,文如庆,赵可祥,林国华,杨庆铎,刘家琦,吴宗澄,邹葵心,章德华,宋彭生,华南师院附中高一红色数学研究小组,刘相,太伟,刘继钧,张国清,忻华泰,张南岳,江西临川中学数学爱好者小组.

解答第2,4,5题者:杭耀光,于淇,黄佑之.

解答第3,4,5题者:王汉生,程家骅,纪汉光,柳光轩,王升润,王于牧,上海和平中学高三(2)数学小组,封继康,舒鼎荣,吴泽藩,黄奇伦,钟丞,冯鸣庄,戴寿祺,俞文鲵.

解答第2,3题者:彭超宇,黄人杰,谢家杭,刘大敦,陈朝瑞,黄树森,樊金魁,徐自新,刘卫民,朱成环,黄鹏程,王富威,叶德畲,董晓春,棣彰芽,吴文中,石啸生,朱湘南,韩绍辉,葛元冲,吴家驹,陈俊本.

解答第2,4题者:胡晖,毕冀还.

解答第2,5题者:严梦桥,吴方成,黄家骏,王连桢,文俊明,周寄石,余正明,寿纪麟,彭公誌,洪毅,林乐善.

解答第3,4题者:万荣成,钱履华,刘元甫,陈玉樘.

解答第3,5题者:王槐钰,范尚武,封辅智,贾彦宾,钱建中,臧朋年,罗以勤,浦玉泉,戈炳崐,江荣禧,王明亮,浦祖康,丁木英,张禄度,陆泰良,戴嘉范,周邦煊,陈泰元,朱孝钧,杨泽,何俊若,吴益敏,汤利亿,祝酉,吕烈翰,程国斌,段树声,楼宇同,马介飞,孙志杰,刘水生,胡昭煌,张闰生,林沛霖,卢振河,钟灿兴,安心平,黄水源,沈阳五中高二三班数趣小组,陶醒民,蔡绿茵,杨见三,甄伯纯,石英骥,史树中,王元康,俞忠元,裘宗沪,朱维平,翟世福,张畛寰,张存寰,穆传奇,张国定,张有紘,潘咸桉,林式周,林永标,刘幽函.

解答第4,5题者:杨寿,张敦穆,邓舜勤,杨照球,陈炳盛,江苏兴化高三乙

数学研究小组，陈学参，陈学璋，陈剑豪，励金华，张天民，吴刚良，陈涵生.

解答第2题者：胡增义，信阳师范二年级数学研究小组，伍锡爵，王大伦，钱金元，董荣寿，孙志坚，李秀琴，李兰德，孙并学，晁方彝，汪寿田，冯笃亲，崔季英，陈庄才，钟礼慎，史国宁，刘德香，黄民胜，刘振民，叶希孟，朱勋，陈仲维，蒋建华，黄浩如，朱瑞金，贺路闻，张其书，项复民，孙厚军，任忠文，魏文宁，谭顺旻，徐知行，林建英，洪甲戌，洪正福.

解答第3题者：田增伦，刘克亮，于咸中，李廷河，吴汉周，刘平东，彭大年，陈静秋，秦秋君，唐苛，曾余肃，沈荣海，陈嘉谟，龚绍堂，姜溯年，乐鹤天，白宏阁，陈维贤，李根源，黄芝仙，袁国兴，张南海，潘弘，李一亚，张云生，王迎宾，李根源，那延芳，冯楼初，吴小惊，孙玉成，路荣鑫，易明，陆永宝，河北南宫一中高七班数学小组，邬思，王效生，张元安，奚肖凤，邹庆丽，潘志虎，顾民康，林定伦，张自奋，陈新义，马国伟，蒋忠济，宋林，魏荣森，安开桂，王光烈，张之中，武汉实验中学高一(三) 数学小组，牛子亮，陈维庆，白云亭，李承鳌，穆传奇，朱平，智刚正，钟礼慎，吴柱鳌，徐志康，陈大器，彭述荣，陈君照，陈位宫，傅道心，张宁生，丘培根，长沙一中高二周君，钱宗玉，潘逢乙，河南许昌一初师数学组，亭峰，陈龙宝，徐锦鸿，谢德宏，林介义，上海郝君，陈强一，谢时亭，刘大常，徐祖毅，谢文镰，居德华，唐思鹤，陈士荣，钟海箔，杨桢固，夏鼎.

解答第4题者：李宝萍，彭庚生，梁伟豪.

解答第5题者：侯文正，李艺，沈庆时，刘连城，孙致毅，胡天喜，项云林，周志贤，韩继尧，李容宽，狄菊逸，李政，黄友川，四川南充师院东四楼112内室，张玮，黑龙江安达中学高二二班，李善同，徐从德，河南南阳二中一读者，晏金铎，方丁，廖仁英，介遵道，张强，朱建和，何顺祥，邹鸿斌，夏蔚玫，胡耀堂，王宝光，方植周，易明，饶家渝，陈屏虚，王承禄，鲜于方圣，陈天华，辛世赞，纪寿慈，戴元裕，黄震西，曹式军，韩贞玉，廖思微，上海机器制造学校具115班数学课余研究小组，杨衍机，王裕灏，陈文涛，王弥康，潘秉淮，静海，静晖，上海动力机校锅212班数学爱好小组.

1956年3月号小知识问题答案

❖朱实与黄实

1. 算经中的朱实、黄实所表示的是什么?(提出人:安徽省阜南初中数学组)

答 直角三角形亦简称勾股形.关于这形有一个著名定理说道:"勾方加股方等于弦方."这个定理最早的记载,见于周髀算经,是我国周初毕达哥拉斯(公元前1100年顷)所发明的.赵君卿注解周髀算经,绘有勾股图,以证明上述的定理,并用朱黄两种颜色涂染于图上,表示区别.

如图1,△ABC为勾股形,a为短边的勾,b为长边的股,c为斜边的弦.勾股形的面积 = 面积$ABC = \frac{1}{2}ab$,涂以朱色,叫做朱实.

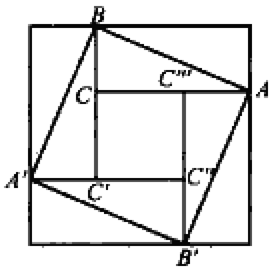


图1

勾股差 $= b - a$,差实 $= (b-a)^2$,涂以黄色,叫做黄实.

正方形 $ABA'B'$ 的面积 $= c^2$,叫做弦实.

由图1知道四个朱实(四个勾股形),加上中间一方块黄实(勾股差的平方),等于弦实(弦的平方).用式子表示如下

$$4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = c^2,即\ a^2 + b^2 = c^2$$

故赵君卿的图注中说道:"勾股各自乘,相加为弦实,再开方就得出弦."又说:"案弦的图形,又可以勾股相乘为两个朱实,二倍得四个朱实,再加上勾股差的自乘,即差实,为中央的黄实,就得出弦实."

在外国用上面同样的方法,去证明勾股定理,最早的要算印度数学家巴斯卡剌(1150年顷),却比赵氏推后了九百多年.

❖翻摊

2. 什么叫做翻摊游戏?(提出人:广州 杨宗华)

答 翻摊游戏,是我国很早流传的一种游戏,旧的名称也叫做拧法.于十

九世纪末传入欧洲.它的玩法,举出两个例子如下:

(1) 设有火柴27根,两人轮流地来取.每人每次最少取1根,最多取5根,谁取最后的一根就算是输.

(2) 设在纸上画有15个圈,依着数目三,五,七分做三排,如图2所示.两人轮流地来画掉.每人每次最少画掉一个圈,或者横排连在一起的可以任意地画掉几个圈.但中间如已经隔断,便不能一起地去画掉.谁画最后的一个圈就算是输.

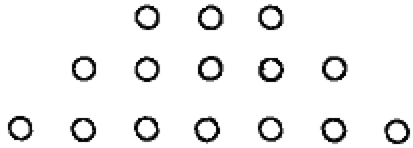


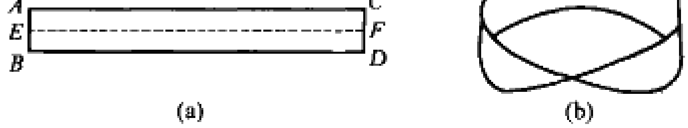
图2

对于这类问题,想操必胜之权,必须懂得数学的道理.它的道理究竟是怎样的呢?可阅读1952年5月号《数学通讯》曾宪昌同志《灵活游戏》一文或Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,Ⅰ,Nim oder Fan-Tan,p.1092.

❖没有正反面的东西

3.没有正面和反面分别的东西是什么?(提出人:郑州 黄宾祺)

答 如图3(a),取一张矩形的纸带,把边AB与对边CD相连,使A与C连,B与D连,这样就形成一种柱形的曲面,叫做柱面.这个柱面是有正反两面的.如果使边AB与边CD相连时,先把边AB扭转180°,使A与D连,B与C连,就产生一种没有正反分别的带子,如图3(b)所示,叫做麦比乌斯(Möbius,1790—1868)带,在这条带子上,我们可想象有一种动物,它可随意行走,不必经过边界,能够达到其他的一面.也就是说,这条带子是没有正反面分别的东西了.在这条带子上有些奇怪性质如下:(1)若在它的一面上,满涂着某种颜色,我们就绝不可能找到另外有地方,可以涂上另一种的颜色.(2)若从它的中间,沿着线EF剪开,它是不会被分离成为两条带子,却仍变成一条没有正反面分别的长形带子.



(a) (b)

图3

又若把一根圆管子,扭转过来自相穿插,也能变成一根管子,它还没有表面和里面区别的,如图4所示.

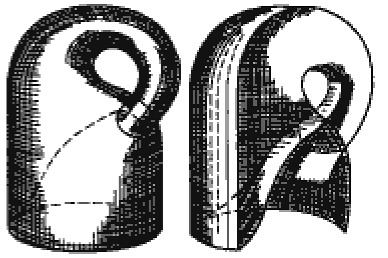


图4

❖七桥问题

4.什么叫做七桥问题?(提出人:湖南柳县袁初生)

答 七桥问题亦称哥尼斯堡七桥问题.哥尼斯堡是从前东德意志的首都,现在的苏联加里宁格勒.在那里有两道小河与大河会合,使中心地区形成一个孤岛.从那岛和岸上各地联络,架有七道架.关于这七道桥,有下面一个问题:

从任何地点走起,要走遍这七道桥,每桥只许走一次,问应该怎样走法?

这是一个一笔画问题,欧拉大胆地作出结论说:"这是不可能做到的事情呢!"

如图5,以 A 代表孤岛,B 为河的南岸,C 为东岸,D 为北岸,我们想象 A,B,C,D 都是一个点就变成图6.

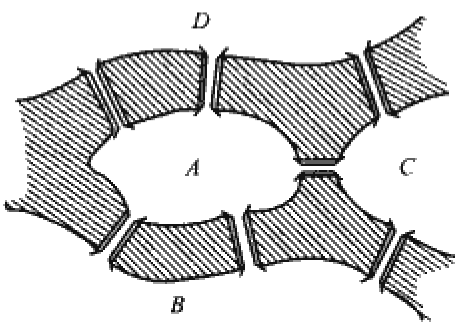


图5

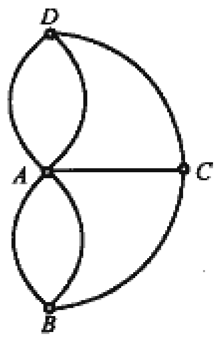


图6

从任意一点为出发点,画线出去,另一点为终止点,其余诸点是中途经过的点,这样从出发点画线出去,经过一些的中途点,总须有一条线进去,另一条线出来,最后达到于终止点,所以除出发点及终止点外,其余诸中途点都应该聚合为偶数条线才行.另一种情形,是出发点与终止点同为一点,那么从那点有一条线画出,必有一条线回来.其他诸中途点与上述情形相同.这样一切的点都应该聚合为偶数条线才行.总结上面的分析,像这类的图形,若要一笔画能画成,那么在图上由奇数条线所聚合的点底数目,必须为0或2.但在本题中,图上的四点,都是由三条线聚合所成,所以无论怎样,总有一条线不能画出,必须把那

条线去掉才有办法.也就是说,哥尼斯堡的七桥,若想一次走遍的话,那是不可能的事情呢!

❖泰勒圆

5.什么叫做泰勒(Taylor)圆?(提出人:济南 林实珍)

答1 "泰勒圆"是说从三角形的三个垂趾,各向其他的两边作垂线,各得两个垂趾.这六个垂趾是同在一个圆周上,这是属于三角形几何学的定理.

如图7,设三角形为 ABC.从各角顶向对边作垂线,得垂趾为 D,E,F.再从这三个垂趾各向其他的两边作垂线得六个垂趾 P_1,Q_1,P_2,Q_2,P_3,Q_3.通过这六个垂趾所作的圆,叫做泰勒圆.

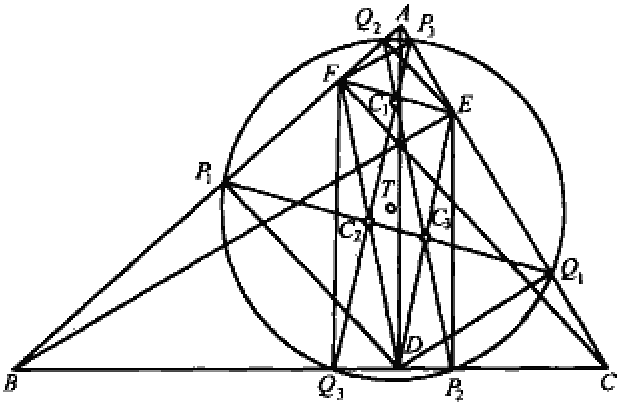


图7

依反平行线定理

$$\angle EDC = \angle A = \angle Q_2P_2D$$

故 $\triangle C_3DP_2$ 是等边三角形.同样 $\triangle C_3P_2E$ 亦是等腰三角形,且四点 D,P_2,Q_1,E 同在一个圆周上,故 DP_2 及 EQ_1 的垂直平分线必过 C_3,亦即

$$C_3D = C_3E, C_3P_2 = C_3Q_1$$

因此 P_2Q_1 的中垂线平分 $\angle P_2C_3Q_1$,亦即平分 $\triangle C_1C_2C_3$ 的内角 C_3.所以泰勒圆的圆心 T,也是 $\triangle C_1C_2C_3$ 的内心.

注 泰勒圆是塔克(Tucker)圆的特例.又因 C_1,C_2,C_3 为 $\triangle DEF$ 各边的中点,故泰勒圆的圆心,也是 $\triangle DEF$ 的斯派克(Spieker)圆的圆心.

答2 设 $\triangle ABC$ 的垂趾三角形为 DEF(图7).C_1,C_2,C_3 分别为 $\triangle DEF$ 各对边的中点.C_2C_3,C_3C_1,C_1C_2 交 $\triangle ABC$ 于六点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;P_3,Q_3$.那么这六点是共圆的,这个圆就叫做泰勒圆.证明如下.

因为 $\angle AFC = \angle ADC = 90°$,就得四点 A,F,D,C 共圆.所以

$$\angle BFD = \angle ACB$$

同样,四点 B,F,E,C 共圆,所以

$$\angle AFE = \angle ACB$$

于是

$$\angle BFD = \angle AFE$$

又 $P_1Q_1 \parallel FE$,所以

$$\angle AP_1Q_1 = \angle AFE = \angle BFD$$

所以

$$C_2F = C_2P_1$$

同样 $C_2Q_3 = C_2D$.于是

$$C_2F = C_2P = C_2Q_2 = C_2D$$

所以四点 P_1,Q_3,D,F 共圆.所以 $\angle BP_1Q_3 = \angle BP_2Q_2$.所以四点 P_1,Q_3,P_2,Q_2 共圆.

联结 Q_2P_3,仿上法,得

$$\angle AQ_2P_3 = \angle P_3EF = \angle ABC$$

所以 $Q_2P_3 \parallel BC$,所以

$$\angle Q_2P_3Q_3 = \angle P_3Q_3C = \angle BDF = \angle BP_1Q_3$$

所以

$$\angle Q_2P_3Q_3 = \angle BP_1Q_3$$

所以四边形 $P_1Q_3P_3Q_2$ 内接于圆,即 P_3 在 $P_1Q_3Q_2P_2$ 所作的圆上.同理,Q_1 亦在 $P_1Q_3Q_2P_2$ 所作的圆上.所以六点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;P_3,Q_3$ 共圆.

1956 年 3 月号小知识解答者名单

解答第 1,2,3,4,5 题者:华南师院附中高一红色数学研究小组.

解答第 1,4,5 题者:俞忠元,裘宗沪,刘相.

解答第 3,4 题者:章润生,李宝萍,于淇,张国定,吴文中,江苏盐城中学高二甲数学爱好小组.

解答第 4,5 题者:藏朋年,庞文俊,谢汝尊,黄佑之.

解答第 4 题者:戈炳崐,龙祝夷,刘全彬,常继慈,四川南充师院东四楼 112 内室,宏廉,丁方允,田景黄,叶树仁,邬思,封继康,袁文彬,洪笃亲,孙志杰,马介飞,刘元甫,吴茂康,钟礼慎,姚茂林,智刚正,棣彰芽,朱伟,华永一,上海张君,王裕灏,乐伟达,上海七十一中学约里奥居里物理学习小组,郑吉富,丁大吉,江苏兴化中学高三乙数学研究小组.

解答第 5 题者:白宏阁,李作新,王元康.

1956年4月号征解问题答案

❖卖马分款

1. 甲乙两畜牧生产合作社，合伙将马群卖给国家，马每匹售价的元数，恰等于马的匹数. 卖后买回一群小马，每匹价 10 元，剩下有不够买一匹小马的余款，归乙所得. 但甲却多得了一匹小马. 问在这样的情况下，乙是否应补找甲多少元，或者向甲收回多少元，才使两社所得的价值相等呢？(提出人：广州 麦卓文)

解 全马群的元数是一个完全平方数，令它为 n^2. 依题意甲社多得了一匹小马，故小马的匹数，应该是一个奇数，即 n^2 里在十位上的数字是奇数(即 1,3,5,7,9).

一个数的平方所含的十位数字是奇数，只有这数的个位是 4 或 6 的情形下才能产生. 要证明这性质很容易，令十位数字为 a，个位数字为 b，得这数的平方为 $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$. 就这式是前两项来说，无论 a，b 是什么数，他们的和的十位数字一定是偶数. 若使十位数字成奇数，唯一的办法为使 b^2 所得的十位数字是奇数. 在九个基数中，只有 4,6 的平方为 16,36，所以个位数字是 4 或 6.

由此知道，无论 n 的个位数字是 4 或 6，都得 n^2 的个位数字必是 6.

又依题意，甲多得了一匹小马，即多得了 10 元，乙得那余款 6 元. 所以甲实际上只比乙多得了 4 元，也就是说乙应向甲收回 2 元.

注 (1) 原来马群的匹数，可为下列诸数中的任意一个：

4, 14, 24, 34, …, 94, 104, 114, 124, …; 6, 16, 26, 36, …, 96, 106, 116, 126, …

(2) 原来马群的匹数和价格，可能比买回小马的匹数和价格或多或少，都可以说得通.

(3) 马的匹数不定(无论是原来的马或买回的小马)，但找款却是一定.

❖质数整除性

2. 设质数 p 的形式为 $4n+1$，试证：$\dfrac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 2n)^2+n^{p-1}}{p}$ 为整数.

(提出人:济南 哈家定)

证　根据费马定理,$p=4n+1$ 为质数,n 不为 $4n+1$ 除尽,得

$$n^{4n}-1\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

现在只需证明 $\{(2n)!\}^2+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$ 即可.

根据威尔逊定理,p 为质数,$(p-1)!+1\equiv 0(\bmod p)$.在本题,得

$$(4n)!+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

即

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 2n(2n+1)(2n+2)\cdots(4n)+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 2n(p-1)(p-2)\cdots(p-2n)+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

$$(2n)!(-1)^{2n}(2n)!+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

所以

$$\{(2n)!\}^2+1\equiv 0(\bmod 4n+1)$$

❖自然数方幂的和

3.试证:$(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^5+2^5+\cdots+n^5)=4(1+2+\cdots+n)^3$.

(提出人:浙江余姚 邵文才)

证　用归纳法,分两部分证明如下.

(1)先证 $1^3+2^3+\cdots n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

当 $n=1$ 时,上式两边都等于1.

当 $n=2$ 时,两边都等于9.

当 $n=k$ 时,$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$.

当 $n=k+1$ 时

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=$$
$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}=$$
$$\frac{(k+1)^3[k^2+4(k+1)]}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=$$
$$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

(2)次证 $3(1^5+2^5+\cdots+n^5)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2[2n(n+1)-1]$.

当 $n=1$ 时,上式两边都等于3.

当 $n=2$ 时,两边都等于99.

当 $n=k$ 时，$3(1^5+2^5+\cdots+k^5)=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right][2k(k+1)-1]$.

当 $n=k+1$ 时

$$3(1^5+2^5+\cdots+k^5)+\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2[2k(k+1)-1]+3(k+1)^5=$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}[2k(k+1)-1]+\frac{12(k+1)^5}{4}=$$

$$\frac{(k+1)^2}{4}(2k^4+14k^3+35k^2+36k+12)=$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}(2k^2+6k+3)=$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}[2(k+1)(k+2)-1]$$

将上面部分所得的结果相加，得

$$(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^5+2^5+\cdots+n^5)=$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2[2n(n+1)-1]=$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2[2n(n+1)]=$$

$$4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^3=4(1+2+\cdots+n)^3$$

❖三角形里小图形

4.有正三角形 ABC，将它的三边作12等分，连接各个分点，如图1，试问有多少个正三角形？多少个菱形？多少个平行四边形（不包括菱形）？多少个六角形？（提出人：上海 盛沛根）

解 令 $\triangle ABC$ 各边长的 $\frac{1}{12}$ 为单位1.

(1) 正三角形有正放的（顶点向上）和倒放的（顶点向下）两种.

正放边长为1的，有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$（个）；

正放边长为2的，有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$（个）；

正放边长为3的，有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$（个）；

正放边长为4的，有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$（个）；

正放边长为5的，有 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$（个）；

正放边长为6的，有 $1+2+3+4+5+6+7=28$（个）；

正放边长为7的,有1+2+3+4+5+6=21(个);
正放边长为8的,有1+2+3+4+5=15(个);
正放边长为9的,1+2+3+4=10(个);
正放边长为10的,有1+2+3=6(个);
正放边长为11的,有1+2=3(个);
正放边长为12的,有1个.
共364个.

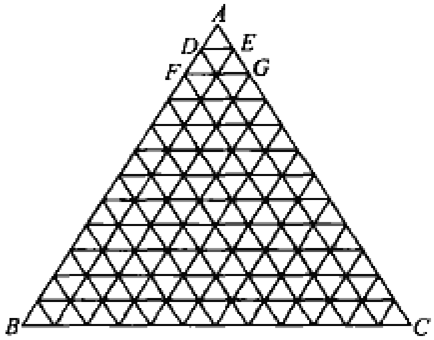


图1

倒放边长为1的,有1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66(个);
倒放边长为2的,有1+2+3+4+5+6+7+8+9=45(个);
倒放边长为3的,有1+2+3+4+5+6+7=28(个);
倒放边长为4的,有1+2+3+4+5=15(个);
倒放边长为5的,有1+2+3=6(个);
倒放边长为6的,有1个.
共161个.

所以,正三角形共有364+161=525(个).

(2)菱形,依它们的长对角线向着原三角形的各角顶,有三个方面.
边长为1的,有1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66(个);
边长为2的,有1+2+3+4+5+6+7+8+9=45(个);
边长为3的,有1+2+3+4+5+6+7=28(个);
边长为4的,有1+2+3+4+5=15(个);
边长为5的,有1+2+3=6(个);
边长为6的,有1个.
共161个.

所以菱形共有3×161=483(个).

(3)平行四边形(不包括菱形),依它们的相邻两边向着原三角形两边的方向,共有六个方向.又当平行四边形相邻两边边长之和是相同时,它们的个数亦同.例如相邻边边长为1,4者的个数等于相邻边边长为2,3者的个数.相邻边边长为1,11者的个数等于相邻边边长为2,10者;或3,9者;或4,8者;或5,7者的个数.算法列下:
一边为1,邻边为2的,有1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55(个);
一边为1,邻边为3的,有1+2+3+4+5+6+7+8+9=45(个);
一边为1,邻边为4的,有1+2+3+4+5+6+7+8=36(个);

一边为 1 的,邻边为 5 的,有 $1+2+3+4+5+6+7=28$(个);
一边为 1 的,邻边为 6 的,有 $1+2+3+4+5+6=21$(个);
一边为 1 的,邻边为 7 的,有 $1+2+3+4+5=15$(个);
一边为 1 的,邻边为 8 的,有 $1+2+3+4=10$(个);
一边为 1,邻边为 9 的,有 $1+2+3=6$(个);
一边为 1,邻边为 10 的,有 $1+2=3$(个);
一边为 1,邻边为 11 的,有 1 个.
共 220 个.
一边为 2 的,邻边为 3 的 = 一边为 1,邻边为 4 的,有 36 个;
一边为 2 的,邻边为 4 的 = 一边为 1,邻边为 5 的,有 28 个;
一边为 2 的,邻边为 5 的 = 一边为 1,邻边为 6 的,有 21 个;
一边为 2 的,邻边为 6 的 = 一边为 1,邻边为 7 的,有 15 个;
一边为 2 的,邻边为 7 的 = 一边为 1,邻边为 8 的,有 10 个;
一边为 2 的,邻边为 8 的 = 一边为 1,邻边为 9 的,有 6 个;
一边为 2 的,邻边为 9 的 = 一边为 1,邻边为 10 的,有 3 个;
一边为 2 的,邻边为 10 的 = 一边为 1,邻边为 11 的,有 1 个.
共 120 个.
一边为 3 的,邻边为 4 的 = 一边为 1,邻边为 6 的,有 21 个;
一边为 3 的,邻边为 5 的 = 一边为 1,邻边为 7 的,有 15 个;
一边为 3 的,邻边为 6 的 = 一边为 1,邻边为 8 的,有 0 个;
一边为 3 的,邻边为 7 的 = 一边为 1,邻边为 9 的,有 6 个;
一边为 3 的,邻边为 8 的 = 一边为 1,邻边为 10 的,有 3 个;
一边为 3 的,邻边为 9 的 = 一边为 1,邻边为 11 的,有 1 个.
共 56 个.
一边为 4 的,邻边为 5 的 = 一边为 1,邻边为 8 的,有 10 个;
一边为 4 的,邻边为 6 的 = 一边为 1,邻边为 9 的,有 6 个;
一边为 4 的,邻边为 7 的 = 一边为 1,邻边为 10 的,有 3 个;
一边为 4 的,邻边为 8 的 = 一边为 1,邻边为 11 的,有 1 个.
共 20 个.
一边为 5 的,邻边为 6 的 = 一边为 1,邻边为 10 的,有 3 个;
一边为 5 的,邻边为 7 的 = 一边为 1,邻边为 11 的,有 1 个.
共 4 个.

所以,平行四边形共有 $6(220+120+56+20+4)=6\times 420=2\ 520$(个).

(4) 六角形(不计凹形的)的个数求法.

令三角形第一层的顶点为 A，第二层的顶边为 DE，第三层的顶边为 FG. 以下类推，举例说明如下.

设六角形的顶边固定在第三层，边长为 2，那么就得高占二格的六角形有 1 个，高占三格的六角形有 4(即 $1+\overline{2+1}$) 个，高占四格的六角形有 8(即 $2+\overline{3+2}+1$) 个，如图 2 所示.

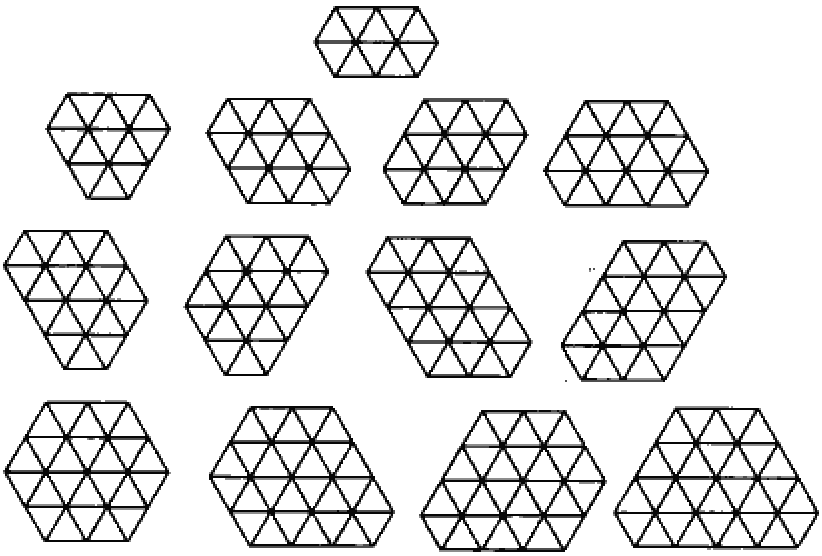


图 2

上说这些图形，又都可把顶边往下移放于第三，第四，第五及以下诸层.

于是得六角形，顶边在最高层的个数如表 1.

表 1

顶边为 1		顶边为 2	
高占格数	顶边在二层	高占格数	顶边在三层
二	1	二	1
三	$2+1=3$	三	$1+\overline{2+1}=4$
四	$3+2+1=6$	四	$2+\overline{3+2+1}=8$
五	$4+3+2+1=10$	五	$3+\overline{4+3+2+1}=13$
六	$5+4+\cdots+1=15$	六	$4+\overline{5+4+\cdots+1}=19$
七	$6+5+\cdots+1=21$	七	$5+\overline{6+5+\cdots+1}=26$
八	$7+6+\cdots+1=28$	八	$6+\overline{7+6+\cdots+1}=34$
九	$8+7+\cdots+7=36$	九	$7+\overline{8+7+\cdots+1}=43$
十	$9+8+\cdots+1=45$	十	$8+\overline{9+8+\cdots+1}=53$
十一	$10+9+\cdots+1=55$		

续表 1

顶边为 3		顶边为 4	
高占格数	顶边在四层	高占格数	顶边在五层
二	1	二	1
三	$1+\overline{2+1}=4$	三	$1+\overline{2+1}=4$
四	$1+2+\overline{3+2+1}=9$	四	$1+2+3+2+1=9$
五	$2+3+\overline{4+3+2+1}=15$	五	$1+2+3+\overline{4+3+2+1}=16$
六	$3+4+\overline{5+4+\cdots+1}=22$	六	$2+3+4+\overline{5+4+\cdots+1}=24$
七	$4+5+\overline{6+5+\cdots+1}=30$	七	$3+4+5+\overline{6+5+\cdots+1}=33$
八	$5+6+\overline{7+6+\cdots+1}=39$	八	$4+5+6+\overline{7+6+\cdots+1}=43$
九	$6+7+\overline{8+7+\cdots+1}=49$		

顶边为 5		顶边为 6	
高占格数	顶边在六层	高占格数	顶边在 7 层
二	1	二	1
三	$1+\overline{2+1}=4$	三	4
四	$1+2+\overline{3+2+1}=9$	四	9
五	$1+2+3+\overline{4+3+2+1}=16$	五	16
六	$1+2+3+4+\overline{5+4+\cdots+1}=25$	六	25
七	$2+3+4+5+\overline{6+5+\cdots+1}=35$		

顶边为 7		顶边为 8		顶边为 9		顶边为 10	
高占格数	顶边在八层	高占格数	顶边在九层	高占格数	顶边在十层	高占格数	顶边在十一层
二	1	二	1	二	1	二	1
三	4	三	4	三	4		
四	9	四	9				
五	16						

顶边为 1 者六角形的个数如表 2.

表 2

高占格数 \ 顶边所在层	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总计
二	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
三	3	6	9	12	15	18	21	24	27		135
四	6	12	18	24	30	36	42	48			216
五	10	20	30	40	50	60	70				280
六	15	30	45	60	75	90					315
七	21	42	63	84	105						315

续表 2

顶边所在层 高占格数	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总计
八	28	56	84	112							280
九	36	72	108								216
十	45	90									135
十一	55										55
总计	220	330	360	336	280	210	140	80	36	10	2 002

顶边为 2 者六角形的个数如表 3.

表 3

顶边所在层 高占格数	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总计
二	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
三	4	8	12	6	20	24	28	32		144
四	8	16	24	32	40	48	56			224
五	13	26	39	52	65	78				273
六	19	38	57	76	95					285
七	26	52	78	104						260
八	34	68	122							204
九	43	89								129
十	53									53
总计	201	296	315	284	225	156	91	40	9	1 617

顶边为 3 者六角形的个数如表 4.

表 4

顶边所在层 高占格数	四	五	六	七	八	九	十	十一	总计
二	1	2	3	4	5	6	7	8	36
三	4	8	12	16	20	24	28		112
四	9	18	27	36	45	54			189
五	15	30	45	60	75				225
六	22	44	66	88					220
七	30	60	90						180
八	39	78							117
九	49								49
总计	169	240	243	204	145	84	35	8	1 128

顶边为 4 者六角形的个数如表 5.

表 5

顶边所在层 高占格数	五	六	七	八	九	十	十一	总计
二	1	2	3	4	5	6	7	28
三	4	8	12	16	20	24		84
四	9	18	27	36	45			135
五	16	32	48	64				160
六	24	48	72					144
七	33	66						99
八	43							43
总计	130	174	162	120	70	30	7	993

顶边为 5 者六角形的个数如表 6.

表 6

顶边所在层 高占格数	六	七	八	九	十	十一	总计
二	1	2	3	4	5	6	21
三	4	8	12	16	20		60
四	9	18	27	36			90
五	16	32	48				96
六	25	50					75
七	35						35
总计	90	110	90	56	25	6	377

顶边为 6 者六角形的个数表 7.

表 7

顶边所在层 高占格数	七	八	九	十	十一	总计
二	1	2	3	4	5	15
三	4	8	12	16		40
四	9	18	27			54
五	16	32				48
六	25					25
总计	55	60	40	20	5	182

顶边为 7 者六角形的个数如表 8.

表 8

高占格数 \ 顶边所在层	八	九	十	十一	总计
二	1	2	3	4	10
三	4	8	12		24
四	9	18			27
五	16				16
总计	30	28	15	4	77

顶边为 8 者六角形的个数如表 9.

表 9

高占格数 \ 顶边所在层	九	十	十一	总计
二	1	2	3	6
三	4	8		12
四	9			9
总计	14	10	3	27

顶边为 9 者六角形的个数如表 10.

表 10

高占格数 \ 顶边所在层	十	十一	总计
二	1	2	3
三	4		4
总计	5	2	7

顶边为 10 者六角形的个数是 1.

所以,六角形共有 $2\,002+1\,617+1\,128+693+377+182+77+27+7+1=6\,111$(个).

又在这些六角形中,若只选出正六角形,就有下列的个数:

边长为 1 的,有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$(个);

边长为 2 的,有 $1+2+3+4+5+6+7=28$(个);

边长为 3 的,有 $1+2+3+4=10$(个);

边长为 4 的,有 1 个.

共 94 个.

所以,正六角形有 94 个.

❖余弦立方的和

5.求下列级数的和:

$\cos^3\theta+\cos^3 3\theta+\cos^3 5\theta+\cdots+\cos^3(2n-1)\theta$.(提出人:广东澄海 黄友川)

解 令 $S=\cos^3\theta+\cos^3 3\theta+\cos^3 5\theta+\cdots+\cos^3(2n-1)\theta$.

依公式 $4\cos^3\theta=3\cos\theta+\cos 3\theta$,得

$$\begin{aligned}4S=&(3\cos\theta+\cos 3\theta)+(3\cos 3\theta+\cos 9\theta)+\cdots+\\&\{3\cos(2n-1)\theta+\cos 3(2n-1)\theta\}=\\&3\{\cos\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos(2n-1)\theta\}+\\&\{\cos 3\theta+\cos 9\theta+\cdots+\cos 3(2n-1)\theta\}=\\&\frac{3\sin n\theta}{\sin\theta}\cos[\theta+(n-1)\theta]+\frac{\sin 3n\theta}{\sin 3\theta}\cos[3\theta+3(n-1)\theta]\end{aligned}$$

所以

$$S=\frac{3\sin n\theta\cos n\theta}{4\sin\theta}+\frac{\sin 3n\theta\cos 3n\theta}{4\sin 3\theta}=\frac{1}{8}\left(\frac{3\sin 2n\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin 6n\theta}{\sin 3\theta}\right)$$

1956年4月号问题征解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:过伯祥.

解答第1,2,3,5题者:袁育才,刘志仁,江荣禧,刘相,上海延安中学高二丙组教学爱好小组,方博仁,黄水源,吴良芝,朱冠章,王柏坚,陈玉櫂,广州华南师院附中高一红色数学研究小组,俞文魮.

解答第1,3,4,5题者:叶希孟.

解答第1,2,3题者:汪裕民,朱思铭,朱连喜,王冠闽,张国定,倪师孔,倪拥孔,俞忠元,裘宗沪,潘以德.

解答第1,3,5题者:翟世福,河北威县省师二年级教学爱好小组,温暖,陈屏虚,刘家琦,徐自新,马殿荣,李恩舜,袁先寿,徐孝舜,姚彦,虞哲谅,陈剑豪,钱建中,乐伟达,刘麟仲,吴宗汉,林沄,郑玮,李仲华.

解答第2,3,5题者:盛沛根,盛沛栋,浦祖康,罗以勤,张立,吴顺唐,汤钊群,上海延安中学数学小组高二丙班分组,上海和平中学高三(2)数学小组,马慎余,程海杰,陈亚文,棣彰芽.

解答第1,3题者:于汝强,燕敦惠,杨克强,萧嗣尧,李善同,施裕炎,孙玉成,杨祥谱,汪壶君,胡久稔,丁斗南,吕伏龙,李绍宗,朱允明,谢孟川,林鸿宾,傅道心,田增伦,钟兆楷,王一平,何文长,程家骅,纪汉光,陈道新,恩施高中毕达哥拉斯数学小组,钟钜康,何焕才,项兴观,谢德宏,张存寰,张畛寰,封继康,舒天育,程鸿鼎,张有紘,潘咸按,唐金法,林介义,李华康,忻华泰,郭秉正,楼滨城,葛元冲,黄黄,陈俊本,吴家驹.

解答第1,5题者:雷长新,石啸生.

解答第2,3题者:黄人杰,柳光轩,吴泽藩,史树中,何俊若,杨永靖,朱平,李荣谦,张敦穆,邓舜勤,杨照球.

解答第2,5题者:王祝然,张禄度.

解答第3,5题者:李方钥,黄民胜,胡瑞炎,安心平,刘广祥,邹鸣斌,吴方成,王于牧,叶秀明,胡孝伦,陆洪文,张钦宜,张南岳,王效生,张元安,张国培,张盛翘,浙江绍兴中学高二(4)第二数学小组,钟礼慎,夏业勋,曲惠敏,谢元枢,陆志方,孟光荣,李迎春,黄远视,楼宇同,戴天鸣,彭承衡,舒鼎荣,周忠泰,秦秋君,居德华,裴景仁,潘秉淮,杨自刚,吴刚良,陈涵生,刘昌砚.

解答第1,2题者:陈静剑,张天民.

解答第1题者:王明亮,史贯亿,董振武,张介仁,袁文彬,周光祺,陈道同,

朱应全，夏文瀚，裘宝林，吴树雄，赣州一中谢君，杨传珠，孙德茂，潘其光，易明，周竟华，吴德洲，信阳师范二年级数学研究组，邬思，彭明海，梁名尊，邓军凯，马孟生，储鹏程，朱元庆，韶山，胡高北，杨炳铨，李送宝，陶醒民，樊金魁，王春兰，曾戡平，马润尧，石成福，徐直叔，吴侃，白云亭，王安琪，孙庆昌，刘长容，左仲旎，吴章江，俞维强，潘文标，刘凤翔，福建泉州一中高九组甲数学爱好小组，何金良，王富成，章润生，许元基，杨林森，邵其方，何沐清，铨桦.

解答第2题者：刘水生，艾崇周.

解答第3题者：池文和，郭先瑚，潘逢乙，卢甲骥，彭祖仁，林存山，狄菊逸，孙九龄，彭大中，胡晖，宋永林，金锡润，王干寿，蔡文彬，封辅智，吴昭亮，梁杰英，姚国宝，潘德，尹明义，张远程，易寄安，孟繁森，李兆寅，陈建生，朱建如，仲崇光，刘炳文，乐祖培，吉林农安一中数学教研组，甘成信，徐长，施佐南，蒋大超，金宗文，喻畯，程震国，孙志坚，李秀琴，何淼林，万荣成，薛正中，黄柏森，毛经中，从培杰，洪毅，于淇，江良辉，范张义，刘斌，王光烈，张之中，殷士光，杜学明，必成，辛开河，朱湘南，王裕灏，汤利亿，罗绍勋，刘子中，刘幽函，贺宗应，严德忠，萧琏如，钱立业，林乐善，孙义鹄，周持中，杨武久，谢亮升，欧阳隆，冉启森，臧朋年，陆建奎，周懋人，周宗熙，王銮，张文宽，李一亚，顾恒基，朱维平，孟挺生，张学文，济南六中高六(一)数学爱好者，傅泌舫，吴宗荣，李景轩，裘明儿，丁逢彬，张吉溥，孙丹浩，贾宗光，华永一，罗健组，余泓扬，张培忠，谢毓厚，王金桃，朱长懋，杨雄生，戴孝祺，王元康，花炳兴.

解答第5题者：吴骏，湖南长沙六中，廖思微，郑明淦，张景兴，马国伟，张宝康，赵可祥，林国华，庚铭，徐锦鸿.

1956年4月号小知识答案

❖算经

1.我国算经有哪些书?(提出人:孙钢)

答　北朝周(六世纪中)甄鸾撰注算经有:周髀算经,九章算术,孙子算经,五曹算经,夏侯阳算经,张丘建算经,五经算术,刘徽海岛算经,徐岳数术记遗,董泉三等数,甄鸾算术十一种.

唐李淳风(602—670)注释十部算经,除上面的前八种外,再加有祖冲之缀术,王孝通缉古算术两种.

唐代设立明算术,考取算学博士,所用的算经为:周髀,九章,孙子,五曹,夏侯阳,张丘建,五经,海岛,记遗,三等数,缀术十二种.

宋神宗元丰七年(1084)刊刻算经十书为:黄帝九章,周髀算经,孙子算经,五曹算经;夏侯阳算经,张丘建算经,五经算术,海岛算经,算术记遗,缉古算经十种.

宋钦宗靖康元年(1126)金人攻陷汴京,次年北宋徽、钦宗两个皇帝被擒,秘阁所藏的图书被劫,算经亦遭受散失,就在这个时代,算术拾遗,三等数,缀术一并失掉了.南宋宁宗嘉定五年(1212)鲍澣之在汀州(今福建长汀县)城郊东南的宁寿道观里,复得已失落的数术记遗.所以到南宋时代,在汀州重刻的算经有下列十种:

周髀算经,九章算术,孙子算经,五曹算经,夏侯阳算经,张丘建算经,五经算术,海岛算经,数术记遗,缉古算经.

明成祖永乐六年(1408)纂修永乐大典,其中谈论数学的书有:周髀,九章,孙子,五曹,夏侯阳,五经,海岛,秦九韶数学九章,益古演段,杨辉摘奇算法,九章详解算法,日用算法,纂类,通变算法,透帘细草,丁巨算法,锦囊启蒙,贾通全能集,详明算法,严恭通原算法二十种.

清乾隆三十八年(1773)戴震纂四库全书,由永乐大典辑出周髀,九章,孙子,五曹,夏侯阳,五经六种.从王杰家藏抄本录出张丘建,缉古两种.又据两江总督采进本录出数术记遗一种,一共十种.

清孔继涵(1739—1783)因宋元丰本的周髀,九章,孙子,五曹,夏侯阳,张丘

建六书，及明永乐大典本的五经，海岛两书，加上戴震所著策算(1744)，句股割园记(1758) 两书，共十种，合并地刻出，也称作算经十书. 但现在所称的算经十书，还是沿旧用南宋时代所刻十书的名目.

❖方程与方程式的区别

2. 方程与方程式有没有什么区别?(提出人:夏侯裕)

答 方程是我国九章算法中一章的名称，它的算法是用来解决几个物品含数糅杂的问题. 算时是用算筹来立数. 对于题中的未知数不用符号表示. 筹上所列出的数值，相当于未知数的系数. 在那数值之下，又列出有总实，即相当于常数项，这样排定后，叫做完成了一行. 若题中有两个未知数，就须排出两行;有三个未知数，就须排出三行. 这是方程算法的大意. 魏刘徽(263) 注九章算术说道:"程是课程，解释为计算程限. 因为一个物品所含的数，依题意须计算它的定限;两个物品的数，须计算两种定限;三个物品的数，须计算三种. 在做这样计算的时候，都是使用算筹，把一切的数值，摆成阵式的样子，所以叫做方程". 清李潢(?—1811) 九章算术细草图说亦说道:"两行相并地排出叫做方，依据不同的数值来计算叫做程. 不管题中所含的数值有多少个，总是分摆在左右两边后，再来互相推求，" 这是九章算法中计算糅杂问题的算法.

方程式是代数学中写出来的等号两边相等的数学式子，在式中含有几个未知数的，叫做几元方程式. 设要解出方程式中的未知数，叫做求方程式的根.

就上面说来，方程与方程式，原来含意是不相同的，但后来为了称呼的方便起见，把代数学中的方程式简称做方程. 于是方程和方程式变成意义相等的名词了.

❖平方零约

3. 什么叫做平方零约?(提出人:贾梅珠)

答 当一个数的平方根不为正整数时，所得到的是一些零星简约的数值，也就是带小数的近似值，叫做平方零约. 像这样去求平方根的法子，叫做平方零约术.

设要求$\sqrt{n}$ 的数值，依平方零约术得公式:

$$\sqrt{n} = \sqrt{a_1^2 + r_1} = a_1 + \frac{r_1}{2a_1}$$

式中 a_1 叫做根的第一零约值.

令 $a_2 = a_1 + \frac{r_1}{2a_1}$,上面的公式变为

$$\sqrt{n} = \sqrt{a_2^2 + r_2} = a_2 + \frac{r_2}{2a_2}$$

式中 a_2 叫做第二零约值.

再令 $a_3 = a_2 + \frac{r_2}{2a_2}$,得

$$\sqrt{n} = \sqrt{a_3^2 + r_3} = a_3 + \frac{r_3}{2a_3}$$

式中 a_3 叫做第三零约值.

至于其他一些零约值,都可照样继续推求.

示例如下:设求$\sqrt{20}$的数值.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 4} = 4 + \frac{1}{2}$$

这里 $a_1 = 4, r_1 = 4, \frac{r_1}{2a_1} = \frac{1}{2}$.

令 $a_2 = 4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$,得

$$\sqrt{20} = \sqrt{(\frac{9}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$$

这里 $a_2 = \frac{9}{2}, r_2 = -\frac{1}{4}, \frac{r_2}{2a_2} = -\frac{1}{36}$.

令 $a_3 = 4\frac{17}{36} = \frac{161}{36}$,得

$$\sqrt{20} = \sqrt{(\frac{161}{36})^2 - \frac{1}{1\,296}} = \frac{161}{36} - \frac{1}{11\,592} = 4\frac{5\,473}{11\,592}$$

这里 $a_3 = \frac{161}{36}, r_3 = -\frac{1}{1\,296}, \frac{r_3}{2a_3} = -\frac{1}{11\,592}$.

因此得$\sqrt{20}$的第一,第二,第三,第四诸零约值如下:

$$4, 4\frac{1}{2}, 4\frac{17}{36}, 4\frac{5\,473}{11\,592}, \cdots$$

像上面的平方零约,如果运算多回,便得到连分数的式样.

因 $n = a_1^2 + r_1$,这里 a_1 为第一零约值.

设取 $a_2 = a_1 + \frac{r_1}{2a_1}$ 为一个第二零约值.又取 $a_2 = a_1 + \cfrac{r_1}{2a_1 + \frac{r_1}{a_1}}$ 亦为一个第二零约值.试求这两个第二零约值的平均数,得

$$a_1+\frac{r_1}{2}\left(\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_1+\frac{r_1}{a_1}}\right)=a_1+\cfrac{r_1}{2a_1+\cfrac{r_1}{2a_1+\cfrac{r_1}{2a_1}}}$$

这样继续推求，就得到连分数的式子为

$$\sqrt{n}=\sqrt{a_1^2+r}=a_1+\cfrac{r}{2a_1+\cfrac{r}{2a_1+\cfrac{r}{2a_1+\cfrac{r}{2a_1+\cdots}}}}$$

又由上面说来，我们计算 n 的开方值，可令

$$\sqrt{n}=a_1+\frac{r_1}{2a_1} \qquad ①$$

但亦可令

$$\sqrt{n}=a_1+\frac{r_1}{2a_1+1} \qquad ②$$

式①，②都可作为 n 的平方零约值. 若用式②，其中带分数部分的分母加有数值“1”叫做加借算. 这种算法，在我国五经算术中早已谈到. 至于外国要到十一世纪，阿拉伯人阿卡基方才知道. 若用式①，其中带分数部分的分母只有一个数，叫做不加借算. 这种算法，在我国的孙子算经中亦已谈到.

❖各种坐标

4. 数学书中所用的坐标，除直角坐标及极坐标以外，还有哪些？(提出人：郑玮)

答 在数学书中所常见关于平面内图形的坐标，是用横直两条相交成直角的两轴 x,y，这种坐标叫做笛卡儿直角坐标. 但亦可用两条相交不成直角的轴，那种坐标叫做斜角坐标，亦称斜线坐标.

在平面内如用三个数值来定点或线的，叫做齐性坐标. 用三条线来定点的叫做三线坐标. 用三个点来定线的，叫做三点坐标.

坐标不一定只限于平面内，因此有关平面坐标，空间坐标，n 维空间坐标等的区别. 坐标所取的元素，也不一定只表示点，因此又有点坐标，线坐标，曲线坐标，圆坐标，抛线坐标，双曲坐标，圆柱坐标，球面坐标，球体坐标等名目.

坐标用极点及动径来表示的，叫做极坐标，球极坐标. 用射影性质来规定的，叫做射影坐标，仿射坐标.

此外坐标的名称还有多种如:正交坐标,半正交坐标,平行坐标,切线坐标,切线极坐标,法线坐标,本体坐标,参数坐标,绝对坐标,达波坐标,李坐标,普卢克坐标,魏斯塔斯坐标,流动坐标,动轴坐标,捷线极坐标,重心坐标,面积坐标,圆点坐标,迷向坐标,双极坐标,三极坐标,三圆坐标,(亦称幂坐标),四圆坐标,四面体坐标,四线坐标,五球坐标,五圆坐标,四点面坐标,四面点坐标,六超球坐标,高等圆坐标,高等球坐标,椭圆坐标,椭圆柱坐标,椭球坐标.

在天文学中,又用有地平坐标,赤道坐标,黄道坐标,银河坐标.

❖对数螺线

5.什么叫做对数螺线,它有些什么性质?是谁首先发现的?(提出人:郑玮)

答 用极坐标方程 $\rho = ae^{k\theta}$ 或 $k\theta = \ln \frac{\rho}{a}$ 所表示的曲线,叫做对数螺线.式中 a 和 k 都是正常数.它有这样一个性质:取 θ 任意的数值,来决定 ρ 的对应值.试作出满足上列方程的 (θ,ρ) 的表(表 1),便可明了.即对于变角 θ 以公差 $\frac{\pi}{2}$ 的算术级数增加,动径 ρ 是以公比 $e^{\frac{k\pi}{2}}$ 的几何级数更迅速地增加.当角 θ 无限制地增加时,动径 ρ 也无限制地增加.当 θ 趋近于负无穷大时,ρ 趋近于零,且曲线无限地接近于 0,而环绕在它的周围,但不大于 0.

表 1

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
ρ	$ae^{-k\pi}$	$ae^{-\frac{k\pi}{2}}$	a	$ae^{\frac{k\pi}{2}}$	$ae^{k\pi}$

最有趣的在对数螺线上任意一点的切线,与该点动径所成的角是恒等的.因此对数螺线亦称做等角螺线.

1638 年笛卡儿写给梅森(M. Mersenne,1598—1648)的信中,最初谈到这曲线的性质,说从原点到曲线上任意一点的半径,与切线相交,都成等角,但没有给出方程.1704 年瓦里尼翁(P. Varignon,1654—1722)定名它为对数螺数,于 1722 年在巴黎发表,1692 年瑞士数学家雅各·贝努利喜欢研究这曲线,并遗嘱要绘刻图形在他的墓碑上,作为永久的纪念.

如图 1,取 O 为极点,PT 为在点 P 的切线,设 $OQ \perp PT$,为 OT 极次切线,与法线 PC 相交于 C,又令 $\angle OPT = \psi$,就得一些性质如下:

(1) 原点至切线的距离 $= p = OQ = \rho\tan\psi$(ψ 为动径与切线的交角).

(2) 曲率半径 $= r = \rho = \frac{d\rho}{dp} = \rho\csc\psi = CP$,得 C 为曲率中心.

(3) $\frac{a\rho}{as} = \cos\psi$（$s$ 为从原点量起的弧长）.

因此，若从原点（$\rho = 0$）以量弧，就得 $\rho = S\cos\psi$. 但 $\rho = PT\cos\psi$，所以 $PT = S$.

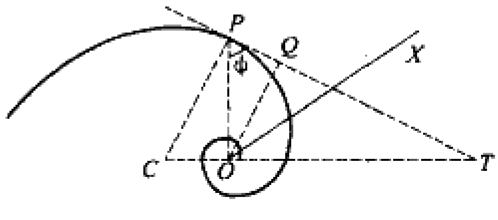


图 1

(4) 若 QQ' 为第一正垂趾曲线的切线，$\angle Q'QO = \angle QPO = \psi$. 故得第一正垂趾曲线为一等角螺线；并其他垂趾曲线都为相等的螺线.

(5) 因 PC 是一条切线，切渐缩线于点 C，又 $\angle OCP = \psi$. 故第一渐缩线及其他渐缩线都是相等的螺线.

(6) 同样得逆性质，及关于极点的倒极线，都是相等的螺线.

(7) 因 $\frac{\rho\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}p} = \tan\psi$，故 $\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \cot\psi\mathrm{d}\theta$，及极方程为 $\rho = a\mathrm{e}^{\theta\cot\psi}$.

(8) 若对数螺线沿一条直线滚卷，就得极点的轨迹以及切点之曲率中心的轨迹，皆是一条直线.

❖无穷远线

6. 在平面上有几根无穷远线？（提出人：黄喜泽）

答　在平面上，任意的两条平行线都相交于无穷远点. 一切的无穷远点都在无穷远线上. 所以无穷远线只有一条. 这是数学家们为了对付问题的方便，且有系统性的把它来定义的.

1956年4月号小知识解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:广州华南师院附中高一红色数学研究小组.

解答第1,2,4,5,6题者:王思训.

解答第1,2,3,4题者:裘宗沪,俞忠元.

解答第1,2,4,6题者:喻畯.

解答第1,3,5,6题者:江荣禧.

解答第4,5,6题者:浦祖康,罗以勤.

解答第1,5题者:王忠坤,济南六中高二(一)数学爱好者,马丁圆.

解答第1,6题者:许令誉.

解答第4,5题者:唐会之.

解答第5,6题者:朱鑫华,田洁.

解答第1题者:侯辅元,王裕灏,陈兴昭,周兴武,乐伟达,江苏安亭师范二甲数学兴趣小组.

解答第5题者:盛沛根,盛沛栋,王忠坤,白宏阁,朱维平.

解答第6题者:张辅华,李秀琴,李荣谦,朱伟,张国定.

1956 年 5 月号问题征解解答

❖节省材料

1. 要用最节省的材料，制成下面两件东西：

(1) 一个圆柱形的食品罐头，容积为 V 立方寸，问高与底的半径各是多少？

(2) 一块矩形的板子（图 1），面积为 A 方尺，在上下两方各镶边 a 寸，左右两方各镶边 b 寸，问长和宽各是多少？（提出人：广州 杨衍机，上海 龚晨）

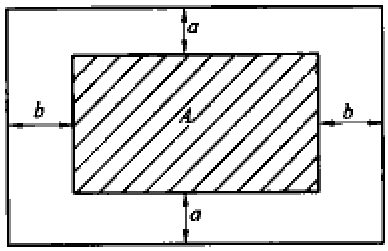


图 1

答 (1) 分为两种情形来讨论.

Ⅰ. 当罐头是有盖时.

设圆柱形的底面半径为 R 寸，高为 H 寸，表面积为 A 方寸，得

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi RH \qquad ①$$

$$V = \pi R^2 H,\text{即 } H = \frac{V}{\pi R^2}$$

以 H 代入①，得

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

$$\frac{dA}{dR} = 4\pi R - \frac{2V}{R^2},\frac{d^2A}{dR^2} = 4\pi + \frac{4V}{R^3} > 0$$

求极小值，令 $\frac{dA}{dR} = 0$，即 $4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0$，即 $2R = \frac{V}{\pi R^2}$（寸）（$= H$）.

所以 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$（寸），$A = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$（方寸）.

这就是说当罐头是有盖时，它的底面直径要等于高（都等于 $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ 寸），所用材料最为节省.

Ⅱ. 当罐头是无盖时.

$$A = \pi R^2 + 2\pi RH = \pi R^2 + \frac{2V}{R} \cdot \frac{dA}{dR} = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}$$

$$\frac{d^2A}{d^2R} = 2\pi + \frac{4V}{R^3} > 0$$

求极小值,令$\frac{dA}{dR}=0$,即 $R=\frac{V}{\pi R^2}$(寸)($=H$).

所以 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$(寸),$A=3\sqrt[3]{\pi V^2}$(方寸).

这就是说,当罐头是无盖时,它的底面半径要等于高(都等于$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$(寸)),所用材料最为节省.

(2) 设矩形板子镶边后的面积为 S 方尺,纵长为 x 寸,横宽为 y 寸,那么

$$S\text{ 方尺}=100S\text{ 方寸}=xy\text{ 方寸} \quad ②$$

依题意$(x-2a)(y-2b)=100A$,得

$$y=2b+\frac{100A}{x-2a} \quad ③$$

以 ③ 代入 ②

$$100S=2bx+\frac{200aA}{x-2a}+100A \quad ④$$

即

$$S=\frac{bx}{50}+\frac{2aA}{x-2a}+A \quad ⑤$$

将 ⑤ 的两端对 x 微分,且取值为 0

$$\frac{dS}{dx}=\frac{b}{50}-\frac{2aA}{(x-2a)^2}=0 \quad ⑥$$

得 $x=x_0=\left(2a+10\sqrt{\frac{aA}{b}}\right)$(寸),$y=y_0=\left(2b+10\sqrt{\frac{bA}{a}}\right)$(寸),由于 $\left.\frac{d^2S}{dx^2}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{4aA}{(x-2a)^3}\right|_{x=x_0}>0$,故知 $S_0=x_0y_0$ 是极小值.

❖连续整数的方程

2. 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为连续的整数,试解方程

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=213$$

(提出人:四川隆昌 黄远视)

解 $x_1+(x_1+1)+(x_1+2)+\cdots+(x_1+n-1)=231$,即

$$nx_1+\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}=231$$

即 $2x_1+(n-1)=\frac{462}{n}$,即

$$2x_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{n} - (n-1)$$

式中 x_1 及 n 是整数，得 $2x_1$ 及 $n-1$ 亦是整数. 所以$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{n}$必是整数. 因此知道 n 不能含有 1,2,3,7,11 以外的因子. 今分别令 n 为:

1,2,3,6,7,11,14,21,22,33,42,66,77,154,231,462

依次代入 $2x_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{n} - (n-1)$，得到 16 组解答如下:

231(这组只一个数);115,116;76,77,78;36,37,38,…,41;30,31,32,…,36;16,17,18,…,26;10,11,12,…,23;1,2,3,…,21;0,1,2,…,2(这组同前); -9, -8, -7,…,23; -15, -14, -13,…,26; -29, -28, -27,…,36; -35, -34, -33,…,41; -75, -74, -73,…,78; -114, -113, -112,…,116; -230, -229, -228,…,231.

❖两圆正交

3. 如图 2，设 $ABCD$ 为圆的内接四边形. BA，CD 延长线的交点为 P；AD，BC 延长线的交点为 Q. BD，AC，PQ 的中点各为 X，Y，Z. 试证: 以 PQ 及 XY 为直径的两个圆互相正交.（提出人:山东 何俊若）

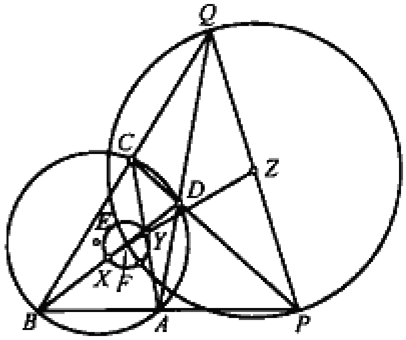


图 2

证法 1 因为 X，Y，Z 各为 BD，AC，PQ 的中点，根据牛顿定理: X，Y，Z 是共线的.

又据卡黎(Carre)定理: $2YZ : PQ = PQ : 2XZ$，即$\left(\frac{PQ}{2}\right)^2 = XZ \cdot YZ$(证明见下).

设以 PQ 为直径，Z 为心，作圆 PMQ；又以 XY 为直径，F 为心，作圆 XMY. 两圆相交于 M. 联结 ZM 作线. 由上知 ZM 是圆XMY 的切线，且 ZM 是圆PMQ 的半径.

再联结 F 与 M 作线，就得 $FM \perp ZM$. 故两圆 PMQ 与 XMY 是互相正交的.

(附证) 卡耳定理: 如图 3，延长 QY，令 $YQ' = YQ$，得

$$AQ' \mathrel{\underline{\parallel}} CQ \text{ 且 } \angle Q'AB = \angle ABC$$

但 $\angle Q'AP + \angle Q'AB = 180°$，$\angle ADC + \angle ABC = 180°$，故

$$\angle Q'AP = \angle ADC = \angle PDQ$$

又 $\triangle ACP \backsim \triangle DBP$，得

$$AC : DB = AP : DP$$

$$\triangle ACQ \backsim \triangle DBQ$$

得

$$AC : DB = CQ : DQ$$

于是 $DP : DQ = AP : CQ = AP : AQ'$，得

$$\triangle DPQ \backsim \triangle APQ'$$

所以

$$AC : DB = AP : DP = PQ' : PQ = 2YZ : PQ'$$

同样，$DB : AC = 2XZ : PQ$.

所以

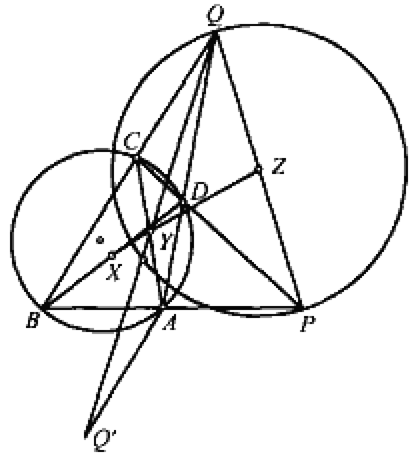


图 3

$$AC : BD = 2YZ : PQ = PQ : 2XZ$$

证法 2　如图 4，设圆 ABC 的圆心为 E，圆 XMY 的圆心为 F. 两圆 XMY 与 PMQ 的交点为 M. 连接 FM. 自 E 作半径 EL，交 ZM 于 K. 再连接半径 EG，EH 作线.

在 $\triangle EGK$ 与 $\triangle EHK$ 中，$\angle EGK = \angle EHK$，$EG = EH$，EK 公用.

所以 $\triangle EGK \cong \triangle EHK$，所以 $\angle EKG = \angle EKH$.

因为 GH 是一条直线，所以 $EL \perp ZK$.

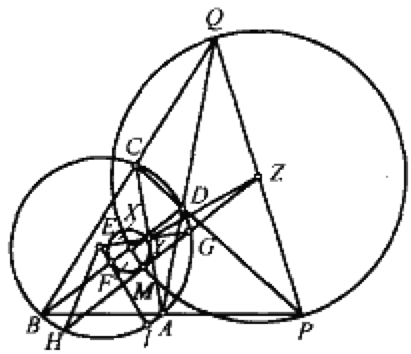


图 4

又因为 $EL \parallel FM$，所以 $FM \perp ZM$，即两圆 XMY 与 PMQ 互相正交.

❖无穷项方程

4. 解方程：$\sqrt{3}\left(\frac{1}{3!}+\frac{x^4}{7!}+\frac{x^8}{11!}+\cdots\right)x^3+\left(\frac{1}{2!}+\frac{x^4}{6!}+\frac{x^8}{10!}+\cdots\right)x^2-\sqrt{3}\left(\frac{1}{1!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^8}{9!}+\cdots\right)x-\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots\right)=0$.（提出人：上海 龙运佳）

解　将原式第一项和第三项的 x 乘入括号内，相加得

$$-\sqrt{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots\right)=-\sqrt{3}\sin x \qquad ①$$

又将第二项和第四项相加得

$$-\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots\right)=-\cos x \qquad ②$$

① + ② 得 $-\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$，即$\sqrt{3}\sin x=-\cos x$.

当 $\cos x\neq 0$ 时，$\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故 x 的主值为$\frac{\pi}{6}$，$x=n\pi-\frac{\pi}{6}$(式中 n 为正负的整数).

1956 年 5 月号问题征解解答者名单

解答第 1,2,4 题者:史树中,包廷钊.

解答第 2,4 题者:徐孝舜.

解答第 1,2,4 题者:刘志仁,吴方成,棣彰芽,程鸿飞.

解答第 2,3,4 题者:上海延安中学数学小组高二丙分组,陈亚文,程海杰,马慎余,上海和平中学高三(2) 数学小组.

解答第 1,2 题者:王冠闽,刃立,海术,金立,叶希孟,朱湘南.

解答第 1,4 题者:刘缉荣,杨永靖,刘志强,卢美兴.

解答第 2,3 题者:葛元冲.

解答第 2,4 题者:叶秀朋,龚介民,黄民胜,黄志海,吴顺唐,宁波一中,吴刚良.

解答第 3,4 题者:浦祖康,程晓峰,江荣禧,朱思铭.

解答第 1 题者:王槐钰,范尚武,范景星,钱宗玉,于淇,曹家鼎,石新轮,程家骅,纪汉光.

解答第 2 题者:黄浩如,于汝强,刘相,陈屏虚,张天民,章润生,李秀琴,陆万全,孙志坚,陈道新,蔡德畲,范崇星,彭祖仁,孙庆昌,朱平,马殿荣,陈继祖,洪毅,张鸿林,上海敬业中学高三(1) 数理小组,胡晖,韩绍辉,过伯祥,王明亮,赵可祥,林国华,袁国兴,汤维成,刚正实,刘有智,彭承衡,吕启龙,张有紘,周维康,潘咸按,陈剑豪,陆志方.

解答第 3 题者:何俊若,罗巴切夫斯基数学小组林文.

解答第 4 题者:徐亦萍,周小青,田净,张禄度,徐从德,徐自新,辛开河,姚忠英,黄水源,施裕猋,王元康.

1956 年 5 月号小知识问题答案

❖投针

1. 什么叫做投针问题?(提出人:天津 戴锦锟)

答 投针问题是一个觉得很古怪的问题,用来可以计算圆周率 π 的近似值. 方法是这样的(图 1):先预备一些小针,约长 20 mm,最好把针端去掉,使针的全长有同样的粗细. 另外在一张白纸上,画出许多平行线,各线间的距离等于两倍的针长,弄好之后,把针从任意的高处落下,但不要使针跳动,当针落下后,与任意一条平行线相交,就记下一次. 若相交两次,就记下两次. 这样进行了许多次,投掷次数以愈多为愈好,投完之后,如果把投掷的总次数除以相交的次数,所得结果就是 π 的近似值,它的近似程度非常可观!

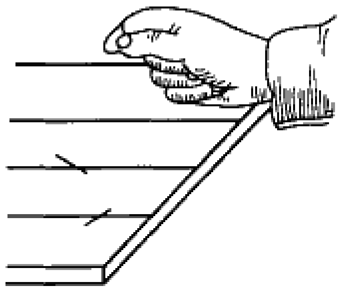


图 1

为什么会有这样的结果呢?一定是巧合的吧!不是的,它有不可抗拒的真理. 我们首先假定针与直线最可能相交的次数为 k,针长为 20 mm. 针和直线相交时,这个交点一定是在这 20 mm 中的一处,而且这 20 mm 的任意一毫米都不会有比别一毫米更优越的机会. 因此每一毫米最可能与直线相交的次数应该是 $\frac{k}{20}$. 现在如果针上某段长 5 mm,这一段可能相交的次数是 $\frac{5k}{20}$. 如果是 9 mm,这一段可能相交的次数是 $\frac{9k}{20}$. 换句话说,最可能相交的次数是与针的长度成正比例.

这个比值,即使针变成弯曲时,也同样是对的. 如果针折成了一头是 11 mm,另一头是 9 mm,那么第一头可能相交的次数应为 $\frac{11k}{20}$,另一头应为 $\frac{9k}{20}$,而对于全针是 $\frac{11k}{20}+\frac{9k}{20}=k$,即可能相交的次数仍等于 k. 我们自然还可以弯曲得更厉害一些,相交的次数也不会因而发生改变. 不过投掷弯针时,可能有同时在几处和直线相交,在那样的情况下,必须把每一次的交点数都要计算在内,因为它们是代表每一次相交的.

现在我们再来作一次假定，投掷的针弯成一个圆环形，它的直径恰好与纸上两条相邻平行直线间的距离相等.这个圆环每次投掷下来，就会和一条直线相交两次，或者和两条相邻直线相切，此外再没有第三种情形.假定投掷的总数是 n，它的相交次数是 $2n$.我们起先投掷的直针长度要比圆环短.针长与圆环长的比，等于这圆环的半径与圆环周长的比值，就是说，等于$\frac{1}{2\pi}$.但我们方才已经确定出最可能的相交次数与针长成正比例.因此我们这针的最可能相交次数 k 也应和 $2n$ 与 2π 的比，即等于$\frac{n}{\pi}$.既然 $k=\frac{n}{\pi}$，所以 $\pi=\frac{n}{\pi}=\frac{\text{投掷次数}}{\text{相交次数}}$.

这样我们不用作图仪器，就可以用实验的方法得到 π 的大约近似值来.

不过在实验时，要注意的，投掷的次数需要做几千次.若只投几十次是不会得到结果的，在十九世纪中叶，有瑞士天算家服尔夫，曾经做过 5 000 次的投掷，结果得到 π 的近似值为 3.159…，只比真实数值稍有逊色.

❖斐波那契问题

2.什么叫做斐波那契问题?斐波那契级数?斐波那契数?三者间有怎样的关系?(提出人:绍兴 施荫锐)

答　意大利比萨有一个数学家，名字叫做斐波那契.他在 1228 年所写的一本 数学书中有下面的问题:

假定一对兔子，每一个月可以生下一对兔子，并且兔子在生出两个月以后，就具有生殖能力.问一年后可以繁殖多少对兔子?

这叫做斐波那契问题，各月后兔子的对数列表 1.

表 1

几月后	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
兔子对数/对	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

一对兔子，一个月后生出一对，总数是 2 对，二月后，原先的兔子又生出一对，加上一月的 2 对，总数是3 对，三月后，一月的 2 对生出 2 对，加上二月的 3 对，总数是 5 对.以下类推，所以十二月后，共繁殖的兔子(连同原先的 1 对)是 377 对.

上列问题也可换为下面的说法(图 2):

假如一棵树，经过一年之后，生出一条新枝，然后休息一年，再下一年又生出一条新枝，并且每条树枝生出新枝，都是按着这个规律.那么这棵树在第一年后有 2 枝，第二年后有 3 枝，第三年后有 5 枝，这样的树枝生长法也和兔子繁殖

法相同.

上面两个问题,如将每月的兔子数或每年的树枝数,写成级数的各项.令首项为 u_1,第二项,第三项,…… 写为 $u_2,u_3,\cdots$,就得:

$$u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n (n \geqslant 1)$$

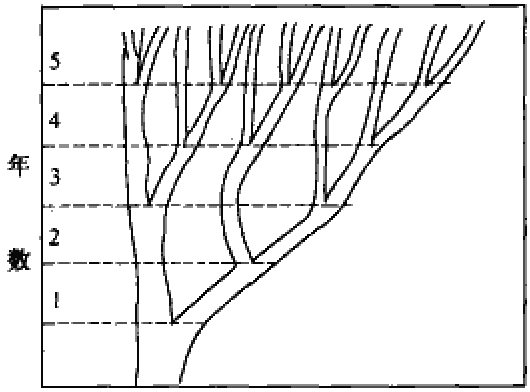


图 2

像这样,由诸项 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_m,\cdots$ 所成的级数,其中第三项以后的每一项,都等于紧接着它的前面两项的和.类似这样的级数叫做斐波那契级数.它的各项叫做斐波那契数,所以斐波那契级数和斐波那契数是从斐波那契问题中来的.而斐波那契问题只是斐波那契级数的特例.

斐波那契数有些奇异性质:

(1) 最初 n 个斐波那契数的和为

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$$

(2) 附标是奇数的 n 个斐波那契数的和为

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$$

(3) 附标是偶数的 n 个斐波那契数的和为

$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

(4) 正负相间的 n 个斐波那契数的代数和为

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1$$

(5) 最初 n 个斐波那契数的平方和为

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

(6) 第 $n+m$ 个斐波那契数为

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$$

(7) 第 $n+1$ 个斐波那契数的平方为

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n$$

斐波那契数在数论上有下列的性质:

(1) 相邻的两个斐波那契数是互质数.

(2) u_n 为 u_m 除尽的充要条件是 n 为 m 所除尽.

(3) 任意给一个正整数 m,那么在前面 m^2 个斐波那契数中,必有一个能被 m 除尽.

❖类似中线

3. 什么叫做类似中线?类似重心?(提出人:余姚 邵丁)

答 反平行于三角形的对边,任意作一条直线,求得那条直线的中点之轨迹,就叫做类似中线. 换句话说,从三角形的角顶,向对边的中点所作的直线,叫做中线. 从三角形的角顶,向对边之反平行线的中点所作的直线,叫做类似中线.

又类似中线也可说是关于三角形之中线的等角共轭线(即 $\angle A$ 的类似中线与边 AB 所成的角,等于 $\angle A$ 的中线与边 AC 所成的角).

在三角形里,因为边有三条,故类似中线也有三条. 这三条线相交于一点,叫做类似重心. 这点在英国和法国称曰,勒穆瓦纳(Lemoine)点,在德国称曰格雷贝(Grebe)点. 它有这样一个性质:在三角形里的类似重点至各边的距离,与各边之长成正比例.

至于在多边形里,从某点至各边的距离与各边之长成正比例时,那点称曰多边形的类似重心. 而那边的多边形,称曰调和多边形.

❖格

4. 什么叫做格(Lattice)?(提出人:南京 张立)

答 格是画着一些格子或网状用来以研究数学的图形. 它的起源本甚简单,后来发展成为数学中一个重要分支,叫做格论.

格论的进展,分做三个阶段. 第一阶段,从 1847 年布尔(Boole) 刊行逻辑的数理解析一书开始,有好些数理逻辑者对于布尔代数学及其相关代数学做了些假设解析的工作. 他们的结果可在施罗德(Shröder) 名著《逻辑代数学》(1890—1895) 中找到,亦散见于怀特海(Whitehead) 和罗素所著的《数理原理》书中.

第二阶段从范德瓦尔登(van der Waerden) 刊行《近世代数学》后的第二年

开始.在1933年至1937年之间有些论文为伯克霍夫(Birkhoff),冯·诺依曼(von Neumann),奥勒(Ore),斯通(Stone),康托洛维奇(Kantorovitch)诸人所发表.他们证明布尔代数学能推广到格论.这样对于应用方面,更见宽宏,无论是近世代数学,射影几何学,点集论,函数解析,以及逻辑学,几率论等,都变为所浸入的对象.其中有些结果,可在戴德金(Dedekind),门格尔(Menger),塔尔斯基(Tarski),克莱因(Klein)诸人的作品中看到.1939年伯克霍夫著有《格论》,就是总结并扩张这些人成果的专书.

从此以后,可称作第三阶段.格论被认为近世代数学的紧要分支,有不少数学工作者从事这方面的研究.例如狄尔威(Dilworth),弗立克(Frink),塔斯契,威特曼(Whitman)等,就是丰富格论的内容,而使它更向前进的人氏.

1948年伯克霍夫《格论》的第二版出世,比较他的初版,内容增加了一倍.1952年经苏联人格雷瓦重译为俄文.

❖绝对微积分

5.什么叫做绝对微积分?(提出人:青岛 乐立中)

答 绝对微积分是最适宜于研究黎曼几何及张量计算的工具,而黎曼几何与张量计算是从欧几里得三维空间的微分几何,进而学习高深的多维空间的微分几何的桥梁.自从1887年里奇(Ricci)创用张量算法建立完美且容易了解的符号,使解析学,几何学,物理学各方面都便于采用.黎曼几何所研究的范围,因之大加推广.1913～1916年爱因斯坦以四维黎曼空间为基础,以张量算法为工具,发表他的普遍相对论理论,更造成了研究张量算法与黎曼几何的绝大动力.罗马大学力学教授雷微西威塔(Lovi-civita)首著《绝对微积分学》,就是叙述黎曼几何与张量算学的名著,其中还包括有力学和几何光学方面的相对论.

1956年5月号小知识解答者名单

解答第1,2,3题者:李方钥,储鹏程,黄志海,刚证实,刘有智,乐伟达,刘相.

解答第1,2题者:郑玮.

解答第1,3题者:上海延安中学数学小组高二丙分组.

解答第2,3题者:浦祖康,鲜于方圣,江荣禧,姚忠英.

解答第2,5题者:栾立中.

解答第1题者:夏业勋,王志刚,刘平东,王大吉.

解答第2题者:湖南湘乡云居小学,冯输翘,刘洛克,张天民,周兴武,王普,李荣谦,王冠闽,棣彰芽.

解答第3题者:喻畯,马丁圆,谢宝林,张先觉,朱伟,张国定.

1956年6月号征解问题答案

❖用数码组成数

1. 用十个数码0,1,2,…,9来组成一些数,每个数中所含同样的数码只许出一次,并有下列的性质:

(1) 选出四个数码来组成四位的数同时能够被2,3,4,5,9,10整除. 问这样的数有多少个?

(2) 组成几个数,使它们的和等于99. 问这样的数,应该怎样组成法?(提出人:湛江 于淇)

解 (1) 一个数能够被2,3,4,5,9,10整除,只需能够被4,9,10整除就行. 一个数能够被10整除,它的末位数必为0. 一个数末位为0而又能够被4整除,那么十位数必为偶数. 因此末两位数是20,40,60,80,现在所求的四位数能够被9整除,所以前三位的和一定是9的倍数. 在此分出两种情形:

Ⅰ. 设三位数的和是18,得组成数为

9 720,7 920;9 540,5 940,8 640,6 840;9 360,3 960,8 460,4 860,7 560,5 760;9 180,1 980,7 380,3 780,6 480,4 680. 凡18种.

Ⅱ. 设三位数的和是9,得组成数为

6 120,1 620,4 320,3 420;3 240,2 340;2 160,1 260. 凡8种.

所以,合于题意的组成数,共有 $18+8=26$(种).

(2) Ⅰ. 用十个数码的组成数.

因为 $0+1+2+3+\cdots+9=45, 99-45=54$.

依题意,用十个数码组成诸数之和等于99,所以它们的十位数值之和只能是6. 这就是说,使它们的个位数值之和6变成60就得了. 在此分出三种情形:

A. 设十位的数码为6,得组成的数为

$60+1+2+3+4+5+7+8+9=99$,只有1种.

B. 设两个十位数的数码为1,5或2,4,得组成的数为

$$10+52+3+4+6+7+8+9=99 \quad ①$$

$$50+12+3+4+6+7+8+9=99 \quad ②$$

$$20+41+3+5+6+7+8+9=99 \quad ③$$

$$40 + 21 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99 \quad ④$$

在式 ① 中的十位数码 5,可分别放在 2,3,4,6,7,8,9 之前,因此有 7 种.同样 ②③④ 亦各有 7 种.结果得这样的组成数有 28 种.

C.设三个十位数的数码为 1,2,3,得组成的数为

$$10 + 24 + 35 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99 \quad ⑤$$

$$20 + 14 + 35 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99 \quad ⑥$$

$$30 + 14 + 25 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99 \quad ⑦$$

在式 ⑤ 中,设含有数码 0 的数固定为 10,十位数码 2 分别放在 4,5,6,7,8,9 六个数之前,十位数码 3 再分别放在 2 选定之后,因此有 30 种.同样 ⑥⑦ 亦各有 30 种.结果得这样的组成数有 90 种.

所以,用十个数码的组成数有 $1 + 28 + 90 = 119$(种).

Ⅱ.用九个数码的组成数有 225 种.

Ⅲ.用八个数码的组成数有 136 种.

Ⅳ.用七个数码的组成数有 346 种.

Ⅴ.用六个数码的组成数有 271 种.

Ⅵ 用五个数码的组成数有 147 种.

Ⅶ.用四个数码的组成数有 51 种.

Ⅷ 用三个数码的组成数有 8 种.

所以,共有的组成数为 $119 + 225 + 136 + 346 + 271 + 147 + 51 + 8 = 1\,303$(种).

在这些组成数中

十位数码之和为 60,个位数码之和为 39 的组成数有 331 种
十位数码之和为 70,个位数码之和为 29 的组成数有 363 种
十位数码之和为 80,个位数码之和为 19 的组成数有 463 种
十位数码之和为 90,个位数码之和为 9 的组成数有 146 种
}共 1 303 种.

若把这些组成数分为用有数码 0 与否的两类,就得

用有 0 的组成数有 558 种
不用 0 的组成数有 745 种
}共 1 303 种.

各样的组成数列表如表 1.

表 1

用十个数码者 119 种		
十位数	个位数	种数
6(作 60)	1,2,3,4,5,7,8,9	1

续表 1

1(作 10),5	2,3,4,6,7,8,9	28
2(作 20),4	1,3,5,6,7,8,9	
4(作 40),2		
5(作 50),1	2,3,4,6,7,8,9	
1(作 10),2,3	4,5,6,7,8,9	90
2(作 20),1,3		
3(作 30),1,2		

用九个数码者 225 种

十位数	个位数	种数
6	1,2,3,4,5,7,8,9	8
1,5	2,3,4,6,7,8,9	84
2,4	1,3,5,6,7,8,9	
1,2,3	4,5,6,7,8,9	120
7(作 70)	1,2,3,4,5,6,8	1
1(作 10)	2,3,4,5,7,8	12
6(作 60)		

用八个数码者 136 种

十位数	个位数	种数
7	1,2,3,4,5,6,8	7
1,6	2,3,4,5,7,8	30
7(作 70)	1,2,3,6,8,9	3
	1,2,4,5,8,9	
	2,3,4,5,6,9	
1(作 10),6	2,3,7,8,9	10
	3,4,5,8,9	
2(作 20),5	1,4,7,8,9	10
	3,4,6,7,9	
3(作,30),4	1,5,6,8,9	10
	2,5,6,7,9	

续表 1

4(作 40),3	1,5,6,8,9	10
	2,5,6,7,9	
5(作 50),2	1,4,7,8,9	10
	3,4,6,7,9	
6(作 60),1	2,3,7,8,9	10
	3,4,5,8,9	
1(作 10)2,4	5,7,8,9	36
2(作 20)1,4		
4(作 40)1,2		
用七个数码者 346 种		
十位数	个位数	种数
7	1,2,3,6,8,9	18
	1,2,4,5,8,9	
	2,3,4,5,6,9	
1,6	2,3,7,8,9	40
	3,4,5,8,9	
2,5	1,4,7,8,9	40
	3,4,6,7,9	
3,4	1,5,6,8,9	40
	2,5,6,7,9	
1,2,4	5,7,8,9	24
8(作 80)	1,2,3,4,9	4
	1,2,3,6,7	
	1,2,4,5,7	
	1,3,4,5,6	
1(作 10),7	2,3,5,9	12
	2,3,6,8	
	2,4,5,8	

续表 1

2(作 20),6	1,3,7,8	12
	1,4,5,9	
	3,4,5,7	
3(作 30),5	1,2,7,9	12
	1,4,6,8	
	2,4,6,7	
5(作 50),3	1,2,7,9	12
	1,4,6,8	
	2,4,6,7	
6(作 60),2	1,3,7,8	12
	1,4,5,9	
	3,4,5,7	
7(作 70),1	2,3,5,9	12
	2,3,6,8	
	2,4,5,8	
1(作 10),2,5	3,7,9	18
	4,6,8	
	4,7,8	
1(作 10),3,4	2,8,9	12
	5,6,8	
2(作 20),1,5	3,7,9	18
	4,6,9	
	4,7,8	
3(作 30),1,4	2,8,9	12
	5,6,8	
4(作 40),1,3	2,8,9	12
	5,6,8	

续表 1

5(作 50),1,2	3,7,9	18
	4,6,9	
	4,7,8	
7(作 70)	1,5,6,8,9	2
	3,4,5,8,9	
1(作 10),6	5,7,8,9	16
3(作 30),4		
4(作 40),3		
6(作 60),1		
用六个数码者 271 种		
十位数	个位数	种数
8	1,2,3,4,9	20
	1,2,3,6,7	
	1,2,4,5,7	
	1,3,4,5,6	
1,7	2,3,5,9	36
	2,3,6,8	
	2,4,5,8	
2,6	1,3,7,8	36
	1,4,5,9	
	3,4,5,7	
3,5	1,2,7,9	36
	1,4,6,8	
	2,4,6,7	
1,2,5	3,7,9	18
	4,6,9	
	4,7,8	
1,2,4	2,8,9	12
	5,6,8	

续表 1

7	1,5,6,8,9	10
	3,4,5,8,9	
1,6	5,7,8,9	24
3,4		
1(作 10),8	2,3,4	6
8(作 80),1		
1(作 10),2,6	4,5	4
1(作 10),3,5	2,7	
2(作 20),1,6	4,5	4
2(作 20),3,4	1,8	
3(作 30),1,5	2,7	4
3(作 30),2,4	1,8	
4(作 40),2,3		6
5(作 50),1,3	2,7	
6(作 60),1,2	4,5	
8(作 80)	1,2,7,9	7
	1,3,6,9	
	1,4,5,9	
	1,5,6,7	
	2,3,5,9	
	2,4,6,7	
	3,4,5,7	
1(作 10),7	2,8,9	9
	4,6,9	
	5,6,8	
2(作 20),6	3,7,9	6
	4,7,8	

续表 1

3(作 30),5	2,8,9	9
	4,6,9	
	4,7,8	
5(作 30),3	2,8,9	9
	4,6,9	
	4,7,8	
6(作 60),2	3,7,9	6
	4,7,8	
7(作 70),1	2,8,9	9
	4,6,9	
	5,6,8	
用五个数码者 147 种		
十位数	个位数	种数
1,8	2,3,4	18
2,7	1,3,5	
4,5	1,2,6	
8	1,2,7,9	28
	1,3,6,9	
	1,4,5,9	
	1,5,6,7	
	2,3,5,9	
	2,4,6,7	
	3,4,5,7	
1,7	2,8,9	18
	4,6,9	
	5,6,8	
2,6	3,7,9	12
	4,7,8	

续表 1

3,5	2,8,9			18
	4,6,9			
	4,7,8			
8(作 80)	3,7,9	4,6,9		2
9(作 90)	1,2,6	1,3,5	2,3,4	3
1(作 10),8	2,7	3,6	4,5	48
2(作 20),7	1,8	3,6	4,5	
3(作 30),6	1,8	2,7	4,5	
4(作 40),5	1,8	2,7	3,6	
5(作 50),4	1,8	2,7	4,5	
6(作 60),3	1,8	2,7	4,5	
7(作 70),2	1,8	3,6	4,5	
8(作 80),1	2,7	3,6	4,5	

用四个数码者 51 种

十位数	个位数	种数
9	1,2,6	9
	1,3,5	
	2,3,4	
1,8	2,7	6
	3,6	
	4,5	
2,7	1,8	6
	3,6	
	4,5	
3,6	1,8	6
	2,7	
	4,5	

续表 1

4,5	1,8		6
	2,7		
	3,6		
8	3,7,9	4,6,9	6
9(作 90)	1,8	2,7	4
	3,6	4,5	
1(作 10),8	9		8
2(作 20),7			
3(作 30),6			
4(作 40),5			
5(作 50),4			
6(作 60),3			
7(作 70),2			
8(作 80),1			
用三个数码者 8 种			
十位数	个位数		种数
9	1,8	2,7	8
	3,6	4,5	

❖各线的顺序

2. 如图 1,设 $\triangle ABC$ 中,$\angle B$ 与 $\angle C$ 为不相等的锐角. 求证:以角顶 A 所引出各线的位置顺序是:大边,中线,平分角线,高,小边.(提出人:长沙 玉炎)

证 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B > \angle C$,作 $AD \perp BC$,得 $\angle BAD < \angle CAD$,是以 $\angle A$ 的平分角线 AE 必落在 $\angle CAD$ 中,即 AE 在 AD 的右侧.

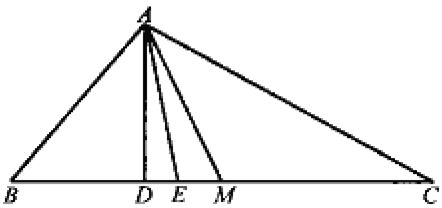


图 1

在 $\triangle BAE$ 与 $\triangle CAD$ 中,因为 $\angle BAE = \angle CAE$,AE 公用,所以 $BE < CE$,是以 BC 的

中点 M 必落在线段 CE 中，也就是 $\angle A$ 的中线 AM 又在 AE 的右侧，因得 $CM < CE < CD$，即 $CD > MD > ED$. 所以 $AC > AM > AE > AD$.

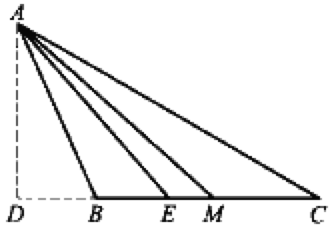


图 2

讨论 (1) 本题各线由右而左的顺序是："大边，中线，平分角线，高，小边". 在这里的小边实际上是长于高.

(2) 设 $\angle B$ 为钝角，如图 2，各线由长而短的顺序是："大边，中线，平分角线，小边，高". 在这里小边的顺序应该在高之前.

❖从郓城到兖州

3. 郓城到兖州 91 km. 甲乙丙三人以不同的时刻，不同的速度，从郓城往兖州，甲需 18 小时 12 分，乙需 15 小时 10 分，丙需 13 小时. 他们三人于出发当天的下午 5 点钟在济宁相会. 已知甲于某点 24 分钟从郓城起程，乙预定某点 20 分钟到达兖州，丙走了 0.5 km 看表时，分针恰指着 6 字. 问郓城到济宁有多少千米？他们各从什么钟点出发？又若三人再想继续行走到天津. 他们的速度不变，行走和休息的时间也相同，并已经知道郓城到天津的路程是 550 km. 问他们应该在中途相会多少次？(提出人：济南 黄英杰)

解 甲速 $= 91 \div 18\frac{12}{60} = 91 \div 18\frac{1}{5} = 91 \times \frac{5}{91} = 5\ (\text{km/h})$

乙速 $= 91 \div 15\frac{10}{60} = 91 \div 15\frac{1}{6} = 91 \times \frac{6}{91} = 6\ (\text{km/h})$

丙速 $= 91 \div 13 = 7\ (\text{km/h})$

甲于某点 24 分起程，再走 36 min，到了第一个整点（即分针第一次指 12 字），他所走的路程是

$$\frac{36}{60} \times 5 = 3\ (\text{km})$$

乙预定某点 20 分到兖州，由题已知走定郓兖全部路程要 15 小时 10 分，所以起程时是某点 10 分钟，到了第一个整点，他所走的路程是

$$\frac{50}{60} \times 6 = 5\ (\text{km})$$

丙走 0.5 km 又走 0.5 h，到了第一个整点，他所走的路程是

$$\frac{30}{60} \times 7 + 0.5 = 4\ (\text{km})$$

于是可以变更题文说："从郓城到济宁的千米数，是以 5 除余 3，以 6 除余 5，

以7除余4".因得算法如下:

以5除余3,以6及7除适尽的最小数是168;

以6除余5,以5及7除适尽的最小数是35;

以7除余4,以5及6除适尽的最小数是30.

但5,6,7的最小公倍数是210.故得从郓城到济宁的路程为

$$(168+35+30)-210=53\ (\text{km})$$

又甲乙丙三人于出发日的下午5点钟到济宁相会,即

$$\text{甲走过}\frac{53}{5}\text{点钟}=10\text{点}36\text{分钟}$$

$$\text{乙走过}\frac{53}{6}\text{点钟}=8\text{点}50\text{分钟}$$

$$\text{丙走过}\frac{53}{7}\text{点钟}=7\text{点}34\frac{2}{7}\text{分钟}$$

故甲的起程时间,是出发日的上午8点24分钟(即12点-10点36分-5点);乙是上午8点10分钟;丙是上午9点$25\frac{5}{7}$分钟(即9点25分$42\frac{6}{7}$秒钟).

再者他们三人若再继续行走,因为速度不同,相距将逐渐地疏远,所以除出发日相会一次外,以后不可能再在中途相会了.

❖余弦的等式

4.试证:$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}\cos\frac{11\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}$.(莫斯科大学入学试题)

证　左边 $=\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\left(-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{5}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2=$

$$\frac{1}{2^2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2=$$

$$\frac{1}{4}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}\right)^2=\frac{1}{4}\left[1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2=$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{8-6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+2}{8}\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

右边 $=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}\left(-\cos\frac{4\pi}{15}\right)\left(-\cos\frac{2\pi}{15}\right)=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{5}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left[\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)-\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right]=$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

❖图证倍角函数

5. 试用图证明：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$.（提出人：杭州沙永正）

证法1　以 A 为心，R 为半径作圆 CBP，令 $\angle CAB=\theta$，$\angle CAP=2\theta$，得

$$\sin 2\theta=\frac{PE}{R}=\frac{PG}{R}+\frac{GE}{R}$$

由 $\triangle PGF\backsim\triangle ADB$，得

$$PG=\frac{PF\cdot AD}{R}=\frac{BD\cdot AD}{R},\frac{PG}{R}=\frac{BD}{R}\cdot\frac{AD}{R}=\sin\theta\cos\theta$$

由 $\triangle FAH\backsim\triangle BAD$，得

$$FH(=GE)=\frac{BD\cdot AF}{R},\frac{GE}{R}=\frac{BD}{R}\cdot\frac{AF}{R}=\sin\theta\cos\theta$$

所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.

又 $\cos 2\theta=\frac{AE}{R}=\frac{AH}{R}-\frac{EH}{R}$，由 $\triangle FAH\backsim\triangle BAD$，得

$$AH=\frac{AD\cdot AF}{R},\frac{AH}{R}=\frac{AD}{R}\cdot\frac{AF}{R}=\cos^2\theta$$

由 $\triangle PGF\backsim\triangle ADB$，得

$$GF(=EH)=\frac{PF\cdot BD}{R},\frac{EH}{R}=\frac{PF}{R}\cdot\frac{BD}{R}=\sin^2\theta$$

所以 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$.

讨论　本题的 2θ，可以在第一，二，三，四各象限，如图3中(a)至(d)所示，所得的结果全同.

证法2　设 ABA' 为半圆周，AA' 为直径，C 为圆心，$\angle CAB=\theta$，联 BC，BA'. 过 B 作 $BD\perp AA'$，那么 $\angle BCD=2\theta$. 因为 $\angle A'BD$ 及 $\angle BAA'$ 都是 $\angle BA'D$ 的余角，所以 $\angle A'BD=\theta$.

$$\sin 2\theta=\frac{BD}{BC}=\frac{2BD}{2BC}=\frac{2BD}{AA'}=2\frac{BD}{AB}\cdot\frac{AB}{AA'}=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \frac{CD}{BC} = \frac{2CD}{AA'} = \frac{CD + CD}{AA'} = \frac{(AD - AC) + (A'C - A'D)}{AA'} =$$

$$\frac{AD - DA'}{AA'} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{AA'} - \frac{DA'}{A'B} \cdot \frac{A'B}{AA'} =$$

$$\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

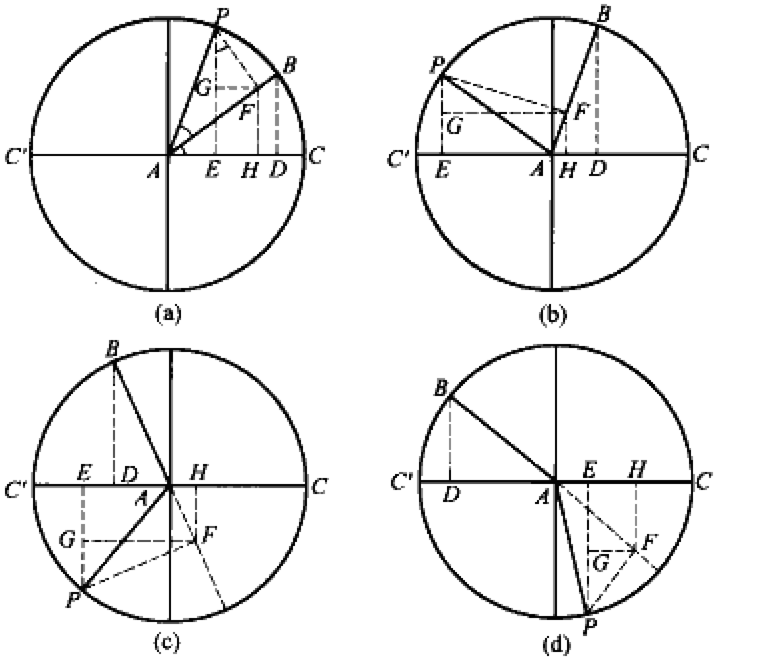


图 3

注　在图 4 中所证的 θ 是小于直角.但原倍角公式,当 θ 大于直角时仍是真实的.

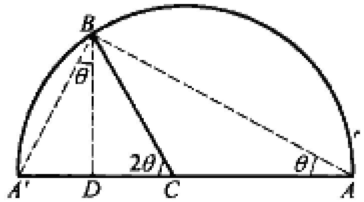


图 4

❖含 i 的方程

6. 试解方程:$e^{i^\theta} = i^i$.(提出人:广州 肖覆崐)

解
$$i^\theta = i^i \ln i = i^i\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi i$$

$$i^{\theta - i - 1} = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi, (\theta - i - 1)\ln i = \ln\left[\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\right]$$

所以

$$\theta = 1 + \mathrm{i} + \frac{\ln\left[\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\right]}{\ln \mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i} + \frac{\ln\left[\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\right]}{\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi \mathrm{i}} =$$

$$1 + \mathrm{i} - \frac{\mathrm{i}\ln\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi}{\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi}$$

1956 年 6 月号问题征解解答者名单

解答第 2,3,4,5 题者:张立,李华康,忻华泰,叶秀明,广州市十三中高三(3) 数学小组,彭生,德华,广州华南师院附中高一红色数学研究小组,上海格致中学高三进军数学小组,吴家驹,陈俊本.

解答第 2,3,5,6 题者:朱思铭.

解答第 2,4,5,6 题者:过伯祥,吴顺唐.

解答第 2,3,5 题者,喻畯,李家钱,陈贵元,彭公诘,李维平,陶醒民.

解答第 2,4,5 题者:侯文正,浦祖康,冯翰翅,李亚君,梁崇正,唐永宇,陈文浩,张之中,王光烈,汪建华,张鸿林,徐自新,丁双喜,郑鹏洲,黄水源,孙义鹄,江荣禧,方耀森,张斐慕,李泽勋,史树中,黄家骏,辛开河,黄树森,楼宇同,刘志仁,顾凡及,吕云仙,贾宗光,丁达夫,沈阳五中高二(3) 数趣小组,亭峰,陆志方,陈锦飞,吴泽藩,任奉祥,段明惠,裘宗沪,俞忠元,任孝瑛,朱湘南.

解答第 2,5,6 题者:汤正谊.

解答第 3,4,5 题者:王冠闽.

解答第 4,5,6 题者:居德华,棣彰芽.

解答第 2,3 题者:王明亮,陈道新,汤春潮,姚冬青.

解答第 2,4 题者:朱士光,梁杰英,马殿荣,王效生,晏金铎.

解答第 2,5 题者:潘逢乙,李秀琴,王国俊,吴冠义,刘相,朱步陶,胡晖,孙桓,杨振山,朱伟,龚世杰,洪毅,殷作亭,陈君煦,张度毓,徐孝舜,南阳二中,刁健邦,方仁义,郭承福,王廷籍,程鸿鼎,马明,何达生,马润尧,乐伟达,林介义,张吉溥,安开桂,龚介民,徐锦鸿,冯鸣庄.

解答第 3,5 题者:熊孟周,叶希孟,陈剑豪.

解答第 4,5 题者:沙永正,李士凯,胡孝伦,李政,胡瑞炎,罗以勤,浦玉泉,丁贻峻,徐国良,思辑,柳光轩,陈剑之,胡耀堂,邹鸿斌,方博仁,洪正福,徐从德,王维宇,卢浩琳,张培忠,谢毓厚,王金桃,朱长懋,余泓扬,王裕灏,上海卢湾中学高二(1) 数学小组,梁执立,陈涵生,袁会庆,袁会福,吴刚良,戴寿祺.

解答第 2 题者:胡增义,马传东,夏瑞麟,张远燮,陈大器,曾映秋,洪笃亲,毕冀还,费栋宇,王靖华,郑万嵩,章文,白宏阁,钱立业,张宁生,韩绍辉,陆宪忠,刘家盈,储鹏程,葛元冲,张家骅,孙承贤,孙承德,汤维成,陆国华,谢尧天,唐翅健.

解答第 3 题者:王玉明,刘东椿,黄宝根.

解答第 4 题者:项云林,袁世康,胡天喜,王贤度,黄纪文,张家坚,张禄度,王锦江,丁福伦,刘汉,胡洪奎,陈坚仪,汤先礼,虞孝栋,张兴华,文寿元,孙传鼎,赵纾,唐永宁,张文宽,张钦宜,华建平,王六桥,潘秉淮,章以刚,余虹钰,曹媛珠.

解答第 5 题者:皮福生,满庭芳,胡镰百,孙瑛,徐益丰,吴伯钦,马鼎三,朱宝隆,封辅智,蒋炳铨,花业楠,唐瑜,黄子铮,胡东坡,杨如锣,邵为兴,俞善倩,仲秀美,桂炎生,蔡祖,李承鳌,薛正中,花权,田景黄,何俊若,李文孙,林从敬,黄民胜,彭祖仁,乐小春,胡培成,程王友,朱允明,俞文鮀,刚证实,沈阳五中高三二班数学小组,石成福,徐建玲,张国定,蔡尔阁,孙镜明,方廉一,陆逸平,白云亭,钰华.

1956 年 6 月号小知识问题答案

❖用数码写数

1.用九个数码 1,2,3,…,9 写成最大及最小的数,问该怎样写法?(提出人:四川内江 李敦平)

答 本题分两种情形来讨论.

(1) 若不用数学符号,便得

$$1^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}} < 123\,456\,789 < 987\,654\,321 < 12^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}} < 21^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}} < 2^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{91}}}}}}$$

在这式中,各个数值,由左至右依次递增,故最左边的一个是最小的,最右边的一个是最大的.

在此应该提出的用指数法排列时,若把 1 放在最下层,因 1 的任何次方仍是 1,所以最左边的数值只是 1,它亦可写成 $1^{234\cdots9}$ 或 $1^{987\cdots2}$.若把 1 放在最上层,对于那个数将不起任何作用,所以最右边数的最上层不宜写成 9^1 而要写成 91.

(2) 若用数学符号,便得

$$\lg\frac{1}{2!^{3!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9!}}}}}} < \lg\frac{1}{2!3!4!\cdots9!} < \lg\frac{1}{98\,765\,432} < \lg\frac{1}{23\,456\,789} < \lg\left(1^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}}\right) <$$

$$\frac{1}{98\,765\,432} < \frac{1}{23\,456\,789} < 1^{2^{3^{\cdots^{9}}}} < 9^{8^{7^{\cdots^{1}}}} < 2^{3^{4^{\cdots^{9}}}} < e^{2^{3^{4^{\cdots^{91}}}}} < e^{2!^{3!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(91)!}}}}}}$$

在这式中,各个数值亦依次递增.但我们知道,1 的对数是 0,分数或小数的对数是负数.某数 N 的对数比 N 为小,而对数的对数更小,某数 N 写成指数比 N 为大,而指数的指数更大,列成式子如下

$$\lg\lg\cdots\lg N < \lg\lg N < \lg N < N < N^{e} < e^{N} < e^{e^{N}} < e^{e^{\cdots^{e^{N}}}}$$

由这样看来,可知九个数码若用数学符号去写,所得的最大数与最小数,都是有无限多个的.

❖敷满木板

2. 有一块正方形木板 $ABCD$,长和宽都是8寸,分成64个小方格,每格的长宽都是1寸.再从它的左下角和右上角各截去1方寸,剩下的有62方寸,今要用31张小矩形纸条把它敷满,每张纸条的长为2寸,宽为1寸,问该怎样敷法?(提出人:国际友人乔治)

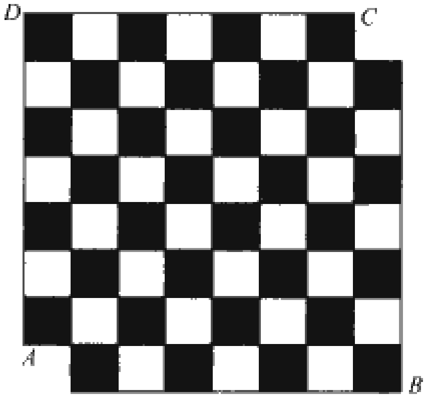


图 1

答 如图1,把木板绘成黑白相间的一些方格,今用31张纸条敷在它的上面,每张纸条都具有黑白方格各一个,因为所截去的两个角都是白方格,由图1就可看出,用那样的纸条要把木板完全敷满,是绝不可能的事情,除非把其中一张纸条剪断了.

❖黎曼和勒贝格积分

3. 什么叫做黎曼积分和勒贝格积分?(提出人:广州 叶崇正)

答 (1) 依达布定理:对于线节$[a,b]$上任何有界函数$f(x)$,达布上和与下和的极限$\overline{I}$和$\underline{I}$是常常存在的,这两个极限我们称为$f(x)$在$[a,b]$上的上积分与下积分.若上积分与下积分相等时,那么$f(x)$称为在$[a,b]$上是黎曼可积,而上下积分的公共值,称为函数$f(x)$在线节$[a,b]$的黎曼积分,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 设在可测集E上,定义了一个有界可测函数$f(x)$,用M_1,M_2表示$f(x)$在E上的下界和上界.取线节$[A,B]$($A\leqslant M_1,M_2\leqslant B$),且用点$A=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=B$分成基本部分.用$E_k$来记集$E$中使得不等式$y_k\leqslant f(x)<y_{k+1}$成立的点$x$所作成的集.显然$E=\sum\limits_{k=0}^{n-1}E_k$.同时,也容易看出,所有

集 E_k 都是可测集.由此 $m(E)=\sum_{k=0}^{n-1}m(E_k)$ 作两个和数

$$s=\sum_{k=0}^{n-1}y_k m(E_k),S=\sum_{k=0}^{n-1}y_{k+1}m(E_k)$$

这两个和数就称为勒贝格的下和及上和.当线节$[A,B]$的基本线节$[y_k,y_{k+1}]$中最大者之长 Δy 趋于0时,勒贝格和数 s 和 S 所趋向的公共极限 I 称为 $f(x)$ 在集 E 上依勒贝格意义的积分,即勒贝格积分,表示为

$$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

若集 E 就是线节$[a,b]$,亦记为$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

就上面说来,曼黎积分是定义于一段线节,勒贝格积分却定义于可测的集中,故勒贝格积分的意义,较黎曼积分广大得多.

对于有界函数,当黎曼积分存在时,勒贝格积分亦必存在,那两种积分是相等的,但对于无界函数却不是这样.事实上,有的无界函数,可能有黎曼积分而没有勒贝格积分.示例如下:

$$\text{设有函数}\begin{cases}f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x^2},\text{当 } x\neq 0\text{ 时}\\ f(0)=0,\text{当 } x=0\text{ 时}\end{cases},\text{得}$$

$$\begin{cases}f'(x)=2\left(x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\right),\text{当 } x\neq 0\text{ 时}\\ f'(0)=0,\text{当 } x=0\text{ 时}\end{cases}$$

在这里,$f'(x)$ 在含有原点0的线节上,虽成为无界函数,却是一个可量函数,又 $f(x)$ 亦不是绝对连续的.因此 $f'(x)$ 不是可以求和的.也就是说,$f'(x)$ 不能有勒贝格积分,但是有黎曼积分.

❖高次球

4.什么叫做高次球?(提出人:上海 盛沛根,盛沛栋)

答 所谓高次球,就是满足于下列方程的曲线

$$y^{m+n}=x^m(a-x)^n$$

(1)当 $m=n=1$ 时,上方程就成为普通圆的方程.

(2)当 m 为奇数时,上方程变成一个卵形

$$y^{2k+n+1}=x^{2k+1}(a-x)^n(k=0,1,2,\cdots)$$

(3) 当 $m=3,n=1$ 时，上方程变为

$$y^4=x^3(a-x)$$

这个曲线的形状如图 2 中 AB.

(4) 当 m 为偶数时，上方程表示一个高次双曲线

$$y^{2k+n}=x^{2k}(a-x)^n(k=0,1,2,\cdots)$$

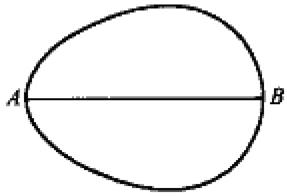


图 2

❖十二点球

5. 什么叫做十二点球?(提出人:华南师院附中高一数学研究小组)

答　十二点球有两种:

(1) 相对各棱互相垂直的四面体 $ABCD$. 从各角顶向对面所引的四条垂线是相交于一点 R，这点称为四面体的垂心. 这样的四面体，亦称做垂心四面体. 设通过这四面体的各角顶作一个球面，命它的中心为 O. 又通过各棱的中点亦作一个球面，命它的中心为 P. 在此具有下面性质的球叫做第一种十二点球(Первый шар Двенадцатый Точек).

在垂心四面体中，从垂心至各角顶作线，取其三分之一的点. 又在各面上的垂心(即从对角顶向面上所引垂线的垂足)与重心，一共有十二点，同在一个球面上.

证　如图3，从 O,P,R 各向 $\triangle BCD$ 引垂线 OE,PF,RH，得 E,F,H 各为 $\triangle BCD$ 的外心，九点圆心，垂心. 延长 AP 与 BCD 相交于 G，这点是 $\triangle BCD$ 的重心，并且 E,G,F,H 共一线上(因为外心，重心，九点圆心，垂心是共在欧拉线上的). 但 $AP=3PG$，$FH=3GF$，$EF=FH$，所以 $2GF=EG$. 取 K 为 GH 的中点，得 $GF=FK$. 过 K 作 $KQ\ /\!/\ AH$，交 PR 于 Q. 延长 GQ，交 AH 于 S. 因为 $GK=KH$，所以 $GQ=QS$. 又 $\angle AHG=90°$，所以 $QS=QH$.

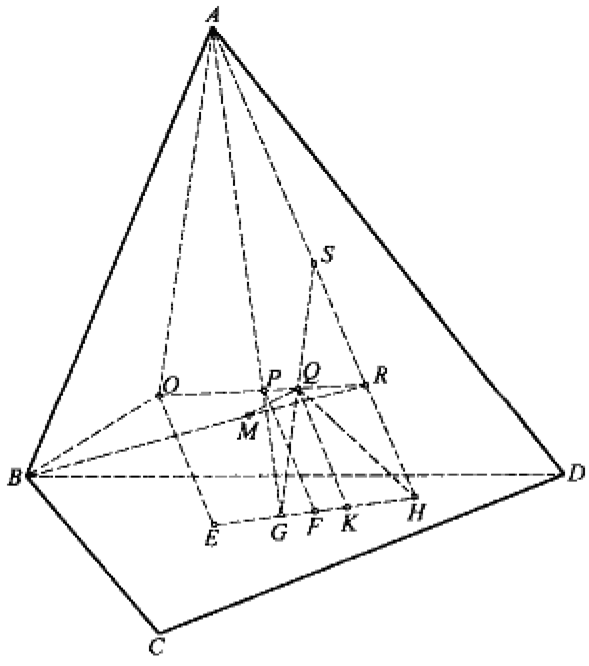


图 3

再者三点 O,P,R 共在一线

上(所以四面体的外心,重心,垂心是共线的).

因为 $PQ : OP = FK : EF = 1 : 3$,又 $PG : AP = 1 : 3$,于是 $\triangle APO \backsim \triangle GPQ$,所以 $AO \parallel GQS$,所以

$$AS : SR = OQ : QR = EK : KH = 2 : 1$$

所以 $SR = \frac{1}{3}AR$.

过 Q 作 $QM \parallel OB$,交 BR 于 M,就得

$$QM = \frac{1}{3}OB = \frac{1}{3}OA = QS, MR = \frac{1}{3}BR$$

于是以 Q 为心,QS 为半径,作球,必通过四点 G, H, M, S.其他线段 CR,DR 上,由 R 取其距离三分之一的点,亦都有这球面上.

同样,可证各面的垂心,重心,与 Q 的距离亦都等于 QS.因此共有十二点,同在这个球面上.

(2) 又具有下面性质的球叫做第二种十二点球(Второй Шар Двенадцатый Точек).

在垂心四面体中,各棱的六个中点,各相对棱公共直交线的六个交点(即各面内高线的垂足),一共有十二个点,同在一个球面上.

证 如图 4,设 L, L', M, M', N, N' 为相对棱的六个中点.因为 $AC \perp BD$,所以 $LN'L'N$ 为矩形,它的对角线 $LL' = NN'$.同理,$LL' = MM'$.且这三条对角线都是彼此互平分而相交于一点 G,这 G 称为四面体的重心.

所以

$$GL = GL' = GM = GM' = GN = GN'$$

即以重心 G 为心,GL 为半径作球,必通过各棱的六个中心.

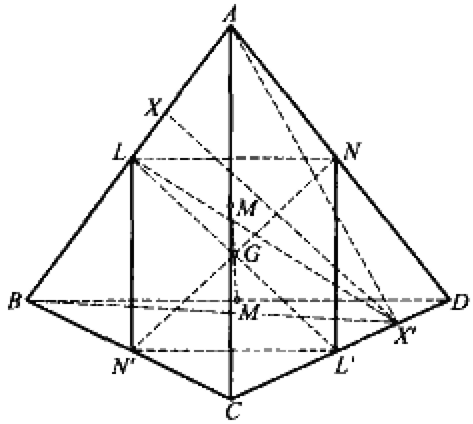


图 4

今设相对棱 AB, CD 的公共直交线为 XX',因为 $AB \perp CD$,且 $XX' \perp CD$,所以 $\triangle ABX' \perp CD$.于是 $LX' \perp CD$,$LX'L'$ 为一个直角三角形,G 为斜边的中边,所以 $GL = GL' = GX'$,即 X' 亦在上述的球面上.

同理,X' 亦可证同在这球面上,这个球与四面体的各面相交,就是该面的九点圆.因此共有十二点,同在这个球面上.

1956年6月号小知识解答者名单

解答第2,4题者:广州华南师院附中高一红色数学研究小组.

解答第3,5题者:江荣禧,吴顺唐.

解答第4,5题者:南阳二中,唐永宁.

解答第2题者:喻畯,彭祖仁,徐自新,丁双喜,楼宇同,陶醒民,棣彰芽.

解答第4题者:唐会之.

解答第5题者:马丁圆,汉口劝工院19号读者,何俊若,黑龙江省黑河专区孙吴县暑期数学组.

解答第6题者:洪友诚.

1956年7月号征解问题答案

❖棋盘路线

1. 国际棋盘横直都有九条路线，今从一个角顶出发，顺着盘中各条线行走，要达到对角顶. 假如每次所走的路程都等于棋盘周围的一半，问共有多少种不同的走法?(提出人:广东湛江 于淇)

解法1 从棋盘角顶 A 走到对角顶 B，中间经过诸点(一)(二)(三)…… 由图1可以清楚地看出，由上而下，从 A 走到附近几点的走法种数，排成有规律的贾宪三角形. 因此由 A 走到点(一)的走法有 $C_2^1=2$(种). 由 A 走到点(二)的走法有 $C_4^2=6$(种). 由 A 到(三)的走法有 $C_6^3=20$(种). 由 A 到(四)的走法有 $C_8^4=70$(种). 由 A 到(五)的走法有 $C_{10}^5=252$(种). 由 A 到(六)的走法有 $C_{12}^6=924$(种). 由 A 到(七)的走法有 $C_{14}^7=3\ 432$(种).

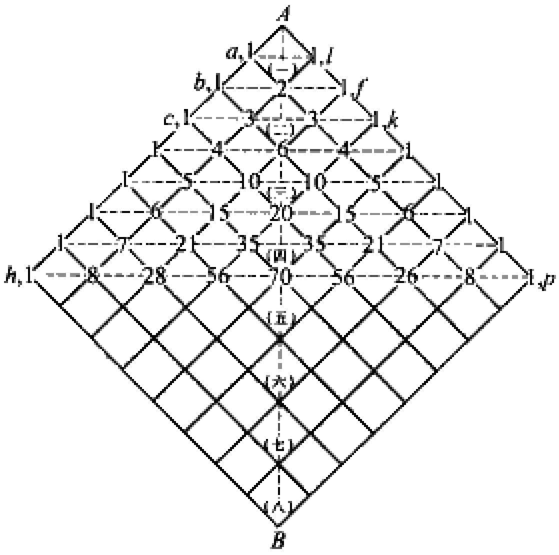


图1

故由 A 走到点(八)即 B 的走法有 $C_{16}^8=12\ 870$(种).

解法2 从角顶 A 出发，经过各条路线，走到对角顶 B. 因在行走中不能有后退的步子，故棋盘上每个格点，把边上的除外，都有四个方向，只有两个是前进的.

从 A 出发，沿着 Aa，Ai 的方向，各有一种走法.

在点 a，i 各有两种走法. 因此从 A 到线 bj 共有 2^2 种走法，但其中由 a，i 的走法各有一种是重合于格点(一)，所以它们的分布是 1,2,1. 这4种走法中，各由格点前进又各有2种，因此从 A 到线 ck 的走法有 $4\times2=8$(种)，其中也有些重合的格点，所以这时走法的分布是 1,3,3,1,… 照此类推，可得出结论：从角

顶 A 走到诸平行线 ai，bj，ck，… 上诸格点的走法种数，恰符合于贾宪法则.

在本题中，由 A 到角线 hp 上诸格点的走法种数，分别是

$$C_8^0, C_8^1, C_8^2, C_8^3, C_8^4, C_8^5, C_8^6, C_8^7, C_8^8$$

同理，由 B 达到 hp 上诸格点的走法种数，是等于联结 hp 上诸格点与 B 的道路种数，也分别和上列的数目同.

故从 A 到 B 的不同走法有 $(C_8^0)^2 + (C_8^1)^2 + (C_8^2)^2 + (C_8^3)^2 + (C_8^4)^2 + (C_8^5)^2 + (C_8^6)^2 + (C_8^7)^2 + (C_8^8)^2 = 1^2 + 8^2 + (28)^2 + (56)^2 + (70)^2 + (56)^2 + (28)^2 + 8^2 + 1^2 =$ 12 870(种).

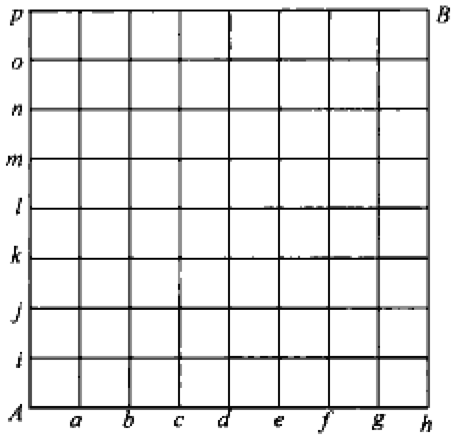


图 2

注　在图 2 中各个格点上所写的数字，就是从 A 到各点的走法种数.

解法 3　由 A 走到 B，须经过横路 8 段，直路 8 段. 设以 α 表示横路的一段，以 β 表示直路的一段，那么每种行走的方法，都需走 8α 与 8β 的路程. 这问题的算法，与由 16 个字母

$$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\beta\beta\beta\beta$$

中每次全取的排列数相同. 故得 $\frac{(8+8)!}{8!8!} = \frac{16!}{8!8!} = 12\,870$(种) 走法.

解法 4　由 A 向右走，经过 h，转弯到 B 的走法只有 1 种；由 A 经过 g，转弯到 B 的走法有 8 种(不计重复的，下同).

由 A 经过 f，转弯到 B 的走法有

$$f_8 = 8 + 7 + 6 + \cdots + 2 + 1 = 36(\text{种})$$

这里的 f_i 表示 i 项和，下仿此.

由 A 经过 e，转弯到 B 的走法有

$$e_8 = f_8 + f_7 + f_6 + \cdots + f_2 + f_1 =$$
$$(8+7+6+\cdots+2+1) + (7+6+5+\cdots+2+1) + \cdots + (2+1) + 1 =$$
$$36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 120(\text{种})$$

由 A 经过 d，转弯到 B 的走法有

$$d_8 = e_8 + e_7 + e_6 + \cdots + e_2 + e_1 =$$
$$120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 330(\text{种})$$

由 A 经过 c，转弯到 B 的走法有

$$c_8 = d_8 + d_7 + d_6 + \cdots + d_2 + d_1 =$$
$$330 + 210 + 126 + 70 + 35 + 15 + 5 + 1 = 792(\text{种})$$

由 A 经过 d，转弯到 B 的走法有

$$b_8=c_8+c_7+c_6+\cdots+c_2+c_1=$$
$$792+462+252+126+56+21+6+1=1\ 716(\text{种})$$

由 A 经过 a，转弯到 B 的走法有

$$a_8=b_8+b_7+b_6+\cdots+b_2+b_1=$$
$$1\ 716+924+462+210+84+28+7+1=3\ 432(\text{种})$$

把上面诸数相加，知道由 A 向右走到 B 的走法，计有

$$1+8+36+120+330+792+1\ 716+3\ 432=6\ 435(\text{种})$$

同样，向 A 向上走，经过 i,j,k,l,m,n,o,p 到 B 的走法亦有 6 435 种.
故由 A 到 B 的总共走法有 $2\times 6\ 435=12\ 870$(种).

❖姊妹做绣品

2. 有一件绣品，请到刺绣社里三个姊妹来做. 已知由大姊独做，可于 13 日完工，今由她们三人合做. 若第一日由大姊开始做起，第二日以后由二姊，三妹，大姊，…… 顺次轮流接做，恰好若干整日成功. 若第一日由二姊开始，须要延长半日成功. 若第一日由三妹开始，就需延长 $\frac{1}{3}$ 日. 问由大姊开始做起，多少日完工?(提出人：江苏如皋 程家骅，纪汉光)

解　令姊妹三人每日的工作量分别为 a,b,c. 若由大姊开始做起，最后一日完工，有三种可能情形：一是大姊妹，二是二姊，三是三妹，今分论如下：

(1) 若由大姊完工

(大姊开始)	$a,b,c;a,b,c;\cdots;$	a
(大姊开始)	$b,c,a;b,c,a;\cdots;$	$b,\frac{c}{2}$
(三妹开始)	$c,a,b;c,a,b;\cdots;$	$c,\frac{a}{3}$
	← 各做相等日数的工 → (即轮流相等的次数)	

由上可以知道，最后大姊做 1 日，是等于二姊做 1 日和三妹做 $\frac{1}{2}$ 日；或等于三妹做 1 日和大姊妹做 $\frac{1}{3}$ 日. 因得

$$\begin{cases} a = b + \dfrac{c}{2}, \text{其中 } a = \dfrac{1}{13} & ① \\ a = c + \dfrac{a}{3} & ② \end{cases}$$

由②，$c = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \times \frac{1}{13} = \frac{2}{39}$；由①，$b = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{39}$.

假如她们轮流做了若干次，所做的日数为 n 于是

$\left(\frac{1}{13} + \frac{2}{39} + \frac{2}{39}\right)n + \frac{1}{13} = 1$，即$\frac{7}{39}n = \frac{12}{13}$，所以 $n = \frac{36}{7}$.

这里的 n 不是整数的，不合题意，故这种情形是不可能的.

(2) 若由二姊完工

$a, b, c; a, b, c; \cdots;$	a, b
$b, c, a; b, c, a; \cdots;$	$b, c, \frac{a}{2}$
$c, a, b; c, a, b; \cdots;$	$c, a, \frac{b}{3}$

由上
$$\begin{cases} a + b = b + c + \dfrac{a}{2} \\ a + b = c + a + \dfrac{b}{3} \end{cases} \text{即} \begin{cases} \dfrac{a}{2} = c \\ \dfrac{2}{3}b = c \end{cases}$$

所以

$$c = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{26}, b = \frac{3}{2} \times \frac{1}{26} = \frac{3}{52}$$

于是

$$\left(\frac{1}{13} + \frac{3}{52} + \frac{1}{26}\right)n + \frac{1}{13} + \frac{3}{52} = 1$$

即$\frac{9}{52}n = \frac{45}{52}$，所以 $n = 5$.

这就是说，她们轮流做过 5 次. 故由大姊开始，得完工的日数为

$$3 \times 5 + 2 = 17(\text{日})$$

(3) 若由三妹完工

因为由大姊开始，三妹完工. 她们所做的日数相同，所轮流做过的次数也相同，这样不管由谁开始，所得的日数都是整数，不会延长她们的完工时间，故这种情形也是不可能的.

❖旋转体

3. 如图3,△ABC 的三边 a,b,c 成等比级数. 设以 a,b,c 分别作轴,旋转一周,所得旋转体的体积为 V_a,V_b,V_c. 求证:$V_b^2=V_a\cdot V_c$. 又题中所取比值的范围有无限制?(提出人:江苏岷山 龚介民)

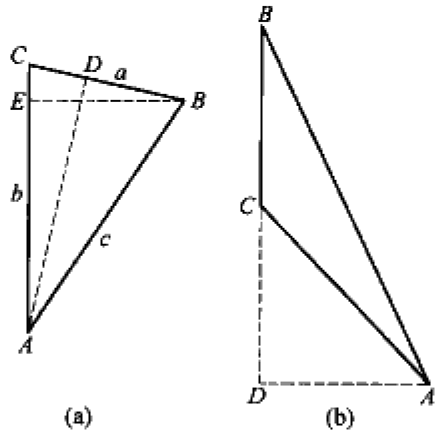


图 3

解 因为

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \qquad ①$$

所以 $b^2=ac$. 令△ABC 三边上的高为 h_a, h_b, h_c.

根据面积公式得

$$ah_a=bh_b=ch_c\text{,即}\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a},\frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b}$$

以 b 为轴旋转一周,所得的旋转体的体积为

$$V_b=\frac{1}{3}\pi h_b^2\cdot AE+\frac{1}{3}\pi h_b^2\cdot CE=\frac{1}{3}\pi b_b^2\cdot AC=\frac{1}{3}\pi bh_b^2$$

以 a 为轴旋转一周,所得旋转体的体积为

$$V_a=\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot BD+\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot CD=\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot BC=\pi ah_a^2$$

(若 C 为钝角,得 $V_a=\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot BD-\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot CD=\frac{1}{3}\pi h_a^2\cdot BC=\frac{1}{3}\pi ah_a^2$,结果相同.)以 c 为轴旋转一周,无论∠A 是锐角或是钝角,所得旋转体的体积都为 $V_c=\frac{1}{3}\pi ch_c^2$. 于是

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{\frac{1}{3}\pi ah_a^2}{\frac{1}{3}\pi bh_b^2}=\frac{ah_a^2}{bh_b^2}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}=\frac{b}{a} \qquad ②$$

$$\frac{V_b}{V_c}=\frac{\frac{1}{3}\pi bh_b^2}{\frac{1}{3}\pi ch_c^2}=\frac{bh_b^2}{ch_c^2}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c^2}{b^2}=\frac{c}{b} \qquad ③$$

由①,知②与③是相等的,即 $\frac{V_a}{V_b}=\frac{V_b}{V_c}$,所以 $V_b^2=V_a\cdot V_c$.

再来求比值的范围.依题意,令三角形的各边为

$$a, b = da, c = d^2 a (d = \text{公比值})$$

因三角形两边之和必大于第三边,故有三种情形:

(1)$a + b > c$,(2)$b + c > a$,(3)$a + c > b$.

由(1),$a + b > c$,得 $a + da > d^2 a$,即 $1 + d > d^2$,所以 $d^2 - d - 1 < 0$,于是 $d < \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$,即 $d < \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.这里的 d 不能取负数,所以 $d < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ 应该舍去.所以

$$d < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad ④$$

由(2),$b + c > a$,得

$$da + d^2 a > a, \text{即 } d^2 + d - 1 > 0$$

于是

$$d > \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}, \text{即 } d > \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

这里的 d 不能取负数,所以

$$d > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad ⑤$$

合并④⑤得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < d < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,即

$$0.618\cdots < d < 1.618\cdots \qquad ⑥$$

由(3),$a + c > b$,得

$$a + d^2 a > da, \text{即 } d^2 - d + 1 > 0 \qquad ⑦$$

于是 $d > \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.这里含有虚数,可以不考虑.但若取 d 合于⑥时,⑦仍是成立的.故知本题所取比值的范围应适合于⑥.

最后来谈 $\triangle ABC$ 各角的大小.

因公比 d 无论所取的是大于1或小于1,必将 $a < b < c$ 或 $a > b > c$.这就是说,边 b 的长度必在 a,c 之间,也就是 $\angle B$ 的大小必在 $\angle A$ 与 $\angle C$ 之间.今假定 $\angle C$ 为最大,就得 $\angle A < \angle B < \angle C$.所以无论 A,C 是钝角(其中只能有一个钝角),或全部是锐角,$\angle B$ 决不能成为钝角.

又当 $\angle C$ 取直角时,依毕达哥拉斯定理:$a^2 + b^2 = c^2$,即 $a^2 + d^2 a^2 = d^4 a^2$,即 $d^4 - d^2 - 1 = 0$.在这式里,取 d^2 为正值,得

$$d^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\cdots, \text{所以 } d = 1.272\cdots \qquad ⑧$$

这个数值是在⑥范围之内.故若取适合于⑧的公比值,就得 $\triangle ABC$ 成为

直角三角形了.

❖奇数多边形

4.凸多边的边数若为奇数,并已知各边的中点位置,那么它的形状为一定,求证.(提出人:北京 张尔德)

证 若三角形各边的中点 M,N,O 为已知(图4),那么三角形是可作的.

若五边形各边的中点 M,N,P,Q,R 为已知,那么 $\triangle ABC,\triangle ACD,\triangle ADE$ 亦为一定.换句话说,五边形可划分成一个三角形及一个四边形,或划分成三个三角形.

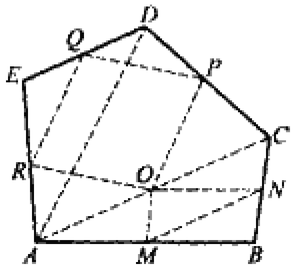


图4

因为在 $\triangle ABC$ 中,M,N 为已知,而第三边 AC 的中点 O,可由三点 P,Q,R 来决定(因为在四边形 $ACDE$ 中,O,P,Q,R 是各边的中点,这四点恰组成一个平行四边形,故过 P,Q,R 作平行四边形,可得到点 O).

既然三边的中点为一定,即 $\triangle ABC$ 可作.同理 AD 的中点亦为一定,即 $\triangle ACD,\triangle ADE$ 亦可作,这就是说,五边形可以作出了.

推广出去,各奇数凸多边形都可以划分成为一个三角形及若干个四边形.

故凡奇数凸多边形,若各边中点的位置为一定,它的形状也是一定,因此都可以作图了(图5).

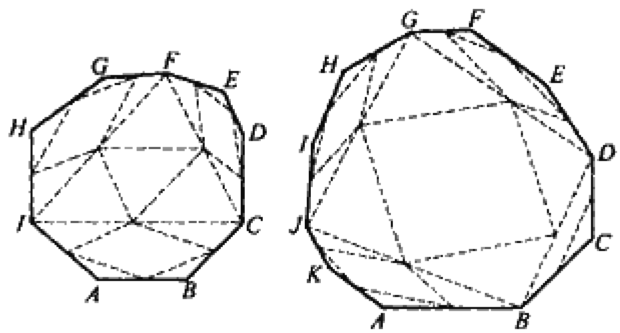


图5

注 五边形另有简单的作图法如图6.

过 M,N,P,Q,R 作成星形 $A'C'E'B'D'A'$.

过 M 作 $AB \parallel A'B'$,过 N 作 $BC \parallel B'C'$.同样再作 CD,DE,EA.那么 $ABCDE$ 就是所作的五边形.

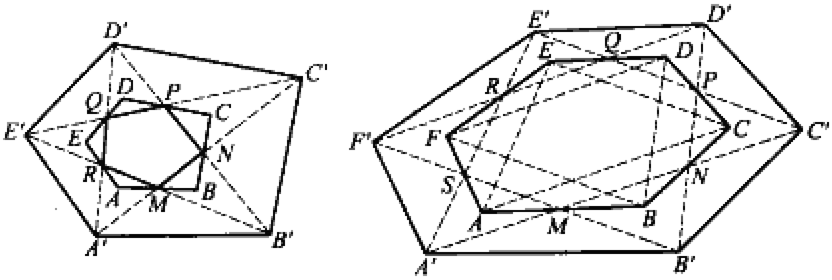


图 6

这是因为 AC(图中未画出) $/\!/ A'C'$, $BD /\!/ B'D'$, $CE /\!/ C'E'$, $DA /\!/ D'A'$. 即一笔画的星形 $ACEBDA$ 与 $A'C'E'B'D'A'$ 是相似的图形. 故五边形 $ABCDE$ 与 $A'B'C'D'E'$ 亦是相似的图形.

但多边形的边数为偶数时,却不能得到同样的结果. 如图 6,设有六边形为 $ABCDEF$. 在这个形里,如作对角线,先作 AC,再作 CE, EA,…,便成两个三角形 ACE, BDF,互相交叉着,但不能绘成一笔画的星形. 因此在原形外所构成的六角形 $A'B'C'D'E'F'$ 亦和原形不相似,这就是说,偶数边的多角形,虽其各边的中点为一定,它的形状还是不定的.

❖余切方程

5. 试解方程: $\dfrac{(\cot^2\theta - 1)(\cot^2 2\theta - 1)}{4\cot 2\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (提出人:上海 陈亚文,马慎余,程海杰)

解法 1
$$\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cot^2 2\theta - 1)}{4\sin^2\theta\cot 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即
$$\frac{\cos 2\theta(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta)}{2(1 - \cos 2\theta)\cos 2\theta\sin 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即
$$\frac{\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta}{2(1 - \cos 2\theta)\sin 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即
$$\frac{2\cos^2 2\theta - 1}{2(1 - \cos 2\theta)\sin 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即
$$\frac{(2\cos^2 2\theta - 1)^2}{4(1 - \cos 2\theta)^2\sin^2 2\theta} = \frac{1}{3}$$

于是
$$3(2\cos^2 2\theta - 1)^2 = 4(1 - \cos 2\theta)^2(1 - \cos^2 2\theta)$$

即
$$16\cos^4\theta - 8\cos^3 2\theta - 12\cos^2 2\theta + 8\cos 2\theta - 1 = 0$$

即
$$(2\cos 2\theta - 1)(8\cos^3 2\theta - 6\cos 2\theta + 1) = 0$$

即
$$(2\cos 2\theta - 1)(2\cos 6\theta + 1) = 0$$

由 $2\cos 2\theta - 1 = 0$,得 $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$,所以 $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$,所以 $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

在此,以 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$ 代人原方程,知它为伪根,所以 $\theta = n\pi - \frac{\pi}{6}$ 为真根.

由 $2\cos 6\theta + 1 = 0$,得 $\cos 6\theta = -\frac{1}{2}$,所以 $6\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$,所以

$$\theta = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$$

在此的真根只有三个:

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{9}, n\pi + \frac{4\pi}{9}, n\pi + \frac{7\pi}{9}$$

将这些 θ 代入原式中的 $\cot\theta, \cot 2\theta$ 来验算,都是适合,其余的概是伪根.

故原方程的解答为

$$n\pi + \frac{\pi}{9}, n\pi + \frac{4\pi}{9}, n\pi + \frac{7\pi}{9}, n\pi + \frac{5\pi}{6}\left(\text{即 } n\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

式中 $n = 0, 1, 2, \cdots$.若取 θ 为在 0° 与 180° 间的值,就得 $20^\circ, 80^\circ, 140^\circ, 150^\circ$.

解法 2 由 $\cot 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$,$\cot 4\theta = \frac{\cot^2 2\theta - 1}{2\cot 2\theta}$,代入原式,得

$$\frac{2\cot\theta\cot 2\theta \cdot 2\cot 2\theta\cot 4\theta}{4\cot 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

即
$$4\cot 2\theta(\sqrt{3}\cot\theta\cot 2\theta\cot 4\theta - 1) = 0$$

所以

$$\begin{cases} \cot 2\theta = 0 & ① \\ \text{及} \sqrt{3}\cot\theta\cot 2\theta\cot 4\theta - 1 = 0 & ② \end{cases}$$

由 ①,将使原式的分母成零,应该弃去.

由 ②,令

$$\cot\theta = x, \cot 2\theta = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$\cot 4\theta = \frac{\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{x^2 - 1}{2x}} = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{4x(x^2 - 1)}$$

代入 ②,得

$$x^4 - 6x^2 - \frac{8}{\sqrt{3}}x + 1 = 0$$

分解因子 $(x + \sqrt{3})(x^3 - \sqrt{3}x^2 - 3x + \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$,即

$$\begin{cases}\cot\theta+\sqrt{3}=0,\text{所以 }\cot\theta=-\sqrt{3},\text{所以 }\theta=n\pi-\dfrac{\pi}{6} & ③\\ \text{及 }\cot^3\theta-\sqrt{3}\cot^2\theta-3\cot\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=0 & ④\end{cases}$$

又由

$$\cot 3\theta=\frac{\cot^3\theta-3\cot\theta}{3\cot^2\theta-1} \quad ⑤$$

即

$$\cot^3\theta-3\cot\theta-3\cot 3\theta(3\cot^2\theta-1)=0 \quad ⑥$$

比较④⑤,得 $\cot 3\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$,所以 $3\theta=n\pi+\frac{\pi}{3}$.

所以

$$\theta=\frac{n}{3}\pi+\frac{\pi}{9}=\frac{3n+1}{9}\pi(n=0,1,2,\cdots) \quad ⑦$$

由此知道本题的解答有两组,即③和⑦.

若将 θ 化为小于 $180°$ 的正角:由⑥,令 $n=0,1,2$,得 $\theta=20°,80°,140°$;由③,令 $n=0,1$,得 $\theta=-30°,150°$.但 $\cot(-30°)=\cot 150°$,所以两个 θ 只需取一个.今用这些角度的值,代入原式内验算,都是适合的.

解法3 因为

$$\frac{(\cot^2\theta-1)(\cot^2 2\theta-1)}{4\cot 2\theta}=\frac{(\cot^2\theta-1)\left[\dfrac{(\cot^2\theta-1)^2}{4\cot^2\theta}-1\right]}{\dfrac{2(\cot^2\theta-1)}{\cot\theta}}=$$

$$\frac{1-6\cot^2\theta+\cot^4\theta}{8\cot\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

即

$$\cot^4\theta-6\cot^2\theta-\frac{8}{\sqrt{3}}\cot\theta+1=0$$

即 $(\cot\theta+\sqrt{3})(\cot^3\theta-\sqrt{3}\cot^2\theta-3\cot\theta+\frac{1}{\sqrt{3}})=0$,由

$$\cot\theta+\sqrt{3}=0 \quad ①$$

得

$$\theta=n\pi-\frac{\pi}{6}\text{ 或 }\theta=n\pi+\frac{5\pi}{6}$$

这就是 $\theta=n180°-30°$ 或 $\theta=n180°+150°$.

又由

$$\cot^3\theta-\sqrt{3}\cot^2\theta-3\cot\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}=0 \quad ②$$

命 $x = \cot\theta$，即得

$$x^3 - \sqrt{3}x^2 - 3x + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \qquad ③$$

命 $x = y + \frac{\sqrt{3}}{3}$，得

$$y^3 - 4y - \frac{8}{9}\sqrt{3} = 0 \qquad ④$$

依公式：$y^3 - py - q = 0$ 的三个根为

$$\begin{cases} y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\varphi \\ y_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) \\ y = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) \end{cases}$$

式中 $\dfrac{\frac{q}{2}}{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}} = \cos\varphi$.

在此 $\dfrac{\frac{4}{9}\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} = \cos\varphi$，所以 $\varphi = 60^\circ$. 于是 ④ 的三个根：

$$y_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 20^\circ = 2.309\ 40 \times 0.939\ 69 = 2.170\ 13$$

$$y_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 140^\circ = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 40^\circ = -2.309\ 40 \times 0.766\ 04 = -1.769\ 10$$

$$y_3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 260^\circ = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin 10^\circ = -2.309\ 40 \times 0.173\ 65 = -0.401\ 02$$

因得 ③ 的三个根为

$$x_1 = \cot\theta_1 = 2.170\ 13 + 0.577\ 53 = 2.747\ 48 = \cot 20^\circ$$

所以 $\theta_1 = 20^\circ$；

$$x_2 = \cot\theta_2 = -1.769\ 10 + 0.577\ 53 = -1.191\ 75 = \cot(-40^\circ) = \cot 140^\circ$$

所以 $\theta_2 = 140^\circ$；

$$x_3 = \cot\theta_3 = -0.401\ 02 + 0.577\ 53 = 0.176\ 33 = \cot 80^\circ$$

所以 $\theta_3 = 80^\circ$.

故本题所求的解答：$\theta = 20^\circ, 80^\circ, 140^\circ, 150^\circ$.

❖正弦的等式

6.求证：$\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=\frac{1}{8}$（但不查表）.（提出人：四川蓬安 陈屏虚）

证法1 左边 $=\cos 40^\circ\cdot\sin 10^\circ\cdot\sin 70^\circ=\frac{1}{2}(\sin 50^\circ-\sin 30^\circ)\sin 70^\circ=$

$$\frac{1}{2}(\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ-\sin 30^\circ\sin 70^\circ)=$$

$$\frac{1}{4}(\cos 20^\circ-\cos 120^\circ-2\sin 30^\circ\sin 70^\circ)=$$

$$\frac{1}{4}(\sin 70^\circ+\sin 30^\circ-2\sin 30^\circ\sin 70^\circ)=$$

$$\frac{1}{4}(\sin 70^\circ+\frac{1}{2}-\sin 70^\circ)=\frac{1}{8}$$

证法2 左边 $=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{2}(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)\cos 40^\circ=$

$$\frac{1}{2}\cos 100^\circ\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\cos 60^\circ\cos 40^\circ=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos 140^\circ+\cos 60^\circ)\right]+\frac{1}{4}\cos 40^\circ=$$

$$\frac{1}{4}\cos 140^\circ+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos 40^\circ=$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}(2\cos 90^\circ\cdot\cos 50^\circ)=\frac{1}{8}$$

证法3 左边 $=\sin 10^\circ\cos 40^\circ\cos 20^\circ=\sin 10^\circ\left(\frac{1}{2}\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\right)=$

$$\frac{\sin 10^\circ}{4}(1+2\cos 20^\circ)=\frac{\sin 10^\circ}{4}(1+2-4\sin^2 10^\circ)=$$

$$\frac{1}{4}(3\sin 10^\circ-4\sin^3 10^\circ)=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{8}$$

1956年7月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,6题者:陈丽琼,龙运佳,刘应明,黄宝根,赵源,方博仁,莫玉其,韩光维,辛开河,陶醒民,程鸿鼎,喻正元,洪毅,朱思铭,徐孝舜,杨祥谱,龚俊杰.

解答第1,2,3,6题者:密星,刚正实,陆志方,陈锦飞,龚尧逊,陆万全.

解答第1,2,4,6题者:程晓峰,王维新,张庆毓,过伯祥,王锡泉,张志华,王国俊,欧阳铭,唐永宁,施裕燊,顾凡孑,吕云仙,韩绍辉,舒天育,陈剑豪,李御岚,吴家驹,陈俊本,李华康,忻华泰.

解答第1,2,5,6题者:张禄度.

解答第1,3,4,6题者:上海延安中学高三(3)数学小组.

解答第2,3,4,6题者:吕美仲,史树中,福州五中华罗庚数学研究小组,马殿荣,王少钦,戈金起.

解答第2,3,5,6题者:程家骅,纪汉光.

解答第1,2,4题者:洪文诚.

解答第1,2,6题者:徐一,苏学快,周青,周蓝,程鸣数,黄柏森,胡孝伦,彭公志,李永濲,马明,冯翰翘,曹时行,罗刚,何文辰,秦秋君,彭生,德华,叶希孟,余虹钰,曹媛珠.

解答第1,3,6题者:石德富.

解答第1,4,6题者:喻畯,汪建华,朱维平,王预军,上海格致中学高三进军数学小组,唐翘健.

解答第2,3,6题者:卢甲骥,刘相,王光烈,张之中,史国宁,郑万泔,丁道森,黄恒祥,刘家琦,吕美健,张鸿林,周浩.

解答第2,4,6题者:陆荣基,贾彦宾,陈吉象,江荣禧,吴泽藩,樊汉卿,俞忠元,裘宗沪,任孝瑛,楼宇同,何宇功,陈龙保.

解答第2,5,6题者:辜芳通,桂永和.

解答第3,4,6题者:谢启明,袁君诰.

解答第1,2题者:姚冬青,许葆华,沈芸芬.

解答第1,6题者:贺仲熊,薛正中,李赓远,李善同,陈庄才,方耀森,王昶,富谦,邹恩星,白云亭,王发榕,程光斗,上海市上海中学高三(5)数学爱好者,福建惠安三中数学小组.

解答第2,3题者:胡晖.

解答第2,4题者:徐自新,上海延安中学高一(3)数学小组,黄文奇,葛元中.

解答第2,6题者:章文,茅龙温,王湘云,涂宁康,刘汉,汤正谊,肖琏如,谭根源,罗思广,钟国葵,韩宇耀,谢尔盖,陈全润,李文艺,严祖祺,吴文发,张家骥,张家骅,朱冠章,周德润,程伟龄,赵可祥,林国华,朱允明,臧其吉,周持中,张曲安,周本华,上海琴庐数学爱好小组,潘秉淮,王福民,郑鹏洲,袁先寿,黄鞠良,汤礼道,齐世安,虞哲谅,虞哲谐,洪澄,黄振元,彭祖仁.

解答第3,4题者:郑万嵩,胡培城.

解答第3,6题者:吴章江,俞维强,李兆寅,刘斌,王六桥,龚明琛,贾宗充,郭中士,洪友诚,沈阳五中高二(三)数趣小组,吴国玢,林介义.

解答第4,6题者:张知难,李一亚,顾国卿,王廷籍,文贤杰,张燕平,潘逢乙,安心平,何俊若,吴顺唐,林六十,程其坚,黄水源,谢高权,王维宇,广州华南师院附中高二(3)红色数学研究小组,王东生,朱培勇,毛宗灏.

解答第1题者:胡增义,林存山,郑重金,梁韩士.

解答第2题者:富林松,谢尧天,蒋馥华,田大祥,谭克国,刘正迪,张连德,马龙,陈维庆,王明亮,刘东椿,张宝富,段成善,费栋宇,王辉,唐瑜,钱宗玉,顾柏荣,项兴观.

解答第3题者:李成涛,熊德政.

解答第4题者:李敬章,武昌实中高二(三).

解答第6题者:陈章森,胡中一,杜友华,郝长城,解传隆,花业楠,张文宽,胡汝康,刘克亮,彭湘德,朱成孝,韩世根,宿军,陈麟生,李政,沈阳五中高三二班数学小组,周盛怀,陈万志,狄菊逸,雷振华,高永生,郭顺超,邢盘泉,刘尊全,易杏海,王廷胤,李年照,梁树培,石秉恭,周治文,陈瑛,刘连城,田晓初,路叔平,汪良辉,侯文正,何伟健,余锦云,李尚朴,李国盛,陶剑华,钟兴雄,袁文彬,宣松林,余永明,陈志刚,赵有,孙级三,朱建如,曲惠敏,张全顺,朱海泉,徐鹏,李俊杰,陈宝清,李桐生,丁祖兴,薛梵,江世留,宋元东,邹庆丽,胡衍瑞,刘子明,姚杰,王恒禄,王惠民,张大伟,陈仁,先永在,顾振权,彭传钟,熊方珂,郭祥熹,宋兆澎,许文质,沈庆时,姜华盛,徐风,卜士,曹致琴,穆建光,王晕,胡东坡,侯湘生,侯忠松,浦祖康,罗幼勤,李文财,张吉祥,高业修,陈长虹,吴峰权,刘忻,许白虹,张忠辉,曲冠峰,翟光发,冯景星,王观黎,龚邦本,广州无名氏,杜学明,李斯和,严祖祺,张伯玉,周玉珩,黄友川,陈之汉,陈坚仪,李孝同,李启泽,华益本,高汉臣,李景轩,陈大钦,胡本培,藏家森,凌爱莲,张崇瑞,龚桂书,王落弟,梁继光,张志坚,魏东江,陈兴昭,魏直光,邱照元,张坤华,朱宝隆,钟文祥,潘传旺,郑惠森,耿蕉適,钱振亮,李永乐,傅凤羽,梁继明,孙厚军,刘有智,徐锦

鸿，俞善信，黄琦，太原铁路中学数学组，李承权，江慧珠，王效生，陈贤宜，赵南生，英建安，田景黄，马积薪，车夫，沈国政，王思夏，郑庆松，花炳兴，吴宣华，朱纯，葛金镳，张国相，史庆良，郭瑞枫，徐祖毅，曾映秋，贝时春，王瑞田，马丁圆，陈君煦，刘宝平，曾庆德，毛作尺，泽清，陈康元，杨克仁，陈兆良，夏柳莺，钟长生，孙闻天，王宏章，张天柱，吴树雄，舒宏健，王超群，孙九龄，凌绍章，宋邦权，戈少耳，孟传亨，马国伟，郑玮，林从敬，郑世雄，邵镇中，阵国庆，陈彬，李珊，胡佩哲，赵迪鸿，陈遐峰，谢树元，韩锡麒，孟宪斌，莫欺仁，房延庆，柏桢固，程敦复，程敦慧，程敦娴，虞兆强，陈永诰，谢毓厚，凌遇忠，刘志仁，余国霜，管念伟，桂炎生，邬思，陈浩然，谢孟川，李国栋，广州东山新河浦三横路 33 号，彭钊贤，薛观溱，吕名弘，王冠闽，区广才，孙义鹊，陆建奎，陈沛尧，徐明耀，谢文镰，陈欣高，乔天裕，王弥康，乐小春，柳发鑫，孙泉，江光平，马欢，志研，祝疆，张辅华，思颖，文寿光，文佛生，金同安，余定吉，何鸿桐，徐从德，樊明哲，康家渊，成都梓橦桥西街 44 号，俞德水，张浚源，王仁德，徐亦，叶镜清，韩洪林，乐伟达，张钦宜，林飞燕，吴聊，邵济仁，黎尚举，袁泽仁，洪正福，张周祥，徐绍俭，许福森，潘咸按，张有紘，岳祖尧，韩文骥，张昌砚，戴寿祺.

1956年7月号小知识问题答案

❖中国剩余定理

1.什么叫做中国剩余定理?(提出人:南昌 梁千斌)

答　在孙子算经卷下载有一个问题并术解如下:

“今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?答曰,二十三.术曰:三三数之剩二,置一百四十;五五数之剩三,置六十三;七七数之剩二,置三十;并之,得二百三十三,以二百一十减之,即得.凡三三数之剩一,则置七十;五五数之剩一,则置二十一;七七数之剩一,则置十五;一百六以上,以一百五减之,即得”.

这类问题是我国人最先发现和解出的,因此西人称曰中国剩余定理.在我国民间称曰孙子算法.宋周密称曰鬼谷算,亦称曰隔墙算,杨辉称曰剪管术,亦称曰秦王暗点兵,秦九韶称曰大衍求一术,明严恭称曰管数,周述学称曰总分,程大位称曰物不知数,亦称曰韩信点兵.其实他们所指的都是解这类问题的方法呢!

❖三个绳圈

2.把三个绳圈套起来,若将其中任意一个绳圈剪断后,其他两个绳圈就会自动地离开.问该怎样套法?(提出人:上海 程基沛)

答　这是属于拓扑学的问题,套法如图1所示.这三个绳圈是互相套起来的,但是它们没有两个是互相套起来的,所以当我们将其中任意一个剪断后,其他两个就会自动地离开.

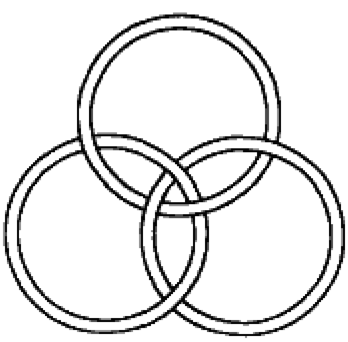


图1

❖最大乘积

3. 把数 a 分成若干份，要使它们的连乘积为最大，问该怎样分法？（提出人：沈阳 马介飞，孙志杰）

答　要把数 a 分成若干部分，并使它们的乘积为最大，这个问题是要用到超越数 e 的.

如果各数的和不变，要使它们的乘积最大，必须使各数相等. 因此数 a 必须分成相等的若干部分，可是究竟分成几部分呢？就要应用到 e 了. 只有把数 a 分成的各一部分和 e 最后近的时候，乘积才是最大. 这是什么道理呢？今来解释如下

设将 a 分为 x 份，使它们的连乘积为 y，就得

$$y=\left(\frac{a}{x}\right)^x, \text{即 } y=\frac{a^x}{x^x}, \text{即 } \ln y = x\ln a - x\ln x$$

取导数，得

$$\frac{1}{y}y' = \ln a - \ln x - 1$$

$$y' = y(\ln a - \ln x - 1) = \frac{a^x}{x^x}\left(\ln\frac{a}{x} - 1\right)$$

令 $y' = 0$，得 $\frac{a^x}{x^x}\left(\ln\frac{a}{x} - 1\right)$，这里 $\frac{a^x}{x^x} \neq 0$，所以

$$\ln\frac{a}{x} - 1 = 0$$

即 $\ln\frac{a}{x} = 1$，即 $\frac{a}{x} = \mathrm{e}$. 所以 $x = \frac{a}{\mathrm{e}}$.

这就是说，将 a 分为相等的若干份，命每份接近于 $\mathrm{e} = 2.718\ 28\cdots$ 时，所得的连乘积为最大.

例如，有数 10，若把它分做 2，3，5 或 3，3，4，得

$$2\times3\times5 = 30, 3\times3\times4 = 36$$

都不算最大.

所以数 10 必须把它分做这么多的相等部分，使得各部分尽可能接近于 e. 但要求这些部分的份数，就应该求商

$$\frac{10}{2.718\ 28\cdots} = 3.678\ 79\cdots$$

因为把一个数分成 3.678 79… 个相等的部分是说不通的，所以不得不把商数

（即部分的份数）取最接近的整数 4．因此我们可以得出 10 的各部分的最大乘积．如果各部分都等于$\frac{10}{4}$，即 2.5 的话，这就是说，可以由数 10 的相等部分相乘得出来的最大数是

$$(2.5)^4 = 39.0625$$

事实上，如果把 10 另外分成 3 个或 3 个相等部分，我们都只得出较小的乘积

$$(\frac{10}{3})^3 = 37,(\frac{10}{5})^5 = 32$$

同样，若要得到数 12 的各部分的最大乘积，那么必须分成 4 个相等部分，因为

$$\frac{12}{2.71828\cdots} = 4.41$$

而数 100 就要分成 37 个部分，因为

$$\frac{100}{2.71828\cdots} = 36.78$$

❖各种几何学

4．什么是近世几何，非欧几何，运动几何？各是谁先首创的？（提出人：青岛乐立中）

答　近世几何与古代几何不同，创立于卡诺（Carnot，1803），布里昂雄（Brianchon，1817），庞斯列（Poncelet，1822）诸氏．它所应用的原理有二：一叫连续原理，二叫对偶原理．连续原理是把所有的定理，看作普遍都是真确的，可以到处应用，没有特例．在寻常的几何学，每谈到无穷远处时，就不能适用，故所讨论的只是线与面的特例．在近世几何学，本于无穷元素的存在，把有穷与无穷看成一律，故所讨论的是线，面和各图形的通例．对偶原理，就是说各种图形的每个定理，都必有另外一个定理和它相伴，成为对偶．例如在平面上，讨论点时，有线和它对偶；讨论线时，有点和它对偶．又研究近世几何，用综合法的，称曰位置几何，射影几何；用解析法的，称曰三线坐标几何，解析射影几何．

非欧几何是从否定欧氏平行公设开始的，创立于罗巴切夫斯基（1829），黎曼（1854）．其中罗巴切夫斯基几何亦称曰双曲几何．黎曼几何亦称曰椭圆几何．因此对于原来的欧氏几何，亦称曰抛物几何．

运动几何是研究运动的几何特性，借以更深刻地了解运动学和机构学．因为从前研究运动的几何，只限于一个平面上．1894 年曼海姆（A.Mannheim）著运

动几何学的原理与发展(Principes et développements de la géométrie cinématique),才把运动的范围由平面推广到空间,将所证明的一切基本定理应用于曲线和曲面.这种研究在1900年左右有很大的发展.1955年朱广才编《运动几何学》,业由高等教育局出版社出版.

❖变分学

5.什么叫做变分学?(提出人:四川隆昌 杨永靖)

答 设有曲线 $y=f(x)$,又有第二曲线 y_1 无限接近于 y.

如图2,$y_1=y+\epsilon\phi(x)$,式中 ϵ 表示无穷小.这里的 $\epsilon\phi(x)$ 叫做 y 的变分,表示为 δy.

δy 与微分 $\mathrm{d}y$ 不同.微分 $\mathrm{d}y$ 是曲线对于 $\mathrm{d}x$ 的变化;变分 δy 是曲线移于它曲线,在同一横坐标的变化.

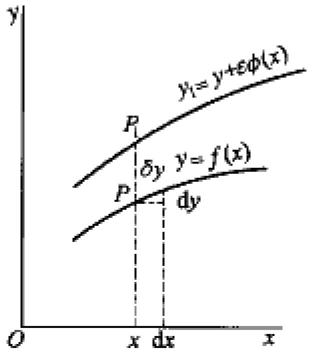


图2

变分学所讨论的是极大极小问题,可是它的性质比较普通微分学中所碰到的复杂得多.微分学中极大极小问题,只是定一个已知函数在某个节段间的极大或极小值.变分学就须定一个至几个未知函数或泛函数的形态,使一定积分的值成为极大或极小.

在变分学中,还须讨论一次变分 δy,二次变分 $\delta^2 y$,…… 以至高次变分 $\delta^n y$ 等的性质.

❖菲洛线

6.什么叫做菲洛(Philo)线?(提出人:四川隆昌 杨永靖)

答 如图3,设在 $\angle BAC$ 内有一个定点 P.过 P 作直线 XPY,交 $\angle A$ 的两边于 X,Y.使 XY 成为极短.

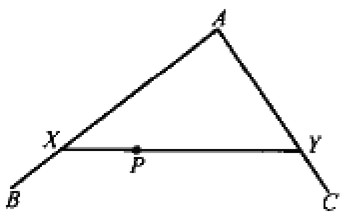


图3

这条直线 XY 叫做菲洛线.现在还不知它怎样用初等几何方法去作出的,也就是不知道怎样用尺规两器去作出的一种直线.

1956年7月号小知识解答者名单

解答第1,2,3,4,5,6题者:王锡泉.

解答第1,2,4,5,6题者:江荣禧,朱思铭.

解答第1,2,5,6题者:鲜于方圣,裘宗沪,俞忠元.

解答第1,2,3题者:马成忠.

解答第1,4,5题者:乐立中.

解答第2,3,5题者:程鸿鼎.

解答第4,5,6题者:李荣谦,唐永宁,广州华南师院附中高二(3)红色数学研究小组.

解答第1,2题者:邢盘泉,于淇,周本华,陶醒民,李华康,忻华泰.

解答第1,4题者:喻峻,陈兴昭.

解答第2,3题者:冯翰翘,郑玮,包廷剑.

解答第3,4题者:郑重金.

解答第5,6题者:徐亦,陈兴昭.

解答第1题者:寒影,科克,杜学明,刘斌,朱英超,上海时代中学高二(4)爱因斯坦物理小组,周光祺,上海延安中学高一(3)数学小组,朱维平,马昕,郭中士,侯辅元,潘秉淮,姚杰,马润尧,徐明曜,孙级三,刘昌砚.

解答第2题者:章文,袁文彬,杨传新,周兴武,卢甲骅,孙厚军,张心逊,沈国政,王思夏,邓瑞枫,亚丁,徐孝舜,刘东椿,张天柱,李大耀,武昌实验中学高二(3),余虹钰,程家骅,纪汉光,潘咸按,张有紘.

解答第3题者:彭祖仁,汪良辉,李俊杰,储鹏程,王普.

解答第5题者:诸宪忠.

解答第6题者:乐伟达.

1956年8月号征解问题答案

❖两队的组数和人数

1. 甲乙两队，各分为若干组. 甲队的组数等于每组的人数，乙队的组数亦等于每组的人数，后来甲队里调走了一人，这时甲队的人数恰为乙队的五倍. 问两队各有多少组，每组各有多少人?(提出人：江苏盐城 程鸿鼎)

解法1 设甲队分 x 组，共有 x^2 人；乙队分 y 组，共有 y^2 人.

依题意，$x^2-1=5y^2$. 这是属于 $x^2-Ay^2=1$ 型的佩尔(Pell)不定方程.

因为

$$\sqrt{5}=2+\sqrt{5}-2=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{\sqrt{5}-2}{1}}=$$

$$2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}=2+\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\cdots$$

得到连分数的连续诸近数为

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{2}{1},\frac{p_1}{q_1}=\frac{9}{4},\frac{p_2}{q_2}=\frac{38}{17},\frac{p_3}{q_3}=\frac{161}{72},\frac{p_4}{q_4}=\frac{682}{305},\frac{p_5}{q_5}=\frac{2\ 889}{1\ 292},\cdots$$

取 $x_1=9,y_1=4$ 为能满足 $x^2-1=5y$ 的一组解.

今来求本题的一切解，依公式：$\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}+\frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}\times 5\right)$，于是得

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\times 5\right)=\frac{9}{4},\frac{x_2}{y_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{4}{9}\times 5\right)=\frac{161}{72}$$

$$\frac{x_3}{y_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{38}{17}+\frac{17}{38}\times 5\right)=\frac{2\ 889}{1\ 292},\frac{x_4}{y_4}=\frac{1}{2}\left(\frac{161}{72}+\frac{72}{161}\times 5\right)=\frac{51\ 841}{23\ 184}$$

$$\frac{x_5}{y_5}=\frac{1}{2}\left(\frac{682}{305}+\frac{305}{682}\times 5\right)=\frac{930\ 249}{416\ 020},\cdots$$

所以

$$\begin{cases}x=9,161,2\ 889,51\ 841,930\ 249,\cdots\\ y=4,72,1\ 292,23\ 184,416\ 020,\cdots\end{cases}$$

由此知道本题的答案，照理论来说，是无穷的. 但若取

$$x_4^2 = (51\ 841)^2 = 2\ 687\ 489\ 281, y_4^2 = (23\ 184)^2 = 537\ 497\ 856$$

得到两队的人数

$$x_4^2 + y_4^2 = 3\ 224\ 987\ 137$$

已超过全世界人类的总和.若取更大的 x,y,就变成没有实际的意味了.

注 本题的解答,也可直接从连分数的诸近数$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$(这式分子分母的附标都为奇数)求出,更是简捷.即

$$\begin{cases} x \text{ 的值为} p_1 = 9, p_3 = 161, p_5 = 2\ 889 \\ y \text{ 的值为} q_1 = 4, q_3 = 72, q_5 = 1\ 292 \end{cases}$$

解法 2 $\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}$

取这个连分数的两项,得近数为$\frac{9}{4}$.即 $x = 9, y = 4$ 为本题的最小值解答.其他的普遍解答,可由下式求出

$$x_n = \frac{1}{2}[(x + y\sqrt{A})^n + (x - y\sqrt{A})^n], \text{式中 } A = 5$$

$$y_n = 2\frac{1}{\sqrt{A}}[(x + y\sqrt{A})^n - (x - y\sqrt{A})^n]$$

当 $n = 1$,得

$$x_1 = \frac{1}{2}[(9 + 4\sqrt{5}) + (9 - 4\sqrt{5})] = 9$$

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}[(9 + 4\sqrt{5}) - (9 - 4\sqrt{5})] = 4$$

当 $n = 2$,得

$$x_2 = \frac{1}{2}[(9 + 4\sqrt{5})^2 + (9 - 4\sqrt{5})^2] = 161$$

$$y_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}[(9 + 4\sqrt{5})^2 - (9 - 4\sqrt{5})^2] = 72$$

当 $n = 3$,得

$$x_3 = \frac{1}{2}[(9 + 4\sqrt{5})^3 + (9 - 4\sqrt{5})^3] = 2\ 889$$

$$y_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}[(9 + 4\sqrt{5})^3 - (9 - 4\sqrt{5})^3] = 1\ 292$$

当 $n = 4$,得

$$x_4 = \frac{1}{2}[(9+4\sqrt{5})^4+(9-4\sqrt{5})^4] = 51\ 841$$

$$y_4 = \frac{1}{2\sqrt{5}}[(9+4\sqrt{5})^4-(9-4\sqrt{5})^4] = 23\ 184$$

❖指数含对数的方程

2.试解方程：$x^{3+\ln\frac{x}{3}} = 900$.(提出人：黑龙江省牡丹江 刘镜先)

解法1 两边取自然对数

$$\left(3+\ln\frac{x}{3}\right)\ln x = \ln 900$$

$$3\ln x + (\ln x - \ln 3)\ln x = \ln 900$$

$$(\ln x)^2 + (3-\ln 3)\ln x - \ln 900 = 0$$

$$(\ln x)^2 + 1.901\ 387\ 7\ln x - 6.802\ 394\ 8 = 0$$

$$\ln x = \frac{-1.091\ 387\ 7 \pm \sqrt{(1.901\ 387\ 7)^2 + 4\times 6.802\ 394\ 8}}{2} =$$

$$\frac{-1.091\ 387\ 7 \pm 5.552\ 012\ 6}{2} =$$

$$1.825\ 31 \text{ 及 } -3.726\ 70$$

当 $\ln x = 1.825\ 31$ 时

$$\lg x = 1.825\ 31 \times 0.434\ 29 = 0.792\ 722\ 0$$

得 $x = 6.204\ 70$;

当 $\ln x = -3.726\ 70$ 时

$$\lg x = -3.726\ 70 \times 0.434\ 29 = -1.618\ 485\ 2 = \bar{2}.381\ 514\ 8$$

得 $x = 0.024\ 072$. 以 $x = 0.024\ 072$ 代入原式，不合理. 故本题的解答是 $x = 6.204\ 70$.

解法2 将自然对数换为常用对数

$$\left(3+\ln 10\cdot\ln\frac{x}{3}\right)\lg x = \lg 900$$

查表，$\ln 10 = 2.302\ 585\ 1$，$\lg 3 = 0.477\ 121\ 3$，$\lg 900 = 2.954\ 242\ 5$，于是

$$2.302\ 585\ 1(\lg x)^2 + 1.901\ 387\ 7\lg x - 2.954\ 242\ 5 = 0$$

$$(\lg x)^2 + 0.825\ 762\ 2\lg x - 1.283\ 011\ 2 = 0$$

$$\lg x = -0.412\ 881\ 1 \pm \sqrt{(0.412\ 88)^2 + 1.283\ 01} =$$

$$-0.412\ 881\ 1 \pm \sqrt{1.453\ 482\ 024\ 2} =$$

$$-0.4128811 \pm 1.2056045 =$$

$$0.792723 \text{ 及 } -1.618486(\text{即}\bar{2}.381514)$$

所以 $$x = 6.20470 \text{ 及 } 0.024072$$

这两个 x 的值，只有 $x = 6.20470$ 是合于原式的解答.

❖整数式的一个性质

3. 已知：$a^2+b^2=c^2$（式中 a,b,c 为整数），求证：$abc \equiv 0 \pmod{60}$.（提出人：上海延安中学数学小组）

证法 1 令 $a=m^2-n^2, b=2mn, c^2=m^2+n^2$，且两数 m,n 中，有一个是奇，一个是偶.

今要证明

$$abc = 2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2) \equiv 0 \pmod{60}$$

只需证明 $abc \equiv 0(\text{mod } 3,4,5)$.

(1) 因为两数 m,n 中有一个是偶，就得 $2mn \equiv 0 \pmod 4$，所以

$$abc \equiv 0 \pmod 4$$

(2)① 若 m 或 n 是 3 的倍数，就得 $mn \equiv 0 \pmod 3$，所以 $abc \equiv 0 \pmod 3$.

② 若 m 与 n 都和 3 互素，由费马定理：

$m^2 \equiv 1 \pmod 3$ 和 $n^2 \equiv \pmod 3$，就得

$$m^2-n^2 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod 3$$

所以 $abc \equiv 0 \pmod 3$.

(3)① 若 m 或 n 是 5 的倍数，就得 $mn \equiv 0 \pmod 5$，所以 $abc \equiv 0 \pmod 5$.

② 若 m 与 n 都和 5 互素，由费马定理：$m^4 \equiv 1 \pmod 5$ 和 $n^4 \equiv 1 \pmod 5$，就得

$$(m^2-n^2)(m^2+n^2) = m^4-n^4 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod 5$$

所以 $abc \equiv 0 \pmod 5$.

综合上面的(1)，(2)，(3) 论证，所以 $abc \equiv 0(\text{mod } 3,4,5)$.

证法 2 (1) 首先证 $abc = M(3)$.

因为任意一个整数可表示为 $3m$ 或 $3m \pm 1$，$(3m)^2 = 9m^2 = M(3)$，$(3m \pm 1)^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = M(3)+1$，由此知道任意完全平方数必为 $M(3)$ 或 $M(3)+1$，但绝不可能为 $M(3)-1$.

① 若 a,b 中有一个为 $M(3)$，得 $abc = M(3)$.

② 若 a^2,b^2 皆为 $M(3)+1$，得

$$c^2 = a^2 + b^2 = M(3) - 1$$

这是不可能的.

所以 $abc = M(3)$.

(2) 次证 $abc = M(4)$.

因为任意一个整数可表示为 $4m, 4m \pm 1, 4m + 2, (4m)^2 = M(4), (4m \pm 1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = m(4) + 1, (4m + 2)^2 = M(4)$,由此知道任意完全平方数必为 $M(4)$ 或 $m(4) + 1$,但绝不可能为 $M(4) - 1$ 与 $M(4) + 2$.

① 若 a, b 中有一个为 $M(4)$,得 $abc = M(4)$.

② 若 a^2, b^2 皆为 $M(4) + 1$,得

$$c^2 = a^2 + b^2 = M(4) + 2$$

这是不可能的.

③ 若 a^2, b^2 中有一个为 $M(4)$,另一个为 $M(4) + 1$. 令 $a^2 = M(4), b^2 = M(4) + 1$,得

$$c^2 = a^2 + b^2 = M(4) + 1$$

这时 b^2, c^2 皆为奇数,即 b, c 皆为奇数,于是 b, c 皆为 $M(4) \pm 1$.

设 $b = 4n \pm 1, c = 4m \pm 1$,得

$$a^2 = c^2 - b^2 = (4m \pm 1)^2 - (4n \pm 1)^2 = 16(m^2 - n^2) \pm 8m \pm 8n = M(8)$$

于是 $a = M(4)$,所以 $abc = M(4)$.

(3) 最后证 $abc = M(5)$.

因为任意一个整数可表示为 $5m, 5m \pm 1, 5m \pm 2, (5m)^2 = M(5), (5m \pm 1)^2 = 25m^2 \pm 10m + 1 = M(5) + 1, (5m \pm 2)^2 = 25m^2 \pm 20m + 4 = M(5) - 1$,由此知道任意完全平方数必为 $M(5)$ 或 $M(5) + 1$ 或 $M(5) - 1$,但绝不可能为 $M(5) + 2$ 与 $M(5) - 2$.

① 若 a, b 中有一个为 $M(5)$,得 $abc = M(5)$.

② 若 a^2, b^2 中有一个为 $M(5) + 1$,另一个为 $M(5) - 1$,得

$$c^2 = a^2 + b^2 = M(5)$$

于是 $c = M(5)$,所以 $abc = M(5)$.

③ 若 a^2, b^2 皆为 $M(5) + 1$ 或皆为 $M(5) - 1$,得

$$c^2 = a^2 + b^2 = M(5) + 2 \text{ 或 } c^2 = M(5) - 2$$

这都是不可能的.所以 $abc = M(5)$.

综合上面三个论证,得 $abc \equiv 0 (\bmod 3, 4, 5)$,所以 $abc \equiv 0 (\bmod 60)$.

❖矩形中的线段

4.如图1,矩形的两边 $AB=2BC$,$\angle CBE=\frac{\pi}{12}$.求证:$AB=AE$.(提出人:常熟 王效生)

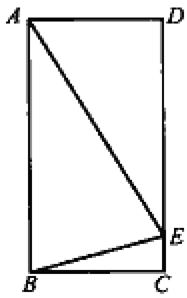


图1

证法1 因为 $\angle CBE=\frac{\pi}{12}$,$\frac{CE}{CB}=\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$,所以 $CE=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\cdot CB$,所以

$$DE=CD-CE=2CB-\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}CB=\sqrt{3}CB$$

又 ADE 是直角三角形,得

$$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{CB^2+3\,CB^2}=2CB$$

所以 $AE=AB$.

证法2 因为 $\angle CBE=\frac{\pi}{12}=15°$

$$\tan 15°=\tan\frac{30°}{2}=\frac{CE}{CB}=\frac{1-\cos 30°}{\sin 30°}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$$

所以 $CE=(2-\sqrt{3})CB$.

又 $CD=2CB$,所以

$$DE=CD-CE=2CB-(2-\sqrt{3})CB=\sqrt{3}CB$$

但 $\tan\angle AED=\frac{DA}{DE}=\frac{CB}{\sqrt{3}CB}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,所以 $\angle AED=30°$,所以 $DA=\frac{1}{2}AE$.

已知 $DA=\frac{1}{2}AB$,所以 $AB=AE$.

❖解余割方程

5. 利用 $\sin 9\theta$ * $=256\sin^9\theta-576\sin^7\theta+432\sin^5\theta-120\sin^3\theta+9\sin\theta$,求证:$\csc^2\frac{\pi}{9}+\csc^2\frac{2\pi}{9}+\csc^2\frac{4\pi}{9}=12$.(提出人:四川邛崃 李仲华)

证 令 $\sin 9\theta=0$,得 $\theta=\frac{n\pi}{9}$.

再令 $\sin\theta=x$,得

$$256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x=0$$

这式的九个根为

$$0,\ \pm\sin\frac{\pi}{9},\ \pm\sin\frac{2\pi}{9},\ \pm\sin\frac{3\pi}{9},\ \pm\sin\frac{4\pi}{9}$$

今令 $\csc^2\theta=\frac{1}{x^2}=y$,得

$$9y^4-120y^3+432y^2-576y+256=0$$

即

$$(3y-4)(3y^3-36y^2+96y-64)=0$$

这式的四个根为

$$\csc^2\frac{\pi}{9},\csc^2\frac{2\pi}{9},\csc^2\frac{3\pi}{9},\csc^2\frac{4\pi}{9}$$

但 $\csc^2\frac{3\pi}{9}=\frac{4}{3}$,所以

$$\csc^2\frac{\pi}{9}+\csc^2\frac{2\pi}{9}+\csc^2\frac{4\pi}{9}=\frac{36}{3}=12$$

注 * 原文此处误印成 $\sin\frac{\pi}{2}$,应该写为 $\sin 9\theta$ 或 $\sin\pi$.

又本题不利用公式 $\sin 9\theta$,也可直接证明 $\csc^2\frac{\pi}{9}+\csc^2\frac{2\pi}{9}+\csc^2\frac{4\pi}{9}=12$.

1956年8月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:张禄度.

解答第1,3,4,5题者:赵源,喻正元,刘应明,黄宝根,史树中,方博仁.广州广雅中学祖冲之数学研究组,王冠闽,曾芦湘.

解答第2,3,4,5题者:刘志仁.

解答第1,3,4题者:蓝以中,阳正谊,陈静剑,谈祥伯,朱维平,吴茂贵,过伯祥,唐培坤,吴顺唐,梁桂明,上海五爱中学高三(1)数学小组,福州五中华罗庚数学研究小组,徐自新,洪毅,黄浩如.上海格致中学高三进军数学小组,楼宇同,袁泽仁.广州华南师院附中石牌分校高二(3)红色数学研究小组.

解答第2,3,4题者:沈志钧.

解答第2,4,5题者:黄柏森.

解答第3,4,5题者:章民泰.

解答第1,4题者:李兆寅,胡晖,浦祖康,何伟林,梅孝坤,谢尔益,谭立平,谭立球,谢启明,干振孝,文贤杰,潘秉淮,安徽当涂向山小学吕君,潘其光,水乃翔,程鸿鼎,袁君诰.福建惠安三中数学组,陈兴昭,刘昌砚.上海卢湾中学高三(2)数学小组,吴巨声.安徽休宁中学高三甲祖冲之数学小组.

解答第2,4题者:岳祖尧,何懋熙.

解答第3,4题者:喻峻,吕晓夫,刘相,王维新,张家珍,章女,张鸿林,辛开河,马殿荣,陈剑豪,四川古宋新华小学任君,李绍亮.上海第二师范三年级数学爱好小组,湖北黄冈中学高三八班,江苏扬州中学高三(一)欧拉数学小组,鲜于方圣,杨永靖,林介义,南京四友,黄永源,俞维强,吴章江,吴国玢,张子荣,徐季林,徐孝舜.

解答第3题者:孙义鹄.黑龙江省黑河中学高四级数学科学小组,华永一.

解答第4题者:夏之干,何成浠,侯忠松,刘克亮,胡广春,刘宝平,黄玉川,王自鉴,熊曾润,禹云峰,宣松林,王启东,王醒华,王聪海,古敏思,潘守孝,葛生源,毛宗灏,汪良辉,贾彦宾,安心平,何丹成,谭天华,雷绍五,五开化,邹定纲,程本真,程本初,陈沛尧,祝疆,李方钥,刘光勋,李银发,唐翘健,刘连城,杨秉生,钱生钰,瞿宗县,李子涵,李冬鸥,徐永祥,丁士元,项品荣,邹大城,富林松,李政,朱秋寅,侯文正,徐忠苏,李伯柱,王文珍,胥奕绯,徐启源,徐从德,张坤华,贾宜民,纪百祥,周光任,陈长虹,汤礼道,隋一国,李孝同,魏忠德,邢盘泉,梅永先,朱耀明.复旦速中理四一数学小组,杨天龙,王瑞麟,方炯深,刘水生,陈华瑜,吴伯钦,陈镇杰,卢甲骥,谭根源,毛道昌,张鹤登,李锦江,陆万全,吴学

全，卢臣源，王林生，张贻厚，方耀森，丁永普，孙明，蓝绪，杨尧仁，范泽仁．武昌华中工院机械系一年级陈君，舒和益，彭祖仁，施佐南．江苏无锡师校教学教研组，臧家森，刘贵兴，张学敏，李亚君，曲惠敏，赵伯龄，蔡纯烈，梁大立，郑懋琨，袁文彬，陈守介，陈守明，李嘉英，胡国盛，唐家渊，周颖，胡绍宗，田勤，蒋英春，陈镇川，陈苍卿，罗烂荣，王师，何勇根，吉广川，吴文发，蔡乡生，丁宗起，徐长，曹建中，周军琪，刘春青，周恭宜，封光仁，夏先明，孙子鲤，黄鹏程，陈兴伟，邱松生，柴庆祥，洪宝国，郑玉应，周化同，林忠泉，万英，朱冠章，朱孝恩，苏润强，狄菊逸，余福增，魏春涛，易杏海，南文秀，黄家彬，石明学，邬士法，吴锡如，封辅智，顾振权，花子昌，韩念国，黎冰生，徐渭川，甘治安，范熹，乔万彪，庄栽真，张知班，冯翰翘，李敬章，汤维成，顾志峰，金源，戴冠儒，赵宗兴，郑万嵩，江敦禧，吴家骧，吴钟，戚汪良，白举真，邵钟龙，匡励心，田开文，庄新华，周锡源，袁国兴，唐瑜，张学文．余姚一中叶君，王咏厚，徐乃泉，赵长根，赵特伟，陈炳孚，张庆毓，施嘉禾，凌绍章，夏鼎，冯霖生，樊烈芳，王远宪，刘垂玕，吴柱鳌，丁桂村，曹致琴，韩绍辉，李从敬，郑世雄，彭绍栓，肖天栋，孙厚军，钱景清，李佑洪，樊明哲，陈广卿，徐直叔，陈英栋，张洵，汤纯，王明亮，林定伦，杨洪儒，卢起骏，叶凤，崔寅初，潘传旺，胡高比，申鸣，孙禧海，阎广瑛，段成善，李大耀，周新，陆荣轩，戴敦镛，林复龙，汤利兆，吴博仁，杨文源，宣桂鑫，王光烈，张之中，马国伟，宋博美，梁学章，韩锡来，杨裕泉．上海延安中学高一(3) 数学研究小组，徐祖毅，王发榕，段盛瑞，魏柏林，许大才，陈兆良，陈顺锴，曾斟平，吴宗荣，郑惠森，白雪，张志华．武昌实验中学高二(三) 某甲乙，叶希孟，姚珍芝，卫中，管志军，顾长祥，何永鲤，陈文笙，马润光，赵可祥，陈景舜，丁邦璠，张耀焕，田连治，汪建华，吕圣鸿，卢贤良．上海南郊中学高三二人小组，吴书华，汤春潮，何俊若，唐永宁，仲崇光，孙平封，王普．上海洋泾中学高三(3) 数学小组，艾双乐，王东生，戴天鸣，王兴贵，江道新，邬家义，周兴武，潘鼎元，花炳兴，石德富，查旭初，李明昭，张先觉，高业修，周在，唐德善，陆宪忠，陈龙保，傅常正，胡培成，金治民，刘德群，马明，闫东合，胡秀良，华发生，刚正实，刘有智，胡梅生，彭生，德华，张水，潘咸按，张有弦，白云亭，纷宏，章以刚，朱兆礼，谷定燮，姜家泰．江苏兴化中学高三乙数学小组，赵钟会，周本华，刘翌邦，徐亦，卢浩琳，蔡尔闵，陈英栋，文寿元，王六桥．湖北恩施高中毕达哥拉斯数学小组，葛元冲，董志荣，姚冬青，马世国，乐秀林，马全岭，郭中志，石伯吹，周士琨，裘林亚，何鸿栩，顾柏荣，高坤秀，刘镜先，王维宇，张金良，陈楅瑞，洪正福，郑万泔，丁道森，黄恒祥，张金森，王炎森，卫增泉，陈麟生，黎尚峰，徐虹钰，傅作新，吴诚孝，栾小春，谢时亭，刘三强，匡彼衡，俞忠元，任孝瑛，蔡绿茵，周延昆，王博施，福建惠安一中数学兴趣小组，钰桦，苏志鹤，朱从鉴，赵长顺，李增训．

1956年8月号小知识问题答案

❖我国女数学家

1.我国历代女子研究数学的有哪些人?(提出人:昆明 吕艳华)

答 (1)女娲,我国上古时期,女子研究天算的,相传有女娲氏.她是伏羲氏同母所生的妹妹.据淮南子和史记载说:"女娲曾锻炼五色石块以补天."可见她是关心于天事的人咧!现今山东嘉祥县汉武梁祠里,还保存有汉时(129—147)所刻的石碑.如图1,碑上刻着一幅图像,左面是女娲,手里拿的十字架就是圆规;右面是伏羲,手里拿的三角板就是方矩,又在高昌(今新疆吐鲁番地)附近的唐墓中,亦发现有"女娲执规,伏羲执矩"的图像.所谓规矩,就是画圆方图形所用的数学工具.



图1 女娲执规伏羲执矩图(129—147)

(2)班昭(公元44?—118?年)(图2)一名姬,字惠姬,东汉安陵(今陕西咸阳县东)人,是班彪的女儿,班固的妹妹.她的丈夫姓曹名世叔,所以被称为曹大家.汉和帝时(公元90年顷)入宫中,在东观阁里阅读藏书,教授邓皇后和妃子们的天文算数.公元92年她的哥哥班固死去,遗有汉书还没有完成,由她继续余业,撰著其中的八表和天文志诸篇.汉代的大儒马融是她的学生,郑玄是她的再传弟子.

(3)王美人,后汉书卷十下,汉灵帝何皇后(180年立为皇后)记载道:"王美

人(是汉献帝的母亲,为何皇后所酖杀)能书会计."可见汉代已有不少的女子擅长于数学呢!

(4)楚女(十一世纪中),是宋代开封阼城人楚衍的女儿.楚衍精通九章,辑古,缀术,海岛诸算经.因此谈到宋代擅长天算的专家,每以楚衍为首.楚女继传父业,对于数学,同样地享受有芳名.

(5)蔡氏,是明嘉靖间(1525年顷)汤希富的爱人.她精通九章算法.

(6)葛宜,字南有,是清代初期(十七世纪)海宁(属浙江)人朱尔迈的爱人.她对于天算数理,书绘棋弈,均臻精妙,并能够用天文仪器去窥测星象,著有玉窗遗稿二卷.

(7)沈绮,字素君,是清代乾嘉时(1795年顷)常熟人殷埔的爱人.她精通乐律和历数,并擅长经史.著有管窥一得十二卷,唾花词一卷,徐庾补注四卷诸书.



班昭(公元44年顷至118年顷)
图2

(8)王贞仪(1768—1797)字德卿,是清代江宁人王筠琛的女儿,宣城詹枚的爱人,她嗜读梅氏的天算著作.每于夜间坐观星象,预言晴雨丰歉,俱多灵验.著有德风亭初集十四卷,二集六卷,绣铁余笺十卷,星象图释二卷,象数窥余四卷,算术简存五卷,筹算易知,重订策算证讹,西洋筹算增删各一卷,沈痾呓语诸书.

(9)钱洁,字瑜素,是清代陈鼎的继妻,她精通数学,且知书善诗.

(10)蕊珠,是清代陈鼎的爱人.她通晓九章算术,能推步日月食,不差毫厘,且善于绘作图画.

(11)兰陵女史,是清代的女算家.著有中星歌和图,刊行于世.又依据月份与时令,每月作有一歌,共十二个歌.歌后各附有星象图.

(12)江蕙(1882—1902),字湘芬,是清末元和(今江苏吴县)人数学家江衡的女儿,她通晓象数,遗稿有西楼算草一卷,于1902年出过刊本.

❖隙积术和会圆术

2.什么叫做隙积术和会圆术?(提出人:兰州 章宝云)

答 (1) 隙积术是一种高阶级数求总和的算法. 这个方法为我国宋朝多才多艺的数学家沈括(1030—1093)所首创. 在沈氏所著梦溪笔谈书中,说到九章算术的商功章载着刍童算法,也就是矩棱台的求积法. 但刍童是由六个平面所围成的立体. 今若换一个算法,要求出酒店或陶器店里所堆积成的瓮缸,瓦盆等类的个数. 那些堆成的形状,虽然有点像刍童,但因为它们含有缺孔和虚隙,却不能照着刍童的算法去计算. 所以沈括创造出隙积术来. 这种算法和后世西洋数学书中的积弹法相类似.

如图 3,把同样的许多东西堆积成为 n 层,各层都为矩形. 从下层到上层的长或阔,各依次递减一个. 设底层的长为 A 个,阔为 B 个;顶层的长为 a 个,阔为 b 个. 问这类的东西共有多少个?命这类东西的总个数为 S,则

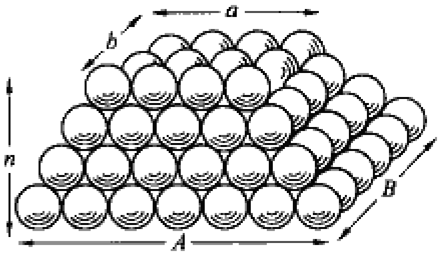


图 3

$$S = AB + (A-1)(B-1) + (A-2)\cdot(B-2) + \cdots + (a+1)(b+1) + ab(\text{计 } n \text{ 项}) = \frac{n}{6}[A(2B+b) + a(2b+B) + B - b]$$

今来证明这公式.

根据等差级数的求和方法,令首项为 a,末项为 l,总和为 S',得

$$S' = \frac{1}{2}n(a+l) \quad ①$$

又由图 4,可求自然数的平方级数之和为

$$S'' = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

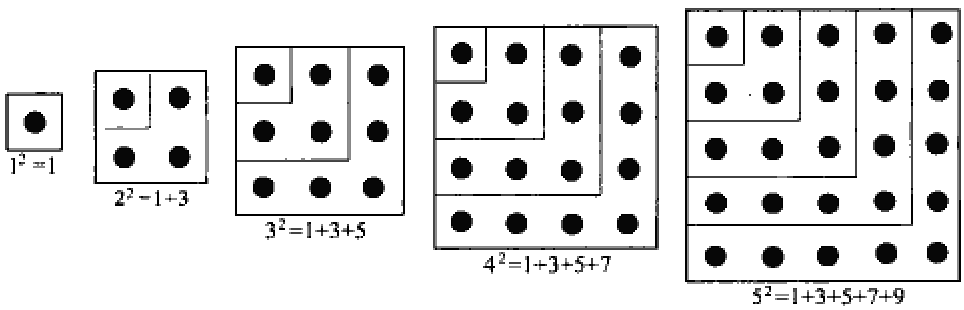


图 4

因为把同样的东西,堆积成为 n 层,各层都成方形,设它的总和为 S',就可利用图 4,把各层都分解为若干个连续奇数的和. 换句话说,在总和里有 n 个 1(图 4 是假定 $n=5$),$n-1$ 个 3,$n-2$ 个 5,……. 把它们改排一下,先连排 n 个

1,次排 $n-1$ 个 3,再排 $n-2$ 个 5,……,得如图 5 黑圆点的形. 又用两个同样方形排各层的数,各照原式配写在两边(图 5 圆圈所示),恰成一个矩形. 由式①得这个矩形的长边之个数为

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

阔边之个数为 $2n+1$,所以图 5 的总数恰是 S'' 的 3 倍,即

$$3S''=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

所以

$$S''=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad ②$$

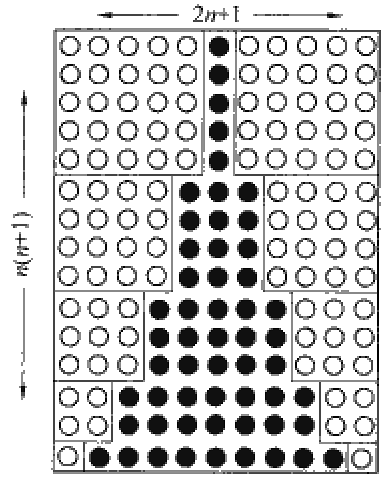


图 5

应用式①②,就得

$$\begin{aligned}S&=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots+(a+\overline{n-1})(b+\overline{n-1})=\\&ab+[ab+(a+b)+1]+\\&[ab+2(a+2)+2^2]+\cdots+\\&[ab+(n-1)(a+b)+(n-1)^2]=\\&nab+[1+2+3+\cdots+(n-1)]+\\&[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]=\\&nab+\frac{1}{2}(n-1)n(a+b)+\frac{1}{6}(n-1)n[2(n-1)+1]=\\&\frac{n}{6}[6ab+3(n-1)(a+b)+(n-1)(2n-1)]\end{aligned} \qquad ③$$

又在图 3,各层的长为 $a,a+1,a+2,\cdots,A-1$ 共计 n 项,故

$$A=a+(n-1),n=A-a+1 \qquad ④$$

同理

$$n=B-b+1 \qquad ⑤$$

以④⑤代入③,得

$$\begin{aligned}S&=\frac{n}{6}[6ab+3(n-1)a+3(n-1)b+(n-1)(2n-1)]=\\&\frac{n}{6}[6ab+3(B-b)a+3(A-a)b+(B-b)(2A-2a+1)]=\\&\frac{n}{6}[A(2B+b)+a(2b+B)+B-b]\end{aligned}$$

这就是沈括隙积术公式.

沈括以后,宋朝杨辉的详解九章算法(1261)和元朝朱世杰的四元玉鉴

(1303)又举出许多新的级数,统称作垛积术,都是由沈括隙积术推广而得到的,所以清朝顾观光(1799—1862)曾说道:"垛积术详于杨朱二氏的书.但创始的功勋,却应该归于沈括."

(2)会圆术是由已知圆的直径和弓形的矢(即高),来求出弓形的弦(即底)和弓形的弧之算法,也为沈括所创立的.

如图6,令圆心为 O,弓形为 ABC.直径 $= AE = d$,弓形的矢 $CD = b$,弓形的弦 $= AB = c$,弓形的弧 $= \overline{ACB} = a$.

沈括的会圆术公式如下:

(1)$c = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - b\right)^2}$　　①

(2)$a = \frac{2b^2}{d} + c$　　②

今来证明这两个公式.

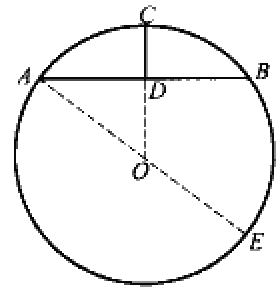


图6

在公式①中,因为 $\triangle AOD$ 是勾股形,$AD = \frac{c}{2}$,$AO = \frac{d}{2}$,$OD = \frac{d}{2} - b$.

依毕达哥拉斯定理得

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - b\right)^2$$

所以

$$c = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - b\right)^2}$$

又在公式②中,所得的弧是一个近似值.根据九章算术所载弓形面积的近似值:$A = \frac{1}{2}(bc + b^2)$.由图6知

$$S_{扇形OACB} = S_{弓形ACB} + S_{\triangle OAB} =$$

$$\frac{1}{2}(bc + b^2) + \frac{1}{2}c\left(\frac{d}{2} - b\right) = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}cd$$

又 $S_{扇形OACB} = \frac{1}{2}a \times \frac{d}{2} = \frac{1}{4}ad$,于是

$$\frac{1}{4}ad = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}cd$$

所以

$$a = \frac{2b^2}{d} + c$$

这个公式所算的弧长,虽然得到的只是近似值,但在实用上已很足够.在沈氏以后,元朝郭守敬造授时历(1280),以四次方程来求天球黄道积度的矢,就是

引用沈括会圆术来列式的.

❖宾格三角板

3.什么叫做宾格三角板?(提出人:济南 刚证实)

答 宾格三角板是俄国工程师宾格在1836年所首创一种圆积求方的实用三角板,也就是一只具有27°36′的直角三角板.

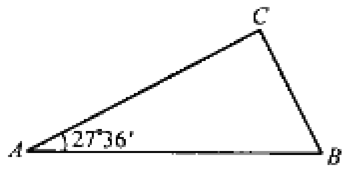


图 7

它的原理是:如图7,△ACB为直角三角形,$AB = 2r$为已知图的直径,弦AC为所求与圆等积的正方形的一边,今令AC与AB的夹角为α,那么角α可以求出来.

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}$$,所以$x = 2r\cos\alpha$,所以$x^2 = 4r^2\cos^2\alpha$.

又所求正方形面积要等于圆面积,即$4r^2\cos^2\alpha = \pi r^2$,因此$\cos^2\alpha = \frac{1}{4}\pi$,所以$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0.866\,226\,9$,所以$\alpha = 27°36'$(另一个锐角$\angle ABC = 62°24'$).

宾格三角板是一种近似的圆积求方之工具.事实上,圆积求方,就根本没有精确的解答.然而宾格三角板的精确程度极为可观.最主要的优点是方便,因此它常常在工程学上被利用.

❖最速降线问题

4.什么叫做最速降线问题?(提出人:湖北宜都鲜于方圣)

答 首先解释什么叫做最速降线,最速降线就是旋轮线.

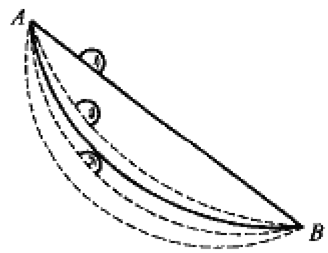


图 8

次来解释最速降线问题.如果想让一个金属球沿着联结两点A跟B的磨光金属斜槽滚下,如图8,希望在最短时间达到底,问金属槽应该做成怎样的形状?这个题目,初看起来,认为它应该是直的.因为AB间以成直线为最短.但我们研究的只是时间,时间不但跟路线的形状有关,而且也跟滚下的速度有关.要想速度大,很可能认为把联结AB的槽弯曲就行,或者弯曲要大些.但是如果前部分陡,后部分一定长而比较平坦,所需要的时间也不是最省.

伽利略(1564—1642)认为球落下最省的时间是槽成圆弧形.可是以后瑞士数学家贝努利兄弟,用精密的计算,证明事实不是这样,这样的槽应该弯曲成旋转线的弧.从那时起,旋轮线就获得最速降线的名称.

上述的事情,叫做最速降线问题.而贝努利兄弟的证明,就成为数学中新的分科——变分学的开始.所谓变分学,就是专门研究我们所感兴趣的某一种会达到极小(有时要求极大值)的曲线形状的学科.

❖关羽放曹

5.如图9,来做一种游戏,名为关羽放曹,表演曹操在赤壁战败后,逃到华容道,被关羽预先埋伏的军队挡住.由于曹操苦苦地哀求,关羽才把他放走的故事.游戏如下:拿一块矩形的板子,划成二十个方格,另用硬纸剪成些纸片,关羽占两个横方格,四将官各占两个纵方格,四兵士各占一个方格;曹操占四个方格.各人行走时,允许将纸片向上或向下以及向左右移动,但不能纵横互换方向.四方格内写有2,3,6,7字样的地方作为出口.当曹操的纸片移到那里时,就算到了出口.问各人应该怎样走法,最少共走多少步数,可把曹操放走?(提出人:福建漳州王冠闽)

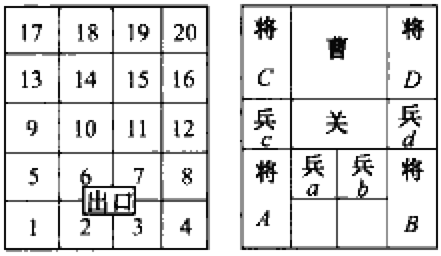


图9

答1 首先规定怎样叫做走一步.当我们把纸步向上或向下及向左右移动一格或几格,达到停止的时候,称为一步.

本题的走法最少是70步.各步移动的次序列式如下(图10):

(1)兵 $a\to3$ (2)将 $A\to2,6$ (3)兵 $c\to1$ (4)将 $C\to5,9$

(5)曹 $\to13,14,17,18$ (6)将 $D\to15,19$ (7)兵 $d\to20$

(8)将 $B\to12,16$ (9)兵 $b\to8$ (10)兵 $a\to4$ (11)将 $A\to3,7$

(12)兵 $c\to6$ (13)将 $C\to1,5$ (14)关 $\to9,10$ (15)将 $A\to7,11$

(16)兵 $a\to2$ (17)将 $A\to3,7$ (18)将 $D\to11,15$ (19)兵 $d\to19$

(20)将 $B\to16,20$ (21)兵 $b\to12$ (22)将 $A\to4,8$ (23)将 $D\to3,7$

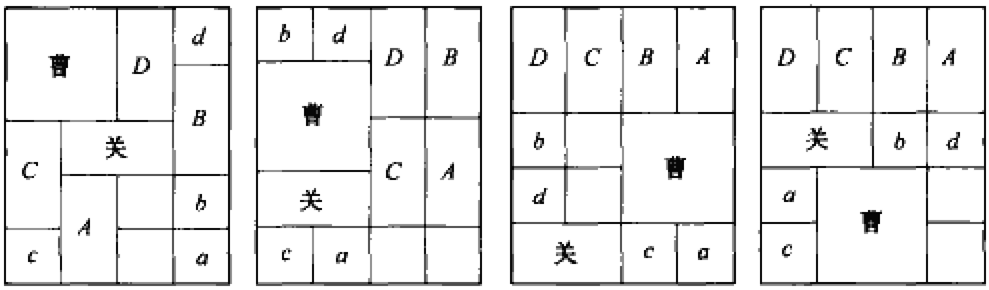
(24)兵 $b\to15$ (25)关 $\to11,12$ (26)兵 $c\to9$ (27)兵 $a\to10$

(28)将 $C\to2,6$ (29)兵 $c\to1$ (30)兵 $a\to5$ (31)关 $\to9,10$

(32)将 $B\to12,16$ (33)兵 $d\to20$ (34)兵 $b\to19$ (35)将 $D\to11,15$

(36)将 $C\to3,7$ (37)兵 $a\to2$ (38)关 $\to5,6$ (39)曹 $\to9,10,13,14$

(40) 兵 $b \to 17$　(41) 兵 $d \to 18$　(42) 将 $D \to 15,19$　(43) 将 $C \to 7,11$
(44) 将 $B \to 16,20$　(45) 将 $A \to 8,12$　(46) 兵 $a \to 4$　(47) 兵 $c \to 3$
(48) 关 $\to 1,2$　(49) 曹 $\to 5,6,9,10$　(50) 兵 $d \to 13$　(51) 将 $D \to 14,18$
(52) 将 $C \to 15,19$　(53) 曹 $\to 6,7,10,11$　(54) 兵 $d \to 5$　(55) 兵 $b \to 9$
(56) 将 $D \to 13,17$　(57) 将 $C \to 14,18$　(58) 将 $B \to 15,19$　(59) 将 $A \to 16,20$
(60) 曹 $\to 7,8,11,12$　(61) 兵 $d \to 10$　(62) 关 $\to 5,6$　(63) 兵 $c \to 1$
(64) 兵 $a \to 2$　(65) 曹 $\to 3,4,7,8$　(66) 兵 $d \to 12$　(67) 兵 $d \to 11$
(68) 关 $\to 9,10$　(69) 兵 $a \to 5$　(70) 曹 $\to 2,3,6,7$



已走10步　　已走45步　　已走60步　　已走70步

图 10

答2　照下面的走法,最少也是70步.

(1) 兵 $b \to 2$　(2) 将 $B \to 3,7$　(3) 兵 $d \to 4$　(4) 将 $D \to 8,12$
(5) 曹 $\to 15,16,19,20$　(6) 将 $C \to 14,18$　(7) 兵 $c \to 17$
(8) 将 $A \to 9,13$　(9) 兵 $a \to 5$　(10) 兵 $b \to 1$　(11) 将 $B \to 2,6$
(12) 兵 $d \to 7$　(13) 将 $D \to 4,8$　(14) 关 $\to 11,12$　(15) 将 $B \to 6,10$
(16) 兵 $b \to 3$　(17) 将 $B \to 2,6$　(18) 将 $C \to 10,14$　(19) 兵 $c \to 18$
(20) 将 $A \to 13,17$　(21) 兵 $a \to 9$　(22) 将 $B \to 1,5$　(23) 将 $C \to 2,6$
(24) 兵 $a \to 14$　(25) 关 $\to 9,10$　(26) 兵 $d \to 12$　(27) 兵 $b \to 11$
(28) 将 $D \to 3,7$　(29) 兵 $d \to 4$　(30) 兵 $b \to 8$　(31) 关 $\to 11,12$
(32) 将 $A \to 9,13$　(33) 兵 $c \to 17$　(34) 兵 $a \to 18$　(35) 将 $C \to 10,14$
(36) 将 $D \to 2,6$　(37) 兵 $b \to 3$　(38) 关 $\to 7,8$　(39) 曹 $\to 11,12,15,16$
(40) 兵 $a \to 20$　(41) 兵 $c \to 19$　(42) 将 $A \to 13,17$　(43) 将 $C \to 14,18$
(44) 将 $B \to 5,9$　(45) 将 $D \to 6,10$　(46) 兵 $b \to 1$　(47) 兵 $d \to 2$
(48) 关 $\to 3,4$　(49) 曹 $\to 7,8,11,12$　(50) 兵 $c \to 16$　(51) 将 $C \to 15,19$
(52) 将 $D \to 14,18$　(53) 曹 $\to 6,7,10,11$　(54) 兵 $c \to 8$　(55) 兵 $a \to 12$
(56) 将 $C \to 16,20$　(57) 将 $D \to 15,19$　(58) 将 $A \to 14,18$　(59) 将 $B \to 13,17$
(60) 曹 $\to 5,6,9,10$　(61) 兵 $c \to 11$　(62) 关 $\to 7,8$　(63) 兵 $d \to 4$
(64) 兵 $b \to 3$　(65) 曹 $\to 1,2,5,6$　(66) 兵 $c \to 9$　(67) 兵 $a \to 10$
(68) 关 $\to 11,12$　(69) 兵 $b \to 8$　(70) 曹 $\to 2,3,6,7$

1956年8月号小知识问题解答者名单

解答第2,3,4,5题者:广州华南师院附中石牌分校高二(3)红色数学研究小组.

解答第1,2,3题者:俞忠元,任孝瑛.

解答第1,3,4题者:唐永宁.

解答第2,3,4题者:广州广雅中学祖冲之数学研究组.

解答第3,4题者:程鸿飞.湖北黄冈中学高八班,鲜于方圣,刘昌砚,陈均英.

解答第1题者:林映辉,金治民,姜义忠,谷定燮.

解答第2题者:科克,于鸿钧.

解答第3题者:刘克亮,汪良辉,浦祖康,刘相,丁大吉,刘连城,邬思,陈兴昭,马殿荣,李大耀,周新,于由,姚珍芝,薛正中,杨龙田,王普,彭生,德华,潘咸桉,张有弦,周兴武,文寿元.湖北恩施高中毕达哥拉斯数学小组.

解答第4题者:傅绍华,邢盘泉,张先觉,蕾放.

解答第5题者:何成浠,贾彦宾,潘德华,申鸣,袁泽仁,傅作新.

1956年9月号征解问题答案

❖幻方种数

1. 用数码 1,2,3,4,5,… 排成幻方,使各行各列及两对角线诸数之和都相等. 而各个幻方的行数或列数,则称为幻方的阶数. 问三阶幻方,四阶幻方,五阶幻方,各有多少种排列法?(提出人:北京 张天民)

解 三阶幻方各行各列及对角线诸数字之和为 15,它的基本排法只有 1 种. 若互换它的上下左右正反各方向,可以有 8 个排列法.

四阶幻方各行各列及对角线诸数字之和为 34,它的基本排法有 880 种. 每种各有排法 8 个,共有排列法 7 040 个. 但若依着分类法来制造,我们可以作出图形为 4 352 个.

五阶幻方各行各列及对角线诸数字之和为 65,它的排列法有 28 800 种.

六阶幻方各行各列及对角线诸数字之和为 111,它的排列法有几百万种.

七阶幻方各行各列及对角线诸数字之和为 175,它的排列法有363 916 800 种.

读者如要详细知道幻方的作法,请参阅 Andrews: Magic Squares and Cubes; Schubert: Mathematical Essays and Recreations.

❖能分解的式子

2. 假若 $y^2+2xy+2x+my-3$ 能够分解,试求 m 是什么数?(提出人:江苏嘉定 黄家骏)

解 设原式分解为

$$(y+ax+b)(y+c)=y^2+axy+acx+(b+c)y+bc$$

比较上式右边与原式的系数

$$\left.\begin{aligned} a&=2,\\ ac&=2,\\ b+c&=m,\\ bc&=-3,\end{aligned}\right| \text{所以}\ \begin{aligned} a&=2\\ c&=1,\\ b&=-3\end{aligned}\ \text{所以}\ m=-2.$$

❖三元式的性质

3. 设 $x+y+z=xyz$,试证:

(1) $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ 没有实数解.(提出人:广西柳州 张斐慕,李泽勋及上海陈基沛)

解 (1) 左边 $=(x+y+z)-x(y^2+z^2)-$

$y(x^2+z^2)-z(x^2+y^2)+xyz(xy+xz+yz)=$

$xyz-x(y^2+z^2)-y(x^2+z^2)-z(x^2+y^2)+$

$(x+y+z)(xy+xz+yz)=$

$xyz-x(y^2+z^2)-y(x^2+z^2)-z(x^2+y^2)+$

$3xyz+yz(y+z)+xz(x+z)+xy(x+y)=$

$4xyz+[-x(y^2+z^2)-y(x^2+z^2)-$

$z(x^2+y^2)+yz(y+z)+xz(x+z)+xy(x+y)]=4xyz$

(2)
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{z}$$

即
$$\frac{x+y}{xy}=\frac{-(x+y)}{(x+y+z)z}$$

即
$$(x+y)(x+y+z)+xy(x+y)=0$$

即
$$(x+y)[(x+y+z)z+xy]=0$$

即
$$(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

当 $x+y=0$ 时,得 $y=-x$.以这值代入 $x+y+z=xyz$ 中,得 $z=x(-x)z$,即 $x^2=-1$,所以 x 没有实数.同理 y,z 也没有实数解.

❖相切三圆的空隙面积

4. 如图 1,有互相外切的三个圆,它们的半径分别为 a,b,c.试求:三圆相切当中空隙的面积是多少?(提出人:贵州遵义 赵福钊)

解 设三圆心为 O_1,O_2,O_3，它们的半径为 a,b,c，$\triangle O_1O_2O_3$ 的面积为 $\triangle$，扇形 $O_1T_2T_3,O_2T_3T_1,O_3T_1T_2$ 的面积为 D_1,D_2,D_3.

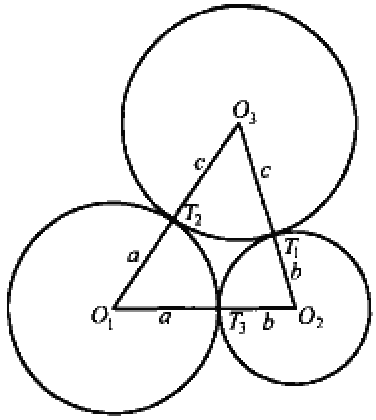


图 1

因为

$$O_2O_3 = b + c = \alpha$$
$$O_1O_3 = a + c = \beta$$
$$O_1O_2 = a + b = \gamma$$
$$s = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = a + b + c,$$
$$s - \alpha = a, s - \beta = b, s - \gamma = c$$
$$\triangle = \sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)} =$$
$$\sqrt{sabc} = \sqrt{(a+b+c)abc}$$

又依公式 $\sin\frac{O_1}{2} = \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}$，得

$$O_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}$$

于是

$$D_1 = \frac{\pi a^2}{360^\circ}O_1 = \frac{\pi a^2}{180^\circ}\arcsin\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}$$

同样可求 D_2 与 D_3.

所以

空隙面积 $= \triangle - D_1 - D_2 - D_3 =$

$$\sqrt{(a+b+c)abc} - \frac{\pi}{180^\circ}\left[a^2\arcsin\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + b^2\arcsin\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}} + c^2\arcsin\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}\right]$$

注 (1) 本题如用公式：$\sin O_1 = \frac{2\triangle}{(a+b)(a+c)} = \frac{2\sqrt{sabc}}{(a+b)(a+c)},\cdots$，得

$$\text{空隙面积} = \sqrt{sabc} - \frac{\pi}{180}\left[a^2\arcsin\frac{2\sqrt{sabc}}{(a+b)(a+c)} + b^2\arcsin\frac{2\sqrt{sabc}}{(a+b)(b+c)} + c^2\arcsin\frac{2\sqrt{sabc}}{(a+c)(b+c)}\right]$$

(2) 本题如用公式：$\cos O_1 = \frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2(a+b)(a+c)},\cdots$，得

$$\text{空隙面积}=\sqrt{sabc}-\frac{\pi}{180}\Big[a^2\arccos\frac{(a+b)^2+(a+c)^2-(b+c)^2}{2(a+b)(a+c)}+$$
$$b^2\arccos\frac{(a+b)^2+(b+c)^2-(a+c)^2}{2(a+b)(b+c)}+$$
$$c^2\arccos\frac{(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b)^2}{2(a+c)(b+c)}\Big]=$$
$$\sqrt{sabc}-\frac{\pi}{180}\Big[a^2\arccos\frac{a^2+ab+ac-bc}{(a+b)(a+c)}+$$
$$b^2\arccos\frac{b^2+ab+bc-ac}{(a+b)(b+c)}+c^2\arccos\frac{c^2+ac+bc-ab}{(a+c)(b+c)}\Big]$$

(3) 本题如用公式：$\cos\frac{O_1}{2}=\sqrt{\frac{sa}{(a+b)(a+c)}}$，…，得

$$\text{空隙面积}=\sqrt{sabc}-\frac{\pi}{180}\Big[a^2\arccos\sqrt{\frac{sa}{(a+b)(a+c)}}+$$
$$b^2\arccos\sqrt{\frac{sb}{(a+b)(b+c)}}+c^2\arccos\sqrt{\frac{sc}{(a+c)(b+c)}}\Big]$$

(4) 本题如用公式：$\tan\frac{O_1}{2}=\sqrt{\frac{bc}{sa}}$，…，得

$$\text{空隙面积}=\sqrt{sabc}-\frac{\pi}{180}\left(a^2\arctan\sqrt{\frac{bc}{sa}}+b^2\arctan\sqrt{\frac{ac}{sb}}+c^2\arctan\sqrt{\frac{ab}{sc}}\right)$$

❖解三角方程

5. 试解方程：$\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$.（提出人：上海罗以勤，浦玉泉）

解法1 $\cos(\frac{\pi}{2}-\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$，即$\frac{\pi}{2}-\pi\cos x=\pi\sin x$，即$\frac{1}{2}-\cos x=\sin x$，两边平方得$\frac{1}{4}-\cos x+\cos^2x=\sin^2x$，即$2\cos^2x-\cos x-\frac{3}{4}=0$，得

$$\cos x=\frac{1\pm\sqrt{1+6}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}=0.911\ 437\ 8\text{ 及 }-0.411\ 487\ 8$$

所以

$$x=\begin{cases}24°17'43''+k360°\\114°17'43''+k360°\end{cases}$$

解法2 $$\sin(\pi\cos x)-\cos(\pi\sin \pi)=0$$

$$2\sin\frac{\pi\cos x-(\frac{\pi}{2}-\pi\sin x)}{2}\cdot\cos\frac{\pi\cos x+\frac{\pi}{2}-\pi\sin x}{2}=0$$

即得

$$\sin\frac{\pi(\cos x+\sin x-\frac{1}{2})}{2}=0 \text{ 及 } \cos\frac{\pi(\cos x-\sin x+\frac{1}{2})}{2}=0$$

(1) 当 $\sin\frac{\pi(\cos x+\sin x-\frac{1}{2})}{2}=0$ 时

$$\frac{\pi(\cos x+\sin x-\frac{1}{2})}{2}=n\pi\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots)$$

$$\cos x+\sin x=\frac{4n+1}{2}$$

$$\cos x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{4n+1}{2}$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{4n+1}{2}$$

$$\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{4n+1}{2}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{4n+1}{2\sqrt{2}}$$

这里$\frac{4n+1}{2\sqrt{2}}$的绝对值不大于1,所以 n 只能取零.于是 $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
所以

$$x_1=2k\pi+\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\arccos(0.353\ 553\ 4)+\frac{\pi}{4}=$$

$$k\cdot 360^\circ+69^\circ17'43''+45^\circ=k360^\circ+114^\circ17'43''$$

(2) 当 $\cos\frac{\pi(\cos x-\sin x+\frac{1}{2})}{2}=0$ 时

$$\frac{\pi(\cos x-\sin x+\frac{1}{2})}{2}=\frac{2n+1}{2}$$

即

$$\cos x-\sin x=\frac{4n+1}{2},\sin(\frac{\pi}{2}+x)-\sin x=\frac{4n+1}{2}$$

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{4n+1}{2},\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{4n+1}{2\sqrt{2}}$$

这里的 n 也只能取零,于是 $\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

所以

$$x_2 = 2k\pi + \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} =$$

$$k \cdot 360° + 69°17'43'' - 45° = k \cdot 360° + 24°17'43''$$

综合上面的(1)和(2),得知本题有两组解答,即 x_1 与 x_2.

验证 令 $x_1 = 114°17'43''$

原式左边 $= \sin(\pi\cos x_1) = \sin(\pi \cdot \cos 114°17'43'') =$

$-\sin(\pi \times 0.411\ 487\ 8) = -\sin 74°3'32'' = -\cos 15°56'28''$

原式右边 $= \cos(\pi\sin x_1)\cos(\pi\sin 114°17'43'') = \cos(\pi \times 0.911\ 437\ 8) =$

$\cos 164°3'32'' = -\cos 15°56'28''$

令 $x_2 = 24°17'43''$

原式左边 $= \sin(\pi\cos x_2) = \sin(\pi\cos 24°17'43'') = \sin(\pi \times 0.911\ 437\ 8) =$

$\sin 164°3'32'' = \sin 15°56'28''$

原式右边 $= \cos(\pi\sin x_2) = \cos(\pi\sin 24°17'43'') = \cos(\pi \times 0.411\ 487\ 8) =$

$\cos 74°17'43'' = \sin 15°56'28''$

解法 3 因为

$$\cos(\pi\sin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\sin x\right) = \sin\left[n\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \pi\sin x\right)\right]$$

所以

$$\pi\cos x = n\pi + (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \pi\sin x\right)$$

即

$$\cos x + (-1)^n\sin x = n + (-1)^n\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + (-1)^n\sin x = n + (-1)^n\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + (-1)^n\sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{2n + (-1)^n}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\left[x - (-1)^n\frac{\pi}{4}\right] = \frac{2n + (-1)^n}{2\sqrt{2}}$$

这式右边的 n 只能取 0 和 1,于是得 $x = \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\pi}{4}$.故本题的通解为

$$x = 2k\pi + \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\pi}{4} = k \cdot 360° + 69°17'43'' \pm 45° =$$

$$\begin{cases} k \cdot 360° + 114°17'43'' \\ k \cdot 360° + 24°17'43'' \end{cases}$$

解法 4 试取方程

$$a\sin x - b\cos x + c = 0 \quad ①$$

即

$$2a\tan\frac{x}{2} - b(1-\tan^2\frac{x}{2}) + c(1+\tan^2\frac{x}{2}) = 0$$

即

$$(c-b)\tan^2\frac{x}{2} + 2a\tan\frac{x}{2} + b + c = 0$$

解这式得

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-b}$$

细察这式.当 $b = c$ 时,右边的分母为零,应该弃去.当 $c^2 > a^2 + b^2$ 时,右边的分子不成实数,也应该弃去.于是得

$$x = 2\arctan\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-b} + 2n\pi \quad ②$$

今论本题

$$\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin) = \cos(\frac{\pi}{2} - \pi\cos x)$$

所以

$$\frac{\pi}{2} - \pi\cos x = \pm\pi\sin x + 2n\pi, 即 \pm 2\sin x + 2\cos x + 1 - 4n = 0 \quad ③$$

比较 ① 与 ②,得

$$a = \pm 2, b = -2, c = 1 - 4n$$

代入 ② 得

$$x = 2\arctan\frac{\mp 2 \pm \sqrt{4+4-(1+16n^2-8n)}}{1-4n+2} =$$

$$2\arctan\frac{\mp 2 \pm \sqrt{7+8n-16n^2}}{3-4n}$$

这里根号内的数是实数,只能取 $n = 0$,因得

$$x = 2\arctan\frac{\mp 2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

这式根号前的负号,不合于题意,应该弃去.

所以 $x = 2\arctan\frac{\mp 2 + \sqrt{7}}{3} + 2k\pi = \begin{cases}2\arctan(0.215\,250\,4) + 2k\pi\\2\arctan(1.548\,583\,8) + 2k\pi\end{cases} =$

$$\begin{cases}2\times 12°8'51.3'' + k360°\\2\times 57°8'51.4'' + k360°\end{cases} = \begin{cases}24°17'43'' + k360°\\114°17'43'' + k360°\end{cases}$$

1956年9月号问题征解解答者名单

解答第2,3,4题者:唐翘健,张存寰,黄宝根,刘应明,孙道勋,棣彰芽,史树中,刘志仁,钱建中,上海五爱中学高三(1)数学小组,应隐之.

解答第2,4,5题者:上海洋泾中学高三(2)数学小组.

解答第2,3题者:湖南衡阳铁一中高二(24班)求知小组,黄浩如,刘宝平,王如松,李约翰,韩念国,周士藩,雷克明,李元寿,朱正祥,吴景扬,安徽休宁中学高三甲祖冲之数学小组,赵源,钟华,金光,胡朝阳,章家琳,文贤杰,卢亭鹤,徐孝舜,上海时代中学高二(4)数学小组,戴文钧,沈彭寿,平复强,李永乐,张文彦,花炳兴,潘鼎元,钱景清,郭家铎,嵇兆衡,林玉金,广州广雅中学祖冲之数学研究组,章文,熊大固,徐自新,魏柏林,上海延安中学高二(3)数学研究小组,黄水源,常州汤君,王效生,桂永和,张培志,谢毓厚,王金桃,朱长懋,金泓扬,王裕灏,邵子文,韩洪林,杨祥谱,潘以德,曾性善,王柏亭,陈兴昭.

解答第2,4题者:吴同骧,贾彦宾,谭根源,封辅智,余俊雄,杨大栋,郑海涛,刘相,张彭德,李忠和,朱维平,甘治安,安徽嘉山中学高三乙数学小组,毛应青,潘阳五中高三,三数趣小组,林六十,江苏如皋师范自然数学小组,潘咸桉,张有紘,王发榕,刘昌砚.

解答第2,5题者:丁观潢.

解答第3,4题者:张禄度,洪甲戌.

解答第2题者:潘逢乙,邬思,裘宝林,汤正谊,周慎习,黄志荣,何河清,邬茉芬,变原,郭中士,郭中海,杨德新,叶秀明,胡晖,潘子模,张家珍,胡善学,张西华,何子国,白自强,隋一国,刘家盈,陈达,黄柏森,梁展雄,陈静剑,胡耀堂,舒长禄,徐长,黎佩流,刘德福,冯翰翘,程宝升,刘春清,徐承德,戴天鸣,陈坤方,黎刚,李善同,周宗熙,尹公成,王光烈,张之中,沈志钧,金一宪,贺鹤云,曾映秋,张立德,刘桐林,海英,喻畯,河南汲县中学高二(4)祖冲之数学小组,陈苍卿,舒中胜,吴伯钦,陈纪添,李无逸,陈为高,邓步良,张长辉,刘珍儒,夏迎秋,蔡信财,钱如松,马文林,王英林,袁锁忠,冷秋棕,傅祥新,陈秀娟,冷扣保,李松鹤,方耀森,张贻厚,张鸿林,丁宗起,宿军,柳光轩,张安洲,王葆惠,张卫华,沈柳卿,陈文德,喻肇之,刘殿文,刘世光,夏永绵,上海徐江中学高二(3)数学小组,龚杏生,姚建铨,房鼎业,郭英,四川江津三中高二数学小级,倪福堂,曾崇焱,费流星,蔡纯烈,汪丁春,陈学参,陈学学,莫建安,赵可祥,赵国珍,钱连荣,陈维庆,封鸿昌,张平,谭东翰,张绍宇,陈贤明,乐嘉言,马润尧,吴成杰,陈

子琨，马殿荣，劳高才，赵佩华，欧武荣，惠文成，楼宇同，袁泽仁，水乃翔，张华山，孙义鹄，郑万嵩，禹云峰，周持中，余群生，吴流贤，吴顺唐，康念伯，思辑，田广欣，尹炳均，张经江，张新美，汪建华，吴章江，俞维强，陈英栋，王绍舜，王烈芳，王远宪，莫春林，曾斟平，曾世平，陈道新，陈明志，白云亭，张庆毓，张振权，杨宗灏，许国良，谢培基，陆万全，华惠毅，吴泽藩，周光祺，上海时代中学爱因斯坦物理小组，吴国良，曲鸿基，潘秉淮，李自兴，李实，李宝华，马云峰，唐梅星，胡晓曲，朱祖念，王明亮，千振孝，黄振元，洪毅，王重保，王秦保，董维芳，陈龙昊，陈振华，李国强，郑光伟，武昌实验中学高二(三)，李师正，刘有智，李敦平，何鸣桐，张享斌，南京四中高三(三) 数学小组，陈剑豪，黄恒祥，王炎森，张鑫森，丁道森，郑万泔，卫增泉，林定伦，广西梧州高中三年级数学研究小组第八班分组，岳祖尧，王白石，张先觉，凌绍章，陈福端，刘行茂，陈鸣钦，林英舜，龚照泽，费栋宇，吴聊，陈吉普，沙镇东，陈德扶，姚珍芝，彭祖仁，福建惠安中学数学组，浙江平阳中学高一数学研究小组，顾长祥，沈茂贤，南京三中甲班爱因斯坦数理小组，洪文诚，张吉溥，俞忠元，任孝瑛，许明德，范熹，乔万彪，葛元冲，黎尚举，李沛灏，何文晨，庄田，杨永靖，邵黎康，苏显富，江西新淦初中数学教研组，饶亿，钰桦，任奉祥，梁学章，韩锡来，汤礼道.

解答第 3 题者：贾宗光，莫春林，上海中学高三(3) 数学小组，杨业道，李永鳌.

解答第 4 题者：何士安，刘连城，倪承沅，王世配，蒋智紱，王银常，续有方，肖顺泉，林忠泉，徐从德，陈长虹.

1956年9月号小知识问题答案

❖二十八宿

1. 什么叫做二十八宿闹昆阳?(提出人:成都朱勋选自镜花缘)

答　有三种闹法.

(1) 二十八宿分布于天的四方,每方应有七宿.但从昆阳地方看去,有时候每方有八宿,或九宿,或十宿以至十三宿.这是怎么一回事情呢?要答复这个问题,且看图1自然会明白的.

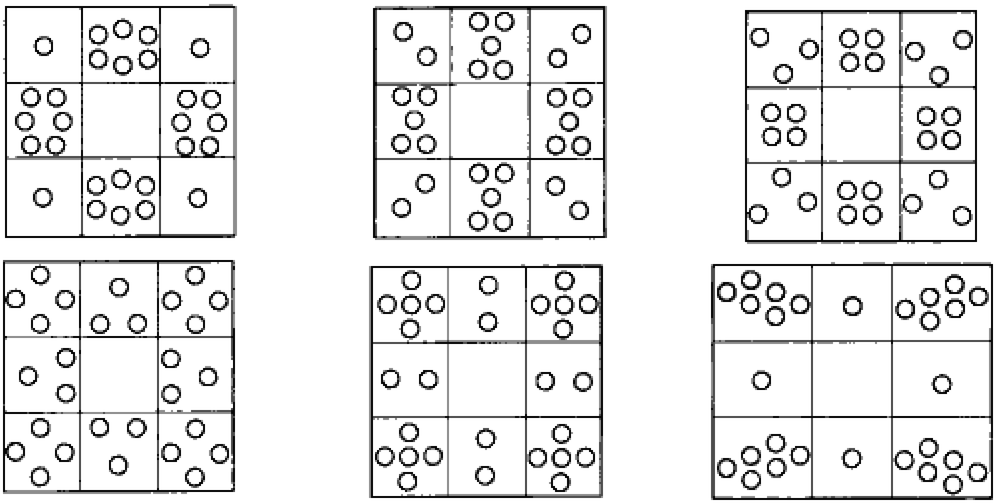


图1

(2) 拿数码1,2,3,…,28分配于四方的二十八宿,每宿有一个数码,既不重复,亦不遗漏,使四方诸数码之和都相等,这该怎样闹法呢?图2中各图就是合乎条件的,每图中各方数码之和都等于116.

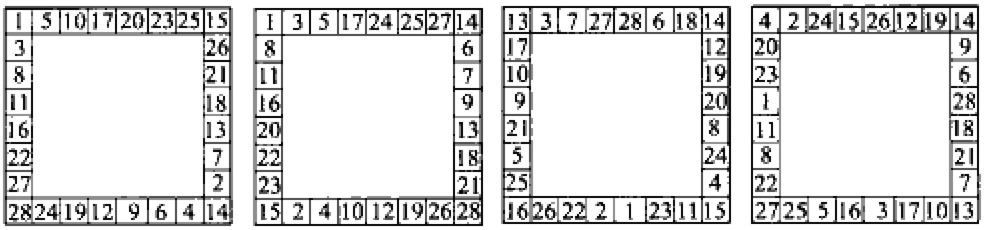


图2

(3) 我国的二八差分算法，也叫做二十八宿闹昆阳. 元朱世杰算学启蒙(1299)差分均酌门，载二八差分求各率之术，从最大率起，依次取$\frac{8}{10}$为率. 明程大位算法统宗(1592)衰分章，载求各衰之法，以第一数为2，依次用4去乘，得各衰的数为2，8，32，128，512，…. 也就是说，各数分配率之比为2 : 8 : 32 : 128 : … 因此两种差分的解释，也是彼此不相同的.

❖万条线的交角

2. 在平面上有一万条直线，要使它们相交，问怎样才能得出最多的交角？并且最多能构成多少个角？(提出人：沈阳徐铁城)

答 (1) 一万条线在平面上，若彼此不平行不重合而能相交时，所得的交角为最多. 根据角的定义：角是由一点所引出的两条射线所构成，所以得到交点最多时，得到的交角也是最多.

(2) 最多有多少交角的问题，可分两条答复如下：

① 一万条线在平面上相交，最多的交点个数是49 995 000.

证 两条直线相交的交点个数是1，第三条线和第一第二条线相交的交点个数是2，第四条线和第一第二第三条线相交的交点个数是3. 依此类推，得一万条线相交的交点个数是

$$\frac{(1+9\,999)\times 9\,999}{2}=49\,995\,000$$

② 两条直线相交有一个交点，并构成许多角. 其中有四个是基本的角(一般的是两个锐角和两个钝角). 此外还有周角，平角，反角.

因此两条直线不平行不重合而相交所构成角的个数应该是

$$C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=4+6+4+1=15$$

但在这式中每次取两个角的组合数里，有两对是对顶角，应该弃去.

所以两线相交的交角个数是$15-2=13$.

综合上面的说法，故得一万条线相交所得交角的最多个数是

$$13\times 49\,995\,000=649\,935\,000$$

注 本题如不计算周角，平角，所得的交角个数是

$$8\times 49\,995\,000=399\,960\,000$$

❖各种点

3.什么叫做显著点,密格尔(Miquel)点,热尔岗(Gergonne)点,勒穆瓦纳(Lemoine)点,布罗卡尔(Brocard)点,纳格尔(Nagel)点,施泰纳(Steiner)点,塔利(Tarry)点?(提出人:无锡 高克诠)

答 (1)三角形的内心,外心,重心,垂心,傍心五者,合称为显著点.

(2)在三角形的边上,各任取一点.通过各个角顶及两邻边所取的点作圆.那三圆共交于一点,该点称曰密格尔点.

(3)从三角形的内切圆之切点,至对角顶作直线.那三线共交于一点,该点称曰热尔岗点.

(4)三角形的三条类似中线共交于一点,称曰类似重心.该点在英法称曰勒穆瓦纳点,在德国称曰格雷贝(Grebe)点.

(5)通过$\triangle ABC$之角顶C(图3),作圆与对边相切于A.又过角顶B,作圆与对边亦相切于A,再过A作线$XY\ /\!/\ BC$,交第一圆于X,交第二圆于Y.联结BX,交第一圆于Ω;联结CY,交第二圆于Ω'.该点Ω,Ω'称曰三角形的第一第二布洛罗卡尔点.它们具有性质如下

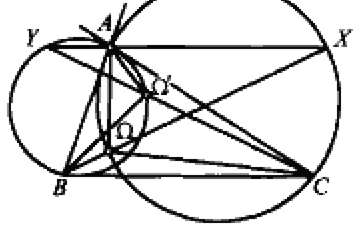


图3

$$\Omega AB = \Omega BC = \Omega CA = \omega$$
$$\Omega' AB = \Omega' BC = \Omega' CA = \omega'$$

若取逆时针运行的方向之角为正,顺时针运行的方向之角为负.那么,ω就称曰正布洛卡角,ω'称曰负布洛罗卡尔角.

(6)从三角形的傍切圆之切点,至对角顶作直线.那三线共交于一点,该点称曰纳格尔点.

(7)如图4,从$\triangle ABC$的外心O至类似重心K,以OK为直径作圆,称曰布罗卡尔圆.

从O垂直于原三角形的各边,作三线,交布罗卡尔圆于A',B',C'.那么$\triangle A'B'C'$称曰第一布罗卡尔三角形.

从$\triangle ABC$的各角顶至K,作三线,交布罗卡尔圆于A'',B'',C''.那么$\triangle A''B''C''$称曰第二布罗卡尔三角形.

从$\triangle ABC$的各角顶,平行于$\triangle A'B'C'$的各边,作三线,共交于一点S.该点称曰施泰纳点.

(8) 从 $\triangle ABC$ 的各角顶，垂直于 $\triangle A'B'C'$ 的各边，作三线，共交于一点 T. 该点称曰塔利点. 联结塔利点到施泰纳点的线段，就是外接圆的直径.

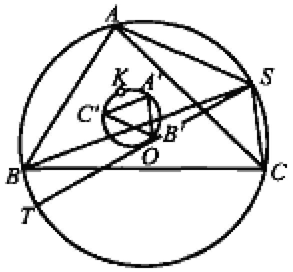


图 4

❖各种圆

4. 什么叫做五点圆，六点圆，七点圆，八点圆，九点圆，三十六点圆？(提出人：广州华南师院附中高一红色数学研究小组)

答 (1) 在 $\triangle ABC$ 内，任意取两点 P, Q，各向对边引三双等角的线段 PD, QD'；PE, QE'；PF, QF'. 设 PD, QD' 相交于 X，PE, QE' 相交于 Y，PF, QF' 相交于 Z. 那么 P, Q, X, Y, Z 同在一圆周上，称曰五点圆(图 5).

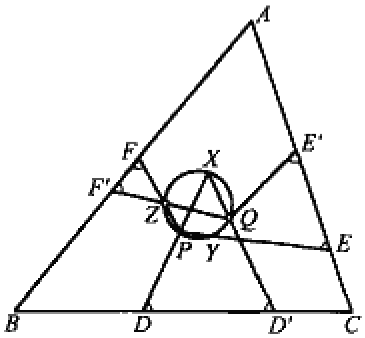


图 5

(2) 从 $\triangle ABC$ 的类似重心 K，平行于原三角形的各边，作三直线，与各边相交于六点. 那六点同在一圆周上，称曰第一勒穆瓦纳圆，亦称曰三重比圆(Triplicate Ratio Circle).

从 $\triangle ABC$ 的类似重心 K，反平行于原三角形的各边，作三直线，与各边相交于六点. 那六点同在一圆周上，称曰第二勒穆瓦纳圆，亦称曰余弦圆.

从 $\triangle ABC$ 的三个垂直趾，各向其他的两边作垂线，共得六个垂趾. 那六点同在一圆周上，称曰泰勒(Taylor)圆(参阅数学通讯 1956 年 6 月号 38 面).

从 $\triangle ABC$ 的各角顶至类似重心 K，作直线 KA, KB, KC. 并在这三线上各取一点 A', B', C'，使 $B'C' \parallel BC, C'A' \parallel CA, A'B' \parallel AB$. 若将 $\triangle A'B'C'$ 的三边延长，交 $\triangle ABC$ 的三边于六点 X, X', Y, Y', Z, Z'. 那六点同在一圆周上，称曰塔克(Tucker)圆(图 6). 又共轭塔克圆，也是六点同在一圆周上.

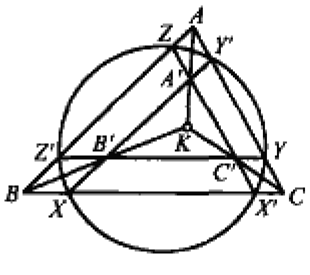


图 6

上述的第一勒穆瓦纳，第二勒穆瓦纳，泰勒圆以及外接圆，都是塔克圆的特例.

又设三角形的两等角的三等分线相交于 M, N. 从 M, N 向三边作垂线，设垂趾为 M_1, M_2, M_3 及 N_1, N_2, N_3，那么，(a) 这六个垂趾是同在一圆周上；(b) 以 M_1, M_2, M_3 为圆心，过点 N 分别作圆，交三角形各边于六点，那六点是同在一圆周上；又以 N_1, N_2, N_3 为圆心，过点 M 分别作圆，交各边于六点，那六点也是同

在一圆周上.

(3) 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O,类似重心为 K,第一第二布罗卡尔点为 Ω,Ω';$B\Omega$ 与 $C\Omega'$ 相交于 A',$C\Omega$ 与 $A\Omega'$ 相交于 B',$A\Omega$ 与 $B\Omega'$ 相交于 C'.那七点 $O,K,\Omega,\Omega',A',B',C'$ 同在一圆周上,称曰布洛卡圆,亦称曰七点圆.

(4) 设四边形的两条对角线互相垂直.从其交点向各边作垂线,得四个垂趾,连同各边的四个中点,共八点,同在一圆周上,称曰八点圆.

又过调和四边形对角线的交点,平行于各边作线,交各边于八点.这八点同在一圆周上,也称曰八点圆.

(5) 三角形的三个垂趾,各边的中点,及由垂心至各角顶连线的中点,共九点,同在一圆周上,称曰"九点圆",亦称曰"欧拉圆".

(6) 设圆内接四边形的中点为 E,F,G,H,圆心为 O,从两对角线 AC,BD 的中点 R,S 各向其他对角线作垂线 RL,SL;令两线相交于 L.于是构成八个四边形

$EFSO, EFLR, EGLS, FGRO,$

$GHRL, GHOS, HEOR, HESL$

每个四边形又构成四个三角形.在这些三角形中,共有三十二个"九点圆心".再从 O 构成四个四边形

$OABC, OBCD, OCDA, ODAB$

在这些四边形中又有四个"重心".总计前后的九点圆心及重心,凡三十六点,同在一圆周上.可是在实际上,这三十六点中,有些是重合的,重心亦重合于九点圆心.因此所谓三十六点共圆的话,就可简化为八个"九点圆心"共圆了(图7中八个 N 都是表示九点圆心).

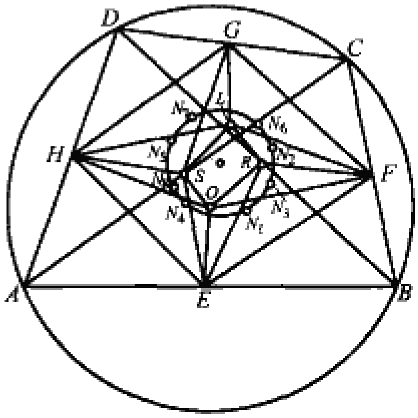


图 7

(7) 在此还说几个有趣的问题如下:

七十二点同在一圆周上.

七十二线同切于一圆.

七十二圆同切于一圆.

若要了解这些题目的意义和证法,那就须要阅读"扩大几何学"了.

❖拉普拉斯积分

5. 什么叫做"拉普拉斯积分"?(提出人:四川师院唐会之)

答 试求$\int e^{-ax}\sin mx\mathrm{d}x$,用分部积分法,令

$$\begin{cases} u = \sin mx, \mathrm{d}u = m\cos mx\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^{-ax}\mathrm{d}x, v = -\dfrac{e^{-ax}}{a} \end{cases}$$

因为

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

所以

$$\int e^{-ax}\sin mx\mathrm{d}x = -\frac{e^{-ax}\sin mx}{a} + \frac{m}{a}\int e^{-ax}\cos mx\mathrm{d}x \qquad ①$$

同样得

$$\int e^{-ax}\cos mx\mathrm{d}x = -\frac{e^{-ax}\cos mx}{a} - \frac{m}{a}\int e^{-ax}\sin mx\mathrm{d}x \qquad ②$$

以②代入①得

$$\int e^{-ax}\sin mx\mathrm{d}x = \frac{-e^{-ax}(a\sin mx + m\cos mx)}{a^2} - \frac{m^2}{a^2}\int e^{-ax}\sin mx\mathrm{d}x$$

于是

$$\int e^{-ax}\sin mx\mathrm{d}x = \frac{-e^{-ax}(a\sin mx + m\cos mx)}{a^2 + m^2}$$

又

$$\int e^{-ax}\cos mx\mathrm{d}x = \frac{-e^{-ax}(a\cos mx - m\sin mx)}{a^2 + m^2}$$

当$a > 0, x = \infty$时,得$e^{-ax} = 0$;当$a > 0, x = 0$时,得$e^{-ax} = 1$.
所以

$$\int_{\theta}^{\infty} e^{-ax}\sin mx\mathrm{d}x = \frac{-e^{-ax}(a\sin mx + m\cos mx)}{a^2 + m^2}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{m}{a^2 + m^2} \qquad ③$$

$$\int_{\theta}^{\infty} e^{-ax}\cos mx\mathrm{d}x = \frac{-e^{-ax}(a\cos mx + m\sin mx)}{a^2 + m^2}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{a}{a^2 + m^2} \qquad ④$$

当$a < 0, x = \infty$时,得$e^{-ax} = \infty$,这时③④的左边没有定解.
式③与④,叫做"拉普拉斯积分".

❖若尔当线

6. 什么叫做"若尔当(Jordan)曲线"?(提出人:常熟吴顺唐)

答 设在平面上有一个闭曲线C(图8所画的是一个圆),它把平面分做三部分,在内部的点集叫做"内域",在外部的点集叫做"外域",在曲线上的点集叫

做"边界".试联结 C 内任意一点 a 与 C 外任意一点 b,交边界于一点 c.假若这个曲线如同橡皮一般,可以放大或缩小,那么经过拉动后,在原曲线 C 的内、外、边界三部分,仍然成为曲线 C' 的内、外、外界三部分(图9).这种曲线叫做"若尔当曲线".

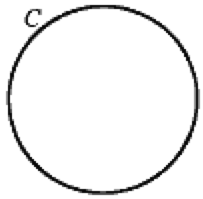


图 8

用式子表示,在平面上,曲线 C 的点集(x,y)如合于下列两式

$$x=\varphi(t),y=4(t) \qquad ①$$

式中 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.当 $\varphi(t_0)=\varphi(t_1),\psi(t_0)=\psi(t_1)$ 时,C 即构成一个闭曲线.再若曲线上没有"重点",C 便成为"若尔当曲线"了.

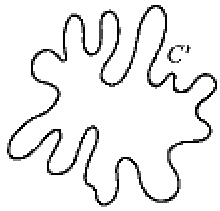


图 9

在平面上,画一曲线,在它所围的内部,是否有面积呢?要答复这个问题,就必须懂得"若尔当曲线"的性质.

正确地说,设曲线①为"正则若尔当曲线",那么它是具有面积的.

什么叫做"正则"呢?就是曲线①在节 $t_0<t<t_1$ 上,取 t 的每个值,都没有重点出现,并且把节(a,b)可分做有穷个"子节".若曲线合于这两条件,那就叫做"正则".

例如点集(x,y)所构成的"正方形域"为 $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$,是可以求面积的.但若在轴 x 上,去掉节 $1<x<2$ 的点集后,所得的"余域",它既不是"闭"的,亦不是"正则"的,那就不可以去求面积了,我们可以作成一种"连续曲线",通过正方形域的一切点,但不是"若尔当线",因此不能求其面积.还可作成一个"非正则曲线",例如 $y=x\sin\frac{1}{x}$,它在近原点处的图像是非常奇特的(图10).像这样的曲线,纵然只想求其弧长,也是不可能的事情咧!

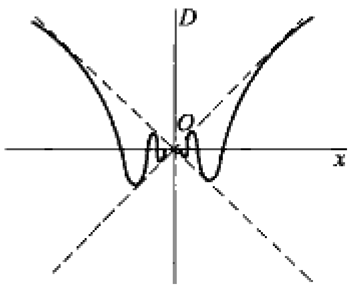


图 10

1956年9月号小知识解答者名单

解答第1,4,5,6题者:广州广雅中学祖冲之数学研究组.
解答第2,6题者:棣彰芽.
解答第3,6题者:任孝瑛,俞忠元.
解答第5,6题者:夏永绵.
解答第2题者:周慎习.
解答第4题者:倪福萱,曾崇桑,鲜于明超.
解答第5题者:唐永宁.
解答第6题者:邹莱芬.

1957 年第 4 期问题解答

1. 已知等边三角形 ABC. 试证:其外接圆上任一点到三角形 ABC 三顶点距离的平方和为一定值.(提出人:温州一中 魏清)

证 设等边三角形 ABC 的边长为 a. 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上任取一点 D(图 1). 联结 AD,BD,CD. 由托列密定理我们有

$$\overline{AD}+\overline{CD}=\overline{BD}$$

$$\angle ADB=\angle ACB=60^\circ$$

又 $\angle BDC=\angle BAC=60^\circ$(同弧圆周角).

考虑 $\triangle ABD$ 及 $\triangle BCD$,根据余弦定律我们得到

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cos\angle ADB=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AD}\cdot\overline{BD}$$

$$\overline{BC}^2=\overline{DC}^2+\overline{BD}^2-2\overline{BD}\cdot\overline{DC}\cos\angle BCD=\overline{DC}^2+\overline{BD}^2-\overline{BD}\cdot\overline{DC}$$

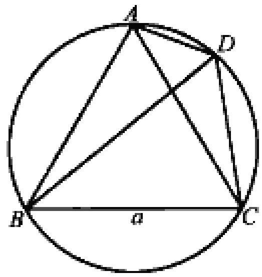


图 1

将上两式左右分别相加即得

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2-\overline{BD}(\overline{AD}+\overline{DC})=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$$

就是

$$\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=2a^2(\text{定值})$$

注 上海财经学院李倬同志及南安一中黄水源同志指出上题对任意正 n 边形都成立.

2. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2-ax+b^2}\,(b\geqslant a\geqslant 0)$,试用几何方法证明

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)=b$$

(吴泽藩选自苏联"数学教学")

证 以 b 为腰,a 为底作一等腰三角形 ABC(图 2),其中 $AB=BC=b$,$AC=a$. 在 AC 上取一点 D,令 $AD=x$,则 $DC=a-x$. 过 B 作 AC 的垂线 BE 交 AC 于 E,联结 BD. 因为 BE 是 $\triangle ABC$ 的高,所以 $DE=\dfrac{a-2x}{2}$.

应用余弦定律于 $\triangle DBC$ 得到

$$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2-2\overline{BD}\cdot\overline{CD}\cos\angle BDE=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2-2\overline{DC}\cdot\overline{DE}$$

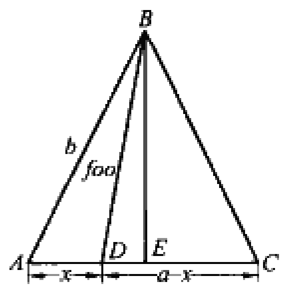


图 2

就是

$$b^2=\overline{BD}^2+(a-x)^2-2(a-x)\frac{a-2x}{2}$$

$$f(x)=\overline{BD}=\sqrt{x^2-ax+b^2}$$

所以当 $x\to 0$ 时,D 与 A 重合;当 $x\to a$ 时,D 与 C 重合,就是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{D\to A}\overline{BD}=\overline{BA}=b$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{D\to C}\overline{BD}=\overline{BC}=b$$

于是得到

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)=b$$

3. 证明:如果 n 是大于 2 的整数,则

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$$

证　因为

$$2^k=(1+1)^k=1+k+\frac{k(k-1)}{2}+\cdots>1+k\quad(k\geqslant 2)$$

所以有

$$2^2>3,2^3>4,\cdots,2^{n-1}>n$$

$$2^{1+2+\cdots+(n-1)}>n!(n>2)$$

就是

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!\quad(n>2)$$

4. 试证:当 n 为任意自然数时

$$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

是整数.　　(苏州项复民选自苏联"数学教学")

证　记

$$A_n=\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)B_n+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)C_n$$

其中

$$B_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}=B_{n-1}+B_{n-2}$$

同样

$$C_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=C_{n-1}+C_{n-2}$$

所以我们得到

$$A_n=\frac{5-\sqrt{5}}{10}(B_{n-1}+B_{n-2})+\frac{5+\sqrt{5}}{10}(C_{n-1}+C_{n-2})=$$
$$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}B_{n-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}C_{n-1}\right)+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}B_{n-2}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}C_{n-2}\right)=$$
$$A_{n-1}+A_{n-2}$$

由于

$$A_0=\frac{5-\sqrt{5}}{10}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}=1$$

$$A_1=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=$$
$$\frac{1}{20}[(5-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})+(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})]=\frac{\sqrt{5}}{20}\cdot 4\sqrt{5}=1$$

所以 $A_2=A_1+A_0=2$(整数).

利用数学归纳法可以推出对于任意的整数 n,A_n 是整数,于是命题得证.

5. 如果 α,β 是两锐角,且满足下列两式

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1 \quad ①$$
$$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0 \quad ②$$

证明:$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

证法1 由 ② 得

$$3\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}=2\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

两边平方得

$$9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta) \quad ③$$

由 ① 我们有 $\sin^2\alpha=\frac{1-2\sin^2\beta}{3}$,代入 ③ 即得

$$9\cdot\frac{1-2\sin^2\beta}{3}\left(1-\frac{1-2\sin^2\beta}{3}\right)=4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta)$$

$$\sin^2\beta=\frac{1}{3}$$

因为 $0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}$,所以

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

所以

$$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad ④$$

由于 $\cos 2\beta=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0$,所以 $2\beta<\frac{\pi}{2}$,即 $\beta<\frac{\pi}{4}$.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\frac{2}{3}}{3}=\frac{1}{9}$$

因为 $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$,根据上式即有

$$\sin\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad ⑤$$

比较 ④ 与 ⑤,由于 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 及 2β 都是锐角,所以

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=2\beta$$

就是

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$$

证法 2 由 ① 及 ② 分别得

$$\cos 2\beta=3\sin^2\alpha,\sin 2\beta=\frac{3}{2}\sin 2\alpha$$

由于

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+2\beta)&=\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta=\\&3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha-\frac{3}{2}\sin\alpha\sin 2\alpha=\\&3\sin^2\alpha\cos\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=0\end{aligned}$$

所以

$$\alpha+2\beta=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

但 $0\leqslant\alpha+2\beta<\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$,所以

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$$

6. 设正四角锥的全面积和体积的数值相等,如果其高和底边长均为整数值,试求其高和底边长. (四川大学田景黄选自苏联“数学教学”)

解　记正四角锥 $ABCDE$ 的底边为 a，高为 h(图3)，则其体积 V 及全面积 S 分别为

$$V=\frac{1}{3}a^2h$$

$$S=a^2+2a\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=a^2+a\sqrt{a^2+4h^2}$$

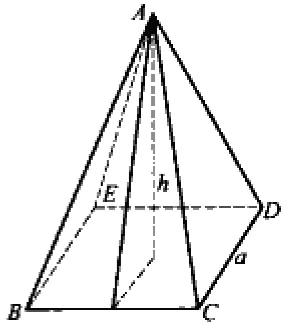


图 3

根据已知条件 $V=S$，就是

$$a^2+a\sqrt{a^2+4h^2}=\frac{1}{3}a^2h$$

$$3\sqrt{a^2+4h^2}=a(h-3)$$

$$9(a^2+4h^2)=a^2(h-3)^2$$

$$a^2=\frac{36h^2}{h^2-6h}\text{ 或 }a=6\sqrt{\frac{h}{h-6}}$$

因为 a 和 h 是整数，假设 $\frac{h}{h-6}=t^2$，t 是整数，那么 $h=\frac{6t^2}{t^2-1}$. 由于 t^2 和 t^2-1 是互质的，故 t^2-1 应整除6. 这只有 $t=2$ 才可能，因此得 $h=8$，$a=12$.

7. 若 $k=\sum\limits_{i=0}^{n}i$，且 $k(k-1)$ 可表示为 $C_m^2C_{m-2}^2$ 的形式，试求 k 与 m 的关系.

解　因为 $k=\sum\limits_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$，则

$$k-1=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

$$k(k-1)=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+2)(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

设 $m=n+2$，即 $n=m-2$，那么

$$k(k-1)=\frac{(m-2)(m-3)}{2}\cdot\frac{(m-1)m}{2}=C_m^2\cdot C_{m-2}^2$$

因为 $k=\frac{(m-2)(m-1)}{2}$，故有

$$m^2-3m+2(1-k)=0$$

就是

$$m=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2+2k}=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{1+8k})$$

因为当 $n\geqslant 1$ 时 $k\geqslant 1$，所以括号中的负号可以除去，m 就是正数

$$m=\frac{3+\sqrt{1+8k}}{2}$$

现在要证明对任何的 $k = \sum_{i=0}^{n} i$，m 是整数，因

$$1 + 8k = 1 + 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 4n(n+1) = (2n+1)^2$$

所以

$$m = \frac{3 + 2n + 1}{2} = 2 + n$$

是整数.

8. 试分解 $x^5 + x + 1$ 为有理系数多项式的乘积.(提出人:河南汲中高二(4)祖冲之数学小组)

解 $x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 =$
$x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) =$
$(x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

1957年第4期问题解答者姓名

解出第1,2,3,4,5,6,7,8题者:上海文建中学高三(3)数学小组,陈非非,钟贞一,郭二平.

解出第1,2,3,4,6,7,8题者:朱襄生.

解出第1,2,3,5,6,8题者:雷华英.

解出第1,3,4,5,6,8题者:黄水源,陈纪添,陆少华,许芳官,夏永绵,郭廷煌,吴西智.

解出第1,2,3,5,8题者:贺宁安.

解出第1,2,3,6,8题者:何鸿枫.

解出第1,3,4,5,6题者:河南汲县一中高三(4)祖冲之数学小组,金玉辉.

解出第1,3,4,5,8题者:成都十二中高三(1)"η"数学小组,陈兴昭.

解出第1,3,6,8题者:韦金生,朱永作,李学明.

解出第1,3,5,6,8题者:郭朝泓,温州一中爱因斯坦数学小组,江大安,张仁中,应锦春,张祖腾.

解出第3,5,6,7,8题者:刘克斌.

解出第1,2,3,4题者:王正.

解出第1,2,3,5题者:李敦平,王昭华.

解出第1,3,4,5题者:武汉十四中高三(一)小小卫星组,曲存让.

解出第1,3,5,6题者:曾楚铭.

解出第1,3,5,8题者:胡光中,陈心钜,陈傅孟,王兆龙.

解出第1,5,6,8题者:吴祈晖.

解出第1,3,6,8题者:赵宝光.

解出第2,3,4,8题者:高振大.

解出第1,2,3题者:何正权.

解出第1,2,6题者:廖仁志.

解出第1,2,8题者:周天一,邵有孝,叶新福.

解出第1,3,4题者:武汉三十三中高二(1)高斯数学小组.

解出第1,3,5题者:栗增,狄建华,林贤昌,孔令威,李可丰,杨益祥,俞肖均,漆兰南.

解出第1,3,6题者:倪继祖,费栋宇.

解出第1,3,8题者:余新河,夏柳.

解出第 1,5,8 题者:蔡祖善,张鼎.

解出第 1,6,8 题者:肖子锦.

解出第 3,5,8 题者:林文经.

解出第 3,6,8 题者:彭应时.

解出第 1,3 题者:湖北天门踊中高三(二)数学课外活动小组,武汉三十三中高二(三)裴蜀数学小组,上海中国中学高二(1)数学物理小组,任德祥,王金溥,廖振金,江明怀,王金汉,钱贻策,陶凤林,孙富一,戴家英.

解出第 1,5 题者:赵祥山,吴筱兰,张荣升,王建经,吉林九中高三(七)△数学小组,陈傅福,杨宗善.

解出第 1,6 题者:黄全福,孙觉,杨树标.

解出第 1,7 题者:王绪昌.

解出第 1,8 题者:李永国,周钙,王竟成,傅培鑫,上海杨思中学拉斯坦顿夫编委会,张在云,邵儒林,刘元额,邹东民,陈中群,上海敬业中学高(4)$\alpha\beta\gamma$ 数学小组,毛益国.

解出第 3,4 题者:尤家铸.

解出 3,5 题者:虞方岳.

解出第 3,6 题者:上海敬业中学高三(5)沈济华数学小组,熊松年.

解出第 3,8 题者:甘家炎,梅祥富,张怀朴.

解出第 6,8 题者:王志成.

解出第 1 题者:湖南浏阳一中高三俊明数理小组,夏绍良,金立仁,赖宗仁,范鹏鸣,陈仁沛,康元泉,邬王科,周镇星,李雨声,李平,李斐,黄种池,洪秀钱,阎广君,赵迪生,陆针麟,杨广志,李天偿,胡伯康,姚志海,卓勤衡,杨家琳,张怀孝,闵乃则,王昭甫,张树猷,庄清泉,苏美治,李倬,刘庆华,欧董珠.

解出第 3 题者:柳正伦,龚杏生.

解出第 5 题者:谢永年,袁训礼,$\alpha\beta\gamma$.

解出第 6 题者:袁一岳.

解出第 8 题者:吴振东.

1957年10月号小知识问题答案

❖差分

1.“二色差分”,“三色差分”,“四色差分”是些什么算法?(提出人福建惠安陈奄鲫)

答 我国古时称“数学”为“九数”,因为数学中有九种算法.郑玄(127—200)说道:“九数的名称为‘方田,粟米,差分,少广,商功,均输,赢不足,方程,旁要’,其中第三种算法叫做“差分”.但今传本的九章算术,是以‘方田,粟米,衰分,少广,商功,均输,盈不足,方程,勾股’为九章.其中第三章为‘衰分’,也就是‘差分’.”

设有几种物品相混合,已知物的总件数,总钱数及各物的价值,试求出各物品的件数.这种算法叫做“几色差分”.张丘建算经中的百鸡问题,就是清代焦循(1763—1820)所称的“三色差分”.原题如下:

设公鸡每只价5元,母鸡每只价3元,小鸡3只价1元,今以100元买鸡100只,问公鸡母鸡及小鸡各多少?答:公鸡4只,母鸡18只,小鸡78只;或公鸡8只,母鸡11只,小鸡81只;或公鸡12只,母鸡4只,小鸡84只.

清代丁取忠(十九世纪中)计算这个问题,创立“二色差分”法,首先把公鸡数作为0.这样一来,原题变为,以100元买两种鸡总共100只,也就是换成与孙子算经中“鸡兔同笼”相似的问题了.

明代程大位算法统宗(1592)衰分章中有一个问题是“四色差分”,原题如下:

有人以93元,买绫罗纱绢四种衣料共160尺.已知绫每尺价9角,罗每尺7角,纱每尺5角,绢每尺3角.所买各种衣料都是尺的整数,问各种是多少?答案有2 763种,列表如表1(表中的数字表示尺数).

表1

纱(z)	1					2					3				
罗(y)	1	4	7	…	109	2	5	8	…	110	3	6	9	…	108
绫(x)	74	72	70	…	2	73	71	69	…	1	72	70	68	…	2
绢(w)	84	83	82	…	48	83	82	81	…	47	82	81	80	…	47
共解110	37解					37解					36解				

续表 1

	4				5				6			
	1	4	…	109	2	5	…	107	3	6	…	108
	73	71	…	1	72	70	…	2	71	69	…	1
	82	81	…	46	81	80	…	46	80	79	…	45
109	37 解				36 解				36 解			

	7					8					9				
	1	4	7	…	106	2	5	8	…	106	3	6	9	…	105
	72	70	68	…	2	71	69	67	…	2	70	68	66	…	2
	80	79	78	…	45	79	78	77	…	44	78	77	76	…	44
107	36 解					36 解					35 解				

	10				11				12			
	1	4	…	106	2	5	…	104	3	6	…	105
	71	69	…	1	70	68	…	2	69	67	…	1
	78	77	…	43	77	76	…	43	76	75	…	42
106	36 解				35 解				35 解			

	13					14					15				
	1	4	7	…	103	2	5	8	…	103	3	6	9	…	102
	70	68	66	…	2	69	67	65	…	2	68	66	64	…	2
	76	75	74	…	42	75	74	73	…	41	74	73	72	…	41
104	35 解					35 解					34 解				

	16				17				18			
	1	4	…	103	2	5	…	101	3	6	…	102
	69	67	…	1	68	66	…	2	67	65	…	1
	74	73	…	40	73	72	…	40	72	71	…	39
103	35 解				34 解				34 解			

	19					20					21				
	1	4	7	…	100	2	5	8	…	101	3	6	9	…	99
	68	66	64	…	2	67	65	63	…	1	66	64	62	…	2
	72	71	70	…	39	71	70	69	…	38	70	69	68	…	38
101	34 解					34 解					33 解				

	22				23				24			
	1	4	…	100	2	5	…	98	3	6	…	99
	67	65	…	1	66	64	…	2	65	63	…	1
	70	69	…	37	69	68	…	37	68	67	…	36
100	34 解				33 解				33 解			

续表 1

	25					26					27				
	1	4	7	…	97	2	5	8	…	98	3	6	9	…	96
	66	64	62	…	2	65	63	61	…	1	64	62	60	…	2
	68	67	66	…	36	67	66	65	…	35	66	65	64	…	35
98	33 解					33 解					32 解				
	28					29					30				
	1	4	…	97		2	5	…	95		3	6	…	96	
	65	63	…	1		64	62	…	2		63	61	…	1	
	66	65	…	34		65	64	…	34		64	63	…	33	
97	33 解					32 解					32 解				
	31					32					33				
	1	4	7	…	94	2	5	8	…	95	3	6	9	…	93
	64	62	60	…	2	63	61	59	…	1	62	60	58	…	2
	64	63	62	…	33	63	62	61	…	32	62	61	60	…	32
95	32 解					32 解					31 解				
	34					35					36				
	1	4	…	94		2	5	…	92		3	6	…	93	
	63	61	…	1		62	60	…	2		61	59	…	1	
	62	61	…	31		61	60	…	31		60	59	…	30	
94	32 解					31 解					31 解				
	37					38					39				
	1	4	7	…	91	2	5	8	…	92	3	6	9	…	90
	62	60	58	…	2	61	59	57	…	1	60	58	56	…	2
	60	59	58	…	30	59	58	57	…	29	58	57	56	…	29
92	31 解					31 解					30 解				
	40					41					42				
	1	4	…	91		2	5	…	89		3	6	…	90	
	61	59	…	1		60	58	…	2		59	57	…	1	
	58	57	…	28		57	56	…	28		56	55	…	27	
91	31 解					30 解					30 解				
	43					44					45				
	1	4	7	…	88	2	5	8	…	89	3	6	9	…	87
	60	58	56	…	2	59	57	55	…	1	58	56	54	…	2
	56	55	54	…	27	55	54	53	…	26	54	53	52	…	26
89	30 解					30 解					29 解				

续表 1

	46					47					48				
	1	4	…	88		2	5	…	86		3	6	…	87	
	59	57	…	1		58	56	…	2		57	55	…	1	
	54	53	…	25		53	52	…	25		52	51	…	24	
88	30 解					29 解					29 解				
	49					50					51				
	1	4	7	…	85	2	5	8	…	86	3	6	9	…	84
	58	56	54	…	2	57	55	53	…	1	56	54	52	…	2
	52	51	50	…	24	51	50	49	…	23	50	49	48	…	23
86	29 解					29 解					28 解				
	52					53					54				
	1	4	…	85		2	5	…	83		3	6	…	84	
	57	55	…	1		56	54	…	2		55	53	…	1	
	50	49	…	22		49	48	…	22		48	47	…	21	
85	29 解					28 解					28 解				
	55					56					57				
	1	4	7	…	82	2	5	8	…	83	3	6	9	…	81
	56	54	52	…	2	55	53	51	…	1	54	52	50	…	2
	48	47	46	…	21	47	46	45	…	20	46	45	44	…	20
83	28 解					28 解					27 解				
	58					59					60				
	1	4	…	82		2	5	…	80		3	6	…	81	
	55	53	…	1		54	52	…	2		53	51	…	1	
	46	45	…	19		45	44	…	19		44	43	…	18	
82	28 解					27 解					27 解				
	61					62					63				
	1	4	7	…	79	2	5	8	…	80	3	6	9	…	78
	54	52	50	…	2	53	51	49	…	1	52	50	48	…	2
	44	43	42	…	18	43	42	41	…	17	42	41	40	…	17
80	27 解					27 解					26 解				
	64					65					66				
	1	4	…	79		2	5	…	77		3	6	…	78	
	53	51	…	1		52	50	…	2		51	49	…	1	
	42	41	…	16		41	40	…	16		40	39	…	15	
79	27 解					26 解					26 解				

续表 1

	67					68					69				
	1	4	7	…	76	2	5	8	…	77	3	6	9	…	75
	52	50	48	…	2	51	49	47	…	1	50	48	46	…	2
	40	39	38	…	15	39	38	37	…	14	38	37	36	…	14
77	26 解					26 解					25 解				
	70					71					72				
	1	4	…	76		2	5	…	74		3	6	…	75	
	51	49	…	1		50	48	…	2		49	47	…	1	
	38	37	…	13		37	36	…	13		36	35	…	12	
76	26 解					25 解					25 解				
	73					74					75				
	1	4	7	…	73	2	5	8	…	74	3	6	9	…	72
	50	48	46	…	2	49	47	45	…	1	48	46	44	…	2
	36	35	34	…	12	35	34	33	…	11	34	33	32	…	11
74	25 解					25 解					24 解				
	76					77					78				
	1	4	…	73		2	5	…	71		3	6	…	72	
	49	47	…	1		48	46	…	2		47	45	…	1	
	34	33	…	10		33	32	…	10		32	31	…	9	
73	25 解					24 解					24 解				
	79					80					81				
	1	4	7	…	70	2	5	8	…	71	3	6	9	…	69
	48	46	44	…	2	47	45	43	…	1	46	44	42	…	2
	32	31	30	…	9	31	30	29	…	8	30	29	28	…	8
71	24 解					24 解					23 解				
	82					83					84				
	1	4	…	70		2	5	…	68		3	6	…	69	
	47	45	…	1		46	44	…	2		45	43	…	1	
	30	29	…	7		29	28	…	7		28	27	…	6	
70	24 解					23 解					23 解				
	85					86					87				
	1	4	7	…	67	2	5	8	…	68	3	6	9	…	66
	46	44	42	…	2	45	43	41	…	1	44	42	40	…	2
	28	27	26	…	6	27	26	25	…	5	26	25	24	…	5
68	23 解					23 解					22 解				

续表 1

	88				89				90			
	1	4	…	67	2	5	…	65	3	6	…	66
	45	45	…	1	44	42	…	2	43	41	…	1
	26	25	…	4	25	24	…	4	24	23	…	3
67	23 解				22 解				22 解			

	91					92					93				
	1	4	7	…	64	2	5	8	…	65	3	6	9	…	63
	44	42	40	…	2	43	41	39	…	1	42	40	38	…	2
	24	23	22	…	3	23	22	21	…	2	22	21	20	…	2
65	22 解					22 解					21 解				

	94				95				
	1	4	…	64	2	5	…	62	总解 2 763 种
	43	41	…	1	42	40	…	2	
	22	21	…	1	21	20	…	1	
43	22 解				21 解				

附解 设 x,y,z,w 为所买绫罗纱绢的尺数,依题意得

$$x+y+z+w=160, 9x+7y+5z+3w=93$$

即

$$9x+7y+5z+3w=930$$
$$3x+3y+3z+3w=480$$

两式相减 $6x+4y+2z=450$,即

$$3x+2y+z=225$$

因此,解决这个不定方程,就得本题的全部解决.

解答示例

x	2	74	72
y	109	1	4
z	1	1	1
w	48	84	83

表 2

令 $z=1$(表 2),$3x+2y=224$,得

$$\begin{cases} y=1, x=74, w=84 \\ y=4, x=72, w=83 \\ y=7, x=70, w=82 \\ y=10, x=68, w=81 \\ \vdots \\ y=106, x=4, w=49 \\ y=109, x=2, w=48 \end{cases}$$

计 37 解. 令 $z=2$, $3x+2y=223$,得

$$\begin{cases} y = 2, x = 73, w = 83 \\ y = 5, x = 71, w = 82 \\ y = 8, x = 69, w = 81 \\ \vdots \\ y = 110, x = 1, w = 47 \end{cases}$$

计 37 解.

以后依此类推,最末令 $z = 95$,求出 y, x, w 的值,再把这些解答求其总和,共为 2 763 解.

注　此外"差分"还有一种解释,是近代解析数学的一分科.

❖量雨法

2.量雨法是什么时候发明的?雨量的多少,雨滴的大小是怎样计算的?(提出人:广州丁贵先)

答　世界最早的量雨法发明于我国,至于雨量的调查,还可以远溯到汉朝.在郑樵著通志上有"后汉(25—220)自立春至立夏,尽立秋,郡国上雨泽"的话,1247 年(南宋理宗淳祐七年)秦九韶著数书九章,其中有计算雨量的题目,可见量雨法至迟在我国南宋时代已经发明了的,到 1424 年(明成祖永乐末年)政府命全国各州县报告当地的雨量.全国各地由政府统一发给量雨器,连朝鲜也发到了.在朝鲜文选备考书中,就提到明朝量雨器的构造,这个量雨器高 1 尺 5 寸,直径 7 寸.清朝康熙乾隆年间,也先后发给量雨器到全国各地和朝鲜去量雨.近年在朝鲜的大邱仁川咸兴等地,发现了 1770 年(清乾隆庚寅年)清朝所发给朝鲜黄铜制的量雨器.这个量雨器高 1 尺,宽 8 寸,并且附有铜制的量雨标尺.西洋到十七世纪才开始应用量雨器,比明朝永乐末年要迟两百多年,比起秦九韶的时代要迟四百年.

雨水是怎样量法呢?本应该用体积来计算.但为简单起见,当某次下雨时若用一种容器来盛雨,已知它的口面,那么只需量它的深度就够了.这是我国在南宋时代用以量雨的原理,至今还是沿用着的.

如果要得到精确数值的话,还可将容器内所盛的水,转倾入一个细长的容器,例如细长的管子,再来计算,因为"深度 = 体积 / 面积",故若转倾入后的容器口面积,只有原容器的十分之一,所以深度就大于原来的十倍,这样是很容易测量的.

现时所称"雨量",是指深度来说.它所用的单位是"毫米".

雨量的强弱,分有下列几种:

(1) 毛毛雨　由极小的雨滴(直径为十分之一至十分之二毫米)所成,降雨量很小.

(2) 小雨　每点钟降雨量不到 2.5 mm.

(3) 中雨　每点钟降雨量在 2.6 到 6 mm 之间.

(4) 大雨　每点钟降雨量在 8 在 15.9 mm 之间.

(5) 暴雨　每点钟降雨量在 16 mm 以上,或 24 点钟之内超过 50 mm.

我国幅员广大,统计全国的雨量,概括地说是南方多而北方少,今列出几个城市全年的降雨量如表 3 所示.

表 3

吐鲁番	兰州	哈尔滨	北京	济南	成都	汉口	上海	香港	基隆
21 mm	370	560	630	640	880	1 200	1 160	2 200	3 300

雨滴的大小,当它停留在空际,没有降落的时候,因为表面张力的关系,呈现浑圆的小球形.下降时的直径,约为 1 mm 至 4 mm,通常是 3.5 mm.在骤雨时所降的大雨滴,约为 5 或 6 mm,最大可达到 8 mm.超过这个限度就不容易团结,纵或团结了,在下降时也必溅成飞沫,又雨滴也有变形,因在下降的途中,一面受地心引力的作用,一面又受上升气流的阻挡,所以分散成为许多“上小下大”的梨形或茄子形状.

雨滴下降的速度,当它从云中落下时,依据重力定律,速度是应该逐渐地增加.但因为雨滴下降,受有空气的抵抗.这种抵抗力,当雨滴下降的速度愈大时,抵抗力也愈增强.结果空气的抵抗力和雨滴的重力保持了平衡,于是雨滴下降的速度,便也不致增加,只是按着同一的速度下降.不过雨滴下降的速度,却依着直径的大小而有不同.当大雨滴下降时,最大速度不能超过每秒钟 8 公尺.如若空气上升的速度为每秒 8 公尺,那就不能有雨.因为雨滴直径在 8 mm 以下,受空气上升的抵抗,不能下降;若雨滴直径在 8 mm 以上,受到空气的冲击,又必碎成细点了,其他别种雨滴的速度如表 4.

表 4

雨滴直径 /mm	3	2	1	0.8	0.6	0.4
每秒钟下降速度(公尺)	6.9	5.8	3.9	3.4	2.7	1.8

雨滴的重量,每颗是很轻微的.直径 0.5 mm 的雨滴只重 0.000 065 g,直径 1 mm 的雨滴重 0.000 524 g,直径 5 mm 的雨滴重 0.065 45 g.

雨滴下落一次的数目有多少,是很容易计算出来的.例如已知某次的降雨量为 4 mm,即得一平方公尺的地面上(即长宽各 100 厘米)降雨的体积为 100 ×

$100\times0.4=4\,000$ (cm³).但因一立方厘米的水重为1 g,所以在一平方公尺的地面上降水量为4 000 g = 4 kg.假若那次的雨滴直径为4 mm,每12滴雨重1 g.因此得在一平方公尺地面上的降雨滴数为 $4\,000\times12=48\,000$.

雨滴下降时的形状,看起来好像是一条线从天上挂上的.其实,这并不是条"雨线",而是雨滴在每段空间暂存时反映在我们脑子里的"视觉残余"的缘故,这和我们看电影时看见银幕上人物会动的原理是一样的.

❖表示自然数

3.利用对数性质和一些运算符号,怎样使(1)任意的自然数 n 都可用三个"2"字表示出来?(2)任意的自然数 n 都可用 $n+3$ 个"a"字表示出来?(提出人:无锡 周公贤)

答 (1)用三个"2"字表示自然数 n 如下:

$$n=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{n\text{层根号}}$$

我们应用归纳法来证明.

当 $n=1$ 时,因为 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{2^{-1}}$,得

$$\log_2 2^{2^{-1}}=2^{-1},\ -\log_2 2^{-1}=1$$

所以
$$1=-\log_2\log_2\sqrt{2}$$

当 $n=2$ 时,因为 $\sqrt{\sqrt{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2^{2^{-2}}$,得

$$\log_2 2^{2^{-2}}=2^{-2},\ -\log_2 2^{-2}=2$$

所以
$$2=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{2}}$$

当 $n=3$ 时,因为 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=[\{(2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2^3}}=2^{2^{-3}}$,得

$$\log_2 2^{2^{-3}}=2^{-3},-\log_2 2^{-3}=3$$

所以
$$3=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

当 $n=k$ 时,因为 $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{n\text{层根号}}=[\{(2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}\cdot^{\cdot}}]^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2^k}}=2^{2^{-k}}$,得

$$\log_2 2^{2^{-k}}=2^{-k},\ -\log_2 2^{-k}=k$$

所以 $$k=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{k\text{层根号}}$$

当 $n=k+1$ 时,因为 $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{k+1\text{层根号}}=\underbrace{[\{(2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}\cdots}]^{\frac{1}{2}}}_{k+1\text{层根号}}=2^{\frac{1}{2^{k+1}}}=2^{2^{-(k+1)}}$,得

$$\log_2 2^{2^{-(k+1)}}=2^{-(k+1)},\ -\log_2 2^{-(k+1)}=k+1$$

所以 $$k+1=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{k+1\text{层根号}}$$

(2) 用 $n+3$ 个"a"字表示自然数 n 如下:

$$n=-\log_a\log_a\underbrace{\sqrt[a]{\sqrt[a]{\sqrt[a]{\cdots\sqrt[a]{a}}}}}_{n\text{层根号}}$$

这式同样可用归纳法来证明,今不赘.

注 今证明几个实际的例子如下:

$$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{2}}=-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{2^2}}=-\log_2\log_2 2^{2^{-2}}=-\log_2 2^{-2}=-(-2)=2$$

$$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=-\log_2\log_2\{[(2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{2^3}}=$$

$$-\log_2\log_2 2^{2^{-3}}=-\log_2 2^{-3}=-(-3)=3$$

$$-\log_a\log_a\sqrt[a]{\sqrt[a]{\sqrt[a]{\sqrt[a]{a}}}}=-\log_a\log_a a^{a^{-4}}=-\log_a a^{-4}=-(-4)=4$$

❖蛇状线

4. 什么叫做"椭圆蛇状线","抛物蛇状线","双曲蛇状线"?(提出人:昆明韩宜良)

答 代数三次曲线,依着"无穷远点"与"渐近线"的不同,有各种蛇状线.

(1) 有一个实无穷远点及一根实渐近线的,叫做"椭圆蛇状线"(Elliptic serpentine),如图1所示.

(2) 有一个实无穷远点及两个相重的无穷远点,有一根实渐近线,并切于一根无穷远线的,叫做"抛物蛇状线"(Parabolic serpentine),如图2所示.

(3)有三个相异的无穷远点并有三根实渐近线的，叫做“双曲蛇状线”(Hyherbolic serpentine)，如图3所示.



图 1

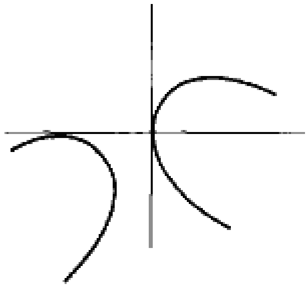


图 2

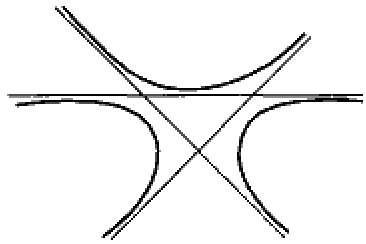


图 3

❖空杯倒酒

5. 如图4，有四只酒杯，杯形都是相似的倒立正圆锥形. 其中最大的一只是空杯，其他A，B，C三只都装满了酒. 已知A的杯口面积是空杯口的一半，B的容积是空杯的一半，C的高度是空杯的一半. 今要将这三杯酒一齐倒入空杯内，问酒会不会溢出于杯外?(提出人：上海龚晨)

答　设以 V, V_A, V_B, V_C 分别表示空杯，A杯，B杯，C杯的容积. R, R_A 表示空杯与A杯杯口的半径. H, H_C 表示空杯与C杯的高.

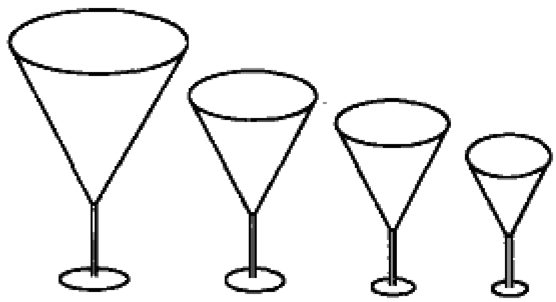


图 4

因为 $R^2 : R_A^2 = 2 : 1$，所以 $R_A = \frac{1}{\sqrt{2}}R$.

由立体几何学

$$V : V_A = R^3 : R_A^3 = 1 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 : \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$V : V_B = 1 : \frac{1}{2}$$

$$V : V_C = H^3 : H_C^3 = 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 : \frac{1}{8}$$

因此 $V_A + V_B + V_C = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) V = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{8} V$.由于 $5 + 2\sqrt{2} < 8$,所以 $V_A + V_B + V_C = V$.这就是说,将三杯酒倒入于空杯内,酒不会溢出于杯外.

1957年10月号小知识解答者名单

解答第3,5题者:靳海荣,吴悦辰,王掌发,孙厚军,陈志浩,吴金城,周公贤,周赛珠,宋宗和,朱百维,广东台山端芬中学尤拉数学小组,范秉椿,南京三中高三甲爱因斯坦数理小组,王明亮,江西泰和中学高三(1)班数学小组,上海育才中学高三(1)班数理小组,江苏海门中学四海数学研究小组.

解答第3题者:顾全林,仇福庭,姜重华.

解答第5题者:山西运城中学高三班数学研究小组,南京十一中高三(2)数学小组,武汉一师周君,安徽黄麓师范 $\alpha\beta\gamma$ 数学小组,武昌实验中学高二(六)黎明数学小组,上海 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 数学小组,上海东昌中学高三(5)班祖冲之数学小组,南京建筑学校江周数学研究小组,南京十二中高二(3)皮埃尔·居里数理小组,浙江绍兴二中高二(3)五星数学小组等三百五十件,姓名从略.

1957 年 10 月号问题

1. 解下列方程:

$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2.$

解 (1) 设 $x \geqslant 2$,则

$$x+1>0, x>0, x-1>0, x-2 \geqslant 0$$

所以

$$|x+1|=x+1, |x|=x, |x-1|=x-1, |x-2|=x-2$$

因此得出方程

$$x+1-x+3(x-1)-2(x-2)=x+2$$

但此为恒等式,故可知任何大于或等于 2 的数都是原方程的根.

(2) 设 $1 \leqslant x < 2$,则

$$x+1>0, x>0, x-1>0, x-2<0$$

所以

$$|x+1|=x+1, |x|=x$$

$$|x-1|=x-1, |x-2|=-(x-2)$$

因此得出方程

$$x+1-x+3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

解之得

$$x=2$$

但此不在区间 $1 \leqslant x < 2$ 之内,即在区间 $1 \leqslant x < 2$ 内原方程无根.

(3) 设 $0 \leqslant x < 1$,则

$$|x+1|=x+1$$

$$|x|=x, |x-1|=-(x-1)$$

$$|x-2|=-(x-2)$$

所以

$$x+1-x-3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

解得

$$x=-1$$

因此在区间 $0 \leqslant x < 1$ 内原方程无根.

(4) 设 $-1 \leqslant x \leqslant 0$,则

$$|x+1|=x+1$$

$$|x|=-x, |x-1|=-(x-1), |x-2|=-(x-2)$$

则

$$x+1+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

但此式不成立,所以在此情形下,原方程也无根.

(5) 设 $x<-1$,则

$$|x+1|=-(x+1)$$

$$|x|=-x, |x-1|=-(x-1), |x-2|=-(x-2)$$

所以
$$-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2$$

解得
$$x=-2$$

故得原方程的解为 -2 以及大于或等于 2 的任何数.

2. 证明下列多项式不能分解为两个解系数多项式之积:

$$x^{2\,222}+2x^{2\,220}+4x^{2\,218}+6x^{2\,216}+8x^{2\,214}+\cdots+2\,218x^4+2\,220x^2+2\,222$$

证 假设该式可分为两个整系数多项式的积

$$x^{2\,222}+2x^{2\,220}+4x^{2\,218}+\cdots+2\,220x^2+2\,222=$$
$$(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0)\cdot$$
$$(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_0)$$

其中 $m+n=2\,222$.

则 $a_0b_0=2\,222$,则 a_0,b_0 中有一是偶数另一是奇数.

设 a_0 是偶数,b_0 是奇数,则 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的所有系数必都是偶数.因为假设 a_k 是倒数第一个奇系数,则因

$$(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)\cdot(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0)$$

中 x^k 的系数

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\cdots+a_0b_k$$

(若 $k>m$,则最后一项为 $a_{k-m}b_m$),即原式中 x^k 的系数,而当 k 为奇数时必为 0,而当 k 为偶数时也必为偶数(因为除第一项外,各项系数都是偶数,而 $k\leqslant n<2\,222$).

但由假设 $a_{k-1},a_{k-2},a_{k-3},\cdots,a_0$ 都是偶数,则在 $a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\cdots+a_0b_k$ 中除第一项外,各项均为偶数.又因这个和也应是偶数,故若 a_k,b_0 都是奇数便出现矛盾了.

因此,$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 中各项系数显然必均应为偶数,而这与 $a_nb_m=1$ 是矛盾的.故本题得证.

3. 已知 n 个定点 $M_1,M_2,M_3,\cdots,M_n$,n 个定角 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$;求作一 n 边形,使以其各边为底,顶角分别等于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 的等腰三角形的顶(该底所对的顶)分别为 $M_1,M_2,M_3,\cdots,M_n$(限定顶 $M_1,M_2,M_3,\cdots,M_n$ 在所求 n 边形外).

解 假设 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 即所求的 n 边形(图 1 中 $n=6$),任取一点 B_1,使其以 M_1 为心旋转 α_1 角后,再以 M_2 为心旋转 α_2 角,如此旋转下去最后以 M_n 为心旋转 α_n 角,则线段 A_1B_1 顺次落至 $A_2B_2,A_3B_3,\cdots,A_nB_n,A_1B_{n+1}$ 处.于是可知

$A_1B_1 = A_1B_{n+1}$,即 A_1 应在 B_1B_{n+1} 的中垂线上.

再任取另一点 C_1,仍按上法依次旋转至 C_{n+1},则 A_1 亦必在 C_1C_{n+1} 的中垂线上.

至此可知 A_1 必可作出.显然 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 各点亦可因之求出而问题得解.

如果 B_1B_{n+1} 与 C_1C_{n+1} 的中无线不平行,则有一解;如果平行,则无解;如果重合,解有无限多解.

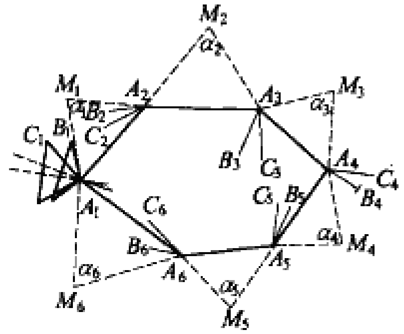


图 1

4.如图 2,在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,若 $A'AB'D'$ 为一正三棱锥,则该平行六面体必有正六边形的断面.试证明之.

解 因为

$$AB' \parallel C'D, AD' \parallel BC'$$

所以 $AB'D'$, $C'DB$ 两平面彼此平行.

作与 ABD', $C'DB$ 两平面平行的平面,则必交 $AD,AB,B'B,B'C'$, $C'D,D'D$ 六棱于其中点 E,F,G,H, K,L.则

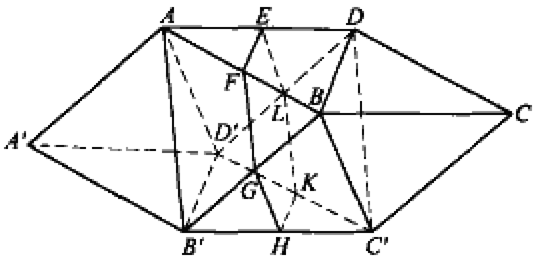


图 2

$$EF = \frac{1}{2}BD, FG = \frac{1}{2}AB', GH = \frac{1}{2}BC'$$

$$HK = \frac{1}{2}B'D', KL = \frac{1}{2}C'D, LE = \frac{1}{2}AD'$$

因为 $$BD = AB' = BC' = B'D' = C'D = AD'$$

所以 $$EF = FG = GH = HK = KL = LE$$

又因为 $$EF \parallel BD \parallel B'D, FG \parallel AB$$

即在 $\angle EFG$ 与 $\angle AB'D'$ 之间,它们的边两两平行但方向一正一反,所以

$$\angle EFG = 2d - \angle AB'D' = 2d - \frac{2}{3}d = \frac{4}{3}d$$

同理可证 $\angle FGH = \angle GHK = \angle HKL = \angle KLE = \angle LEF = \frac{4}{3}d$,所以 $EFGHKL$ 为一正六边形而问题得证.

5.求和:$\csc^2\frac{\pi}{2n+1} + \csc^2\frac{2\pi}{2n+1} + \csc^2\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \csc^2\frac{n\pi}{2n+1}$.

解 因为

$$\sin(2n+1)\alpha = C_{2n+1}^1(1-\sin^2\alpha)^n\sin\alpha - C_{2n+1}^3(1-\sin^2\alpha)^{n-1}\sin^3\alpha + \cdots + (-1)^n\sin^{2n+1}\alpha$$

所以 0, $\pm\sin\frac{\pi}{2n+1}$, $\pm\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, …, $\pm\sin\frac{n\pi}{2n+1}$ 为下列方程的根

$$C_{2n+1}^{1}(1-x^2)^n x - C_{2n+1}^{3}(1-x^2)^{n-1}x^3 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} = 0$$

所以 $\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\cdots,\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ 为下列方程的根

$$C_{2n+1}^{1}(1-x)^n - C_{2n+1}^{3}(1-x)^{n-1}x + \cdots + (-1)^n x^n = 0$$

又

$$\sin(2n+1)\alpha = \sin^{2n+1}\alpha(C_{2n+1}^{1}\cot^{2n}\alpha - C_{2n+1}^{3}\cot^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^{5}\cot^{2n-4}\alpha\cdots)$$

所以当 $\alpha = \frac{\pi}{2n+1},\frac{2\pi}{2n+1},\frac{3\pi}{2n+1},\cdots,\frac{n\pi}{2n+1}$ 时

$$C_{2n+1}^{1}\cot^{2n}\alpha - C_{2n+1}^{3}\cot^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^{5}\cot^{2n-4}\alpha\cdots = 0$$

即 $\cot^2\frac{\pi}{2n+1},\cot^2\frac{2\pi}{2n+1},\cot^2\frac{3\pi}{2n+1},\cdots,\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}$ 为下列方程的根

$$C_{2n+1}^{1}x^n - C_{2n+1}^{3}x^{n-1} + C_{2n+1}^{5}x^{n-2} - \cdots = 0$$

所以

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \cot^2\frac{n\pi}{2n+1} =$$

$$\frac{C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

因为 $\csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1$,所以

$$\csc^2\frac{\pi}{2n+1} + \csc^2\frac{2\pi}{2n+1} + \csc^2\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \csc^2\frac{n\pi}{2n+1} =$$

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \cot^2\frac{n\pi}{2n+1} + n =$$

$$\frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2n(n+1)}{3}$$

1957年10月号问题解答者名单

解出1,2,3,4,5题者:杨永靖及陆文镕,龙岩1中高八丁班数学小组,上海南洋模范中学高三数学小组,郑桦,杨子昭,张建瑜.

解出1,2,3,4题者:王若雨,陈铨.

解出1,2,3,5题者:陈非非.

解出1,2,4,5题者:夏永锦,泰州中学高三(3)x,y数学小组,邵黎康.

解出2,3,4,5题者:唐宗寿.

解出1,2,4题者:刘再进,杨慎礼,朱襄生,罗善成,广州8中杨辉数学小组.

解出1,2,5题者:李鼎祥,范秉椿,武汉14中高三(1)小小卫星组.

解出2,4,5题者:何鸿桐,上海71中科学小组.

解出1,2题者:冯元勤,邱仲英,叶解慰,陈心钜,赵松行,彭晋民,周鼎琋及庄燕,樊世玄,杨照正.

解出1,4题者:潘肃,周晨,陈祖万,杨树梁,顾全林,金成粱,张观周等四人,范树勋及赵明山,杨宝桎,林德强,蔡伟常,支振昌,赵文卿,陈通章,陈锡煌,林宝安,吴祈晖,霍元素,吴江舫,施九卿,武汉市14中高三四班四人兴趣小组,天津7中二人数学小组,复兴中学高三(1)祖冲之数学小组,上海51中高二(三)a,b数学小组,毛溪中学高三乙三人数学小组,南昌5中四人数学小组,台山端芬中学尤拉数学小组,王庆勇,鲁祥兴,李国有.

解出1,5题者:李友耕,贺士钊及许金龙,华营,启东县中学无名氏,唐文杰,桂永和,郭达民,金傅默,陈志浩,陈国光.

解出2,4题者:王明伦,张春昭.

解出2,5题者:于振兴,黄奇伦.

解出3,4题者:黄人杰,倪继祖,放德及方正域,胡琴及俊祥.

解出4,5题者:王普与杨宏秀,李纯文,上海市文建中学高三(五)数学小组.

解出1题者:王希明,余新河,洪楠,胡敦友,万玉,鄢超圣,喜明德,梅开仁,刘艺,荆树汉及何文央,钟震昭,刘炳琦,赵玉琪与肖其,王信,崔甲及,金松,方仁义,何泰来,汤俊,史成祥,邹志周及吴国新,王国森,汤毓汀,黄玉林,杨昭安,梅林周,陈广均,马有荣,褟培才,陈福麟,刘德光,李如锦,王芳梁,袁玉池,崔秉文,戴静安,江苏川沙县中高三(甲)青春数学小组.吉安高三(3)高斯数学小组,辽宁小东景学,华南工学院建一乙数学爱好者,浙江绍兴2中高二(三)五星

数学小组，无锡县中高二联数学小组，李忠源.

解出2题者：张人逸，周珣，张长连，段续年，王宝辉，谢天心.

解出3题者：周永良及周惠德.

解出4题者：张祖腾，李炯，王学敏，周恩智，钟超，汪尧昌，余景敬，刘德欣，杨良材，陈剑豪，张应谟，盛立刚，陈生智，陈永泰，刘子玢，穗新如非，吴树昌，羚羊，牟炳论，洪孝治，姜大雄，满英杰，李学明，言莫，吴学欧，林培端，华旭及金成师，郑永树，张存谦，天津1中SIII6数学爱好者，常州市20中高三一班朝阳数学小组，福州4中高三(1) 物理数学兴趣小组，丰成中学Ω数理小组，安徽黄麓师范α.β.γ.数学小组，陕西粗县中学高五八数学活动小组，四川三台中学姬骊营数学爱好者，王玉茂，阮志扬，郁振华，王希明，曲树崑，肇恒文.

解出5题者：金峰，齐东如旭，胡逢志，秦赛银，张略寰，解子魁，王涌波，邵儒林，周晨，谢鸿才，成都12中高三(1)“η”数学小组及陈兴昭.

1957年11月号小知识问题答案

❖缀　术

1."缀术"是何人所著?它的内容谈些什么东西?(提出人:包头 黄显固)

答　旧唐书和新唐书均载说,"缀术五卷,祖冲之(429—500)所著,李淳风注释."隋书律历志以这书为推算圆周率的数学,说道:"宋末南徐州从事史祖冲之更开密法,指要精密,算氏之最者也,所著之书,名为缀术,学官莫能究其深奥,是故废而不理."可见这书是一部理论高深的著作.至宋时沈括梦溪笔谈和秦九韶数书九章又都引称缀术为论历术的书籍.沈括并说到祖亘有缀术二卷.祖亘即祖冲之的儿子祖暅,或有以暅作晅之的.由此知道祖氏父子都各著有缀求,他们都是研究数理并且精通历法的大家了.

缀术中论数亦论历.据南史七十二传称"缀术造有数十篇",可见它必是大部的书.又由唐代明算科,对于十二部用书各有规定的学习年限来看,亦能推测它是大部的书.唐书选举志说:"孙子五曹共限一岁,九章海岛共三岁,张丘建夏侯阳共一岁,周髀五经算术共一岁,缀术四岁,缉古三岁,记遗三等数皆兼习之."在这十二部书中,缀术习四岁,年限最长,现在所存十经中,九章算术为最重要,又最大部,故加以海岛算经共习三年,至辑古算经,现存本虽为短篇,然甚难读,宜习三年,独有缀术须习四年.现存诸书中最大部的九章算术,成为九卷.缀术既说是有数十篇,则它是大部而又难读,是可以确定的.

唐代明算科所用十二书,可分为两类来看.即记遗三等数,没有学习年限的规定,仅说"兼习"已够.唐书选举志载:"试之日,九章三条,海岛孙子五曹张丘建夏侯阳周髀五经等七部各一条,十通六;记遗三等数帖读,十得九为第;缀术七条,缉古三条,十通六为第."由此看来,唐代的考试方法,对记遗三等数,和其他十书的意味,也不相同.记遗三等数的评分方法,以得百分之九十为及第,其他书则以得百分之六十为及第.又由缀术缉古两书中所出的题目条数亦较多,缀术七条,缉古三条,盖以这两书为较高等的缘故.所以缀术是一部最重要的数学书,不难想象得知,且王孝通上辑古算经亦说道:"祖暅之之缀术,时人称精妙,"更可以证明了.

宋钦宗靖康元年(1126)金人攻陷汴京.次年北宋徽钦宗两个皇帝被擒,秘

阁所藏的图书被劫，算经亦遭受散失，就在这个时代，算术拾遗，三等数，缀术一并失掉了.在日本与我国梅文鼎同时的关孝和（1642—1708）似曾看过缀术这书.相传关孝和于奈良得到一部算学书，学问因此大有进步.他的遗著括要算法多采用我国方法.又据冈本则录称当时梶山主和次俊还藏有宋冲之的缀术，不过那书到现在也散失了.

❖由靴子算身高

2.已知某人靴底的长是28 cm，你能否根据这个数值以算出他的头长和身高？如若可能，试问他的头长和身高各是多少？（提出人：山西大同 石国球）

答1 根据斯坦纽克书中的记载，一般成年人脚掌的长度，相当于身高的七分之一.而脚掌要比靴底短少4 cm.又人的头长亦相当于身高的七分之一.因此若知道某人靴底的长，就可据以算出他的头长和身高.

在本题中

$$\text{某人的身高} = (28\ \text{cm} - 4\ \text{cm}) \times 7 = 24 \times 7\ \text{cm} = 1.68\ \text{m}$$

$$\text{某人的头长} = 1.68\ \text{m} \times \frac{1}{7} = 0.24\ \text{m} = 24\ \text{cm}$$

答2 我国成年人的身高约为头长的7倍，而头长又近似地等于脚长.一般人靴底长与脚长之比是14∶13.但欧美人的身高约为头长的7.5倍.在本题中

$$\text{脚长} = 28\ \text{cm} \times \frac{13}{14} = 26\ \text{cm}, \text{头长} = 26\ \text{cm}$$

若是我国人，得

$$\text{身高} = 26\ \text{cm} \times 7 = 182\ \text{cm} = 1.82\ \text{m}$$

若是欧美人，得

$$\text{身高} = 26\ \text{cm} \times 7.5 = 195\ \text{cm} = 1.95\ \text{m}$$

注 （1）这个题目是很有意思的，可作为一些实际的用途.因为根据美术工作者的绘图知识，知道一个成年人的头长相当于自己身高的七分之一.又由有经验的侦察人员，知道一般成年男女的脚长相当于自己身高的七分之一.翻阅书籍，从“找敌人的脚印”一书，会告诉你，他们为了追查一个敌人，寻找这人的脚印，由这脚印可以推出这人的高.此外还可以找些成年人的相片，去做实际的测量，或量一些成年人的身高，头长，脚长，求出这些数值之间的关系来.

（2）人在1岁时，全身高等于头长的4倍；在4岁时，身高等于头长的5倍；在9岁时，身高等于头长的6倍，在16岁以上的成人，身高等于头长的7倍.

❖桌上电灯

3. 把一盏电灯台安放在桌上，问灯泡距离桌面应有多少高，才能使桌上的书照得最亮？(提出人：上海 黄舞阳)

答 1 如图 1，设 A 为电灯泡，BC 为桌面，B 为放书处，I 为灯的发光强度. E 为亮度，依光学定律

$$E = \frac{I}{AB^2}\cos\alpha = \frac{I}{a^2}\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$E^2 = \frac{I^2}{a^4}\cos^2\alpha\sin^4\alpha = \frac{I^2}{2a^4}(2\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$$

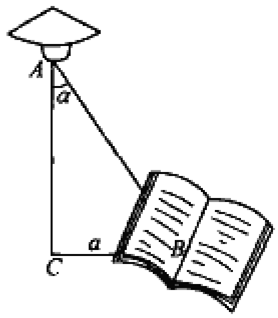


图 1

式中$\frac{I^2}{2a^4}$是一个常数. 当 $2\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$ 为极大时，E^2 为极大，也就是 E 为极大.

但 $2\cos^2\alpha+(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\alpha)=2$(定数)，故知当 $2\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ 时，得 E 为极大. 于是得 $3\cos^2\alpha=1$，即 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，即

$$\sin\alpha=\sqrt{3}, \tan\alpha=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}, \frac{a}{AC}=\sqrt{2}$$

所以 $AC=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

这就是说："灯泡距桌面的高" 等于"书至电灯在桌面上正射影间距离的$\frac{\sqrt{2}}{2}$" 时，书照得最亮.

注 本题系采自别莱利曼的趣味代数学.

答 2 由前面 $E=\frac{1}{a^2}\sin^2\alpha\cos\alpha$，令 $y=\sin^2\alpha\cos\alpha$，求导得

$$y'=-\sin^3\alpha+2\cos^2\alpha\sin\alpha=0$$

即 $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=0$，即 $3\sin^2\alpha=2=0$，即 $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$. 于是 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，所以 $AC=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

❖画多边形

4. 凸 n 边形及所有对角线，问至多用几笔可以画成？又以 n 边形的角顶为顶点，对角线为边，构成三角形，问共有多少个？(提出人：上海徐孝舜及扬州方户)

答　(1) 凸 n 边形(当然 $n \geqslant 3$) 把所有的对角线画成后，那么圆形中任意一个顶点，与其余 $(n-1)$ 个顶点，都有线相通，所以在圆形中每个顶点的叉数都是 $(n-1)$. 现在讨论 n 的可能情况.

① 当 n 为奇数时，$(n-1)$ 为偶数，得圆形中 n 个顶点的叉数都是偶数. 于是那样的图形至少可以一笔画成. 例如三边形，五边形，七边形，……，连对角线在内，都可以一笔画成.

② 当 n 为偶数时，$(n-1)$ 为奇数，得图形中 n 个顶点的叉数都是奇数. 因为一笔最多只能完成有两个奇叉点的图形. 而我们所讨论的情形共有 n 个奇叉点，故完成图形至少得用 $\frac{n}{2}$ 笔. 例如四边形，六边形，八边形，……，连对角线在内，分别要用两笔，三笔，四笔，……，画成.

(2) 当 $n=3$ 时，由于三角形根本不能成立对角线，所以没有以对角线为边，三角形各角顶为顶点的三角形. 因此只需讨论 $n \geqslant 4$ 的情况.

因为 n 边形是凸的，可以想象那些顶点排列在圆周上. 我们所要求的，是以 n 边形的角顶为顶点，对角线为边所构成三角形的个数. 首先求出这圆周上 n 个点，每 3 点构成一个三角形的个数为：

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

但其中有用原 n 边形的一边及两根对角线所构成的三角形为 $n(n-4)$ 个；又有用原 n 边的两边及一根对角线所构成的三角形为 n 个. 这两种三角形，须从 C_n^3 中减掉，即得所求三角形的个数

$$N = C_n^3 - n(n-4) - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-3) = \frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$$

例如当 $n=4$ 时，$N=0$；当 $n=5$ 时，$N=0$；当 $n=6$ 时，$N=2$；当 $n=7$ 时，$N=7$；当 $n=8$ 时，$N=16$；当 $n=9$ 时，$N=30$.

❖连续的合数

5. 写出 n 个连续自然数，使每个数都是合数. 问该怎样写法？（提出人：扬州房鼎业）

答 这样的数是多种多样的，今列出几种写法如下.

(1) 用筛数法 首先写出从 1 开始的自然数列. 在列中划出 2 的倍数，3 的倍数，5 的倍数，7 的倍数等. 然后观察在什么时候有 n 个连续的数出现，那 n 个连续数，就是所求的连续合数. 这样求法可以求出最小的 n 个连续合数.

(2) 求公倍数法 这 n 个连续数可以写成 $k+2, k+3, k+4, \cdots, k+n+1$，这里的 k 是 $2,3,4,\cdots,k+1$ 诸连续数的最小公倍数.

因为 $k+2$ 的两项都是 2 的倍数，$k+3$ 的两项都是 3 的倍数，…，$k+(n+1)$ 的两项都是 $n+1$ 的倍数，故 $k+2, k+3, k+4, \cdots, k+(n+1)$ 都是合数.

(3) 用阶乘数法 在 (2) 中，令 $k=(n+1)!$ 那么 n 个连续合数可以写为

$$(n+1)!+2,(n+1)!+3,(n+1)!+4,\cdots,(n+1)!+(n+1)$$

(4) 在 (2) 中取 $m \geqslant n+1$，那么 n 个连续合数又可写为

$$m!+2, m!+3, m!+4, \cdots, m!+(n+1)$$

(5) 在 (4) 中取 $p \geqslant 2$，那么 n 个连续合数又可写为

$$m!+p, m!+(p+1), m!+(p+2), \cdots, m!+(p+n-1)$$

注 (1) 本题在别莱利曼趣味代数学里已有论述. 1957 年上海市中等学校数学竞赛里二三年级复赛第一题说道："试写出十个连续的自然数，使其中每一个数都是合数"，就是本题的一个特例. 这题的最小一组解答是 114，115，116，…，123 十个数. 因为从质数 113 到质数 127 中间有十三个连续数都是合数. 但若求出 2，3，4，…，11 的最小公倍数，27 720，再分别加上 2，3，4，…，11，就得十个连续合数为 27 722，27 723，…，27 731. 又若求出 $11!=39\ 916\ 800$，再分别加上 2，3，4，…，11，亦得十个连续合数为 39 916 802，39 916 803，…，39 916 811. 显然这后面两组合数，要比头一组大得多.

(2) 最小的十三个连续合数是 114，115，116，…，127. 从质数 199 到质数 211，中间有十一个连续合数为 200，201，202，…，210. 又从质数 211 到质数 223，中间亦有十一个连续合数为 212，213，214，…，222. 从质数 1 129 到质数 1 151，中间有二十一个连续合数为 1 130，1 131，1 132，…，1 150. 从质数 1 327 到质数 1 361，中间有三十三个连续合数为 1 328，1 329，1 330，…，1 360.

1957年11月号小知识解答者名单

解答第1,3,4题者:陈志浩.

解答第1,2题者:蔡子超,张立称.

解答第1,3题者:广东台山端芬中学尤拉数学组,叶时爽,上海中国中学高二(1)数学物理研究小组,梁伟豪,郑快帆,郑凯帆.

解答第2,3题者:宋宗和,武汉十二中高二(3)H.B.C.数学小组,杨临城,天津大学y·s·y·,武汉三十三中学高二(4)第三刘徽数学小组.

解答第2,5题者:肖子锦.

解答第3,4题者:金玉辉,董辅山,江西泰和中学高三(1)数学小组.

解答第4,5题者:邵黎康.

解答第1题者:汤彬如,任德祥,曹家敏,潘养廉,谢华锟,林贻俊,吕宇,张若愚.

解答第2题者:李琦,罗省曾,周祖应,向世才,吴太武.

解答第3题者:四川江津石门李家乡新民村校,河南汲县一中高三(2)数学爱好者,扬州新华中学101,杭州惠民街51号,浙江绍兴二中高二(3)五星数学小组等百零三件,姓名从略.

解答第4题者:曹授伟,上海五十八中高三(3)数学兴趣小组,谢家树,贵州松桃中学高二数学小组,江祥桐,程振明,石孝伯,何良虎,刘业田,南京三中爱因斯坦数理小组.

1957年11月份问题解答

1.求内接于定圆且两边各有定方位的三角形的内心之轨迹.

解　假设$\triangle ABC$内接于定圆$\odot O$,它的两边AB和AC各有定方位,而I是它的内心.

作$\odot O$的直径PR和QS,使$PR\perp AB$,$QS\perp AC$.由假设,知PR和QS都是$\odot O$的定直径,因而$PQRS$是定矩形.

P,Q,R,S四点把$\odot O$的周分为四个弧,现在我们假定A点在其中的一弧例如$\overparen{PQ}$上.据图1,知P,Q各是$\overparen{AB},\overparen{AC}$的中点,从而直线$CI,BI$必然分别通过这两点.由此

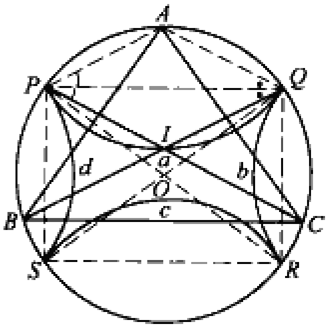


图1

$$\angle IPQ=\angle APQ,\angle IQP=\angle AQP$$

可见I是A关于PQ的对称点.这就是说,I点落在$\overparen{PQ}$关于PQ的对称弧a上.

如果A点在$\odot O$的$\overparen{QR},\overparen{RS},\overparen{SP}$之一上,那么同样可以证明$I$点落在该三弧各关于$QR,RS,SP$的对称弧$b,c,d$之一上.

逆过程看,在a,b,c,d这四个弧之一例如a上任取一点I,我们来证明这点确是具备假设条件的某三角形的内心.

现在我们把I点关于PQ的对称点作为A点,而把直线QI,PI各与$\odot O$的第二交点作为B,C两点.因为弧a与$\overparen{PQ}$关于PQ对称,可见A点必在$\overparen{PQ}$上.又因

$$\angle AQP=\angle IQP,\angle APQ=\angle IPQ$$

得知P,Q各是$\overparen{AB},\overparen{AC}$的中点.这样一来,$I$点就是$\triangle ABC$的内心,同时$AB\perp PR$,$AC\perp QS$,从而$AB,AC$具有给定的方位.所以$\triangle ABC$合乎假设的条件.

由上所述,我们证明了$\triangle ABC$的内心I的轨迹,就是$\overparen{PQ},\overparen{QR},\overparen{RS},\overparen{SP}$分别关于$PQ,QR,RS,SP$的对称弧$a,b,c,d$.不难知道,这四个弧轮回相切于$P,Q,R,S$四点,而这四个切点都是轨迹的极限点.

2. 计算：$3\cdot5\cdot17\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)$.

解

$$3\cdot5\cdot17\cdot\cdots\cdot(2^{2^n}+1)=(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)=$$
$$(2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)=$$
$$(2^{2^1}-1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)=$$
$$(2^{2^2}-1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)=$$
$$(2^{2^3}-1)\cdots(2^{2^n}+1)=\cdots=$$
$$(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1$$

3. 设 α 与 β 是正整数，且 $\beta>2$. $2^\alpha+1$ 能被 $2^\beta-1$ 除尽吗？

解 因为 $\beta>2$，故 $2^{\beta-1}(2-1)>2$，即

$$2^{\beta-1}+1<2^\beta-1$$

我们分下列三种情形讨论.

(1) $\alpha<\beta$. 那么 $\alpha\leqslant\beta-1$，因而

$$2^\alpha+1\leqslant2^{\beta-1}+1<2^\beta-1$$

故 $2^\alpha+1$ 不能被 $2^\beta-1$ 除尽.

(2) $\alpha=\beta$. 这时 $2^\alpha+1=(2^\beta-1)+2$. 这时 $2^\alpha+1$ 显然不能被 $2^\beta-1$ 除尽.

(3) $\alpha>\beta$. 那么总可以写成 $\alpha=q\beta+\gamma$，此处 q 是正整数，γ 是一个小于 β 的非负整数. 于是

$$2^\alpha+1=2^{q\beta+\gamma}+1=2^\gamma(2^{q\beta}-1)+(2^\gamma+1)$$

$2^{q\beta}-1$ 能被 $2^\beta-1$ 除尽，因而等式右端第一项能被 $2^\beta-1$ 除尽. 但 $\gamma<\beta$，由(1)，等式右端第二项不能被 $2^\beta-1$ 除尽，因而 $2^\alpha+1$ 不能被 $2^\beta-1$ 除尽.

这样，不论是哪一情形，$2^\alpha+1$ 都不能被 $2^\beta-1$ 除尽.

3. 解方程组

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sqrt{\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac34}\\ \cos x+\cos y=\sqrt{\dfrac{\sqrt6}{2}+\dfrac54}\end{cases}$$

解 (1) 设 (α,β) 是方程组的解，于是，我们有恒等式

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{\frac{\sqrt2}{2}+\frac34} \quad ①$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{\frac{\sqrt6}{2}+\frac54} \quad ②$$

①^2 + ②^2，得

$$2+2\cos(\alpha-\beta)=2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

即

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

由此得

$$\alpha-\beta=2k\pi\pm\frac{\pi}{12} \quad ③$$

②^2 - ①^2，得

$$2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

即

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

由此得

$$\alpha+\beta=2l\pi\pm\frac{5\pi}{12} \quad ④$$

由 ③，④ 得

$$\begin{cases}\alpha=(k+l)\pi\pm\frac{\pi}{24}\pm\frac{5\pi}{24}\\ \beta=(l-k)\pi\pm\frac{5\pi}{24}\mp\frac{\pi}{24}\end{cases}$$

这就是说，方程组的解只能有以下几种形式，至于这样形式的(α,β)是否的确是解，尚待验证.

(2) 将上述形式的各组(α,β)代入原方程组，得知以下两组确为方程组的解，即

$$\begin{cases}x=2n\pi+\frac{\pi}{4}\\ y=2m\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases},\begin{cases}x=2p\pi+\frac{\pi}{6}\\ y=2q\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

此处 n,m,p,q 是任意整数.

5. 给定平面上 n 个点($n>2$). 按任意次序把它们联成一个闭多边形，再联结每边的中点，形成一个新的多边形，如此继续地做下去. 证明：这样得到的多边形序列收敛于一点.

证 令 $P_1,P_2,\cdots,P_n(n>2)$ 是所给面的 n 个点，O 是它们的重心. 取定

一个直角坐标系，以 O 为原点. 那么平面上每一点就有一个复数和它对应. 令

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, k = 1,2,\cdots,n$$

依次是与 P_k 对应的复数. 由于 O 是重心，我们有

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0 \quad ①$$

令 $|z_k|$ 表示 z_k 的模(即 P_k 点与原点的距离)，令 ρ 是一切 $|z_k|$ 中的最大者

$$|z_k| \leqslant \rho(k = 1,2,\cdots,n) \quad ②$$

我们用 A 表示原来的多边形(即以 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为顶点的多边形). $A^{(1)}$, $A^{(2)},\cdots,A^{(n-1)}$ 依次是按题中所要求的那样作出的前 $n-1$ 个多边形，$z_k^{(1)}$, $z_k^{(2)},\cdots,z_k^{(n-1)}(k = 1,2,\cdots,n)$ 分别是与 $A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(n-1)}$ 的顶点对应的复数. 根据题意，我们有

$$z_k^{(n-1)} = \frac{1}{2}(z_{k_1}^{(n-2)} + z_{k_2}^{(n-2)})$$

k_1,k_2 是 $1,2,\cdots,n$ 的某两个不相同的数. 同样

$$z_{k_1}^{(n-2)} = \frac{1}{2}(z_{j_1}^{(n-3)} + z_{j_2}^{(n-3)})$$

$$z_{k_2}^{(n-2)} = \frac{1}{2}(z_{j_3}^{n-3} + z_{j_4}^{(n-3)})$$

因此

$$z_k^{(n-1)} = \frac{1}{2^2}(z_{j_1}^{(n-3)} + z_{j_2}^{(n-3)} + z_{j_3}^{(n-3)} + z_{j_4}^{(n-3)})$$

此处 j_1,j_2,j_3,j_4 中至少有三个数不同. 同理

$$z_k^{(n-1)} = \frac{1}{2^3}(z_{i_1}^{(n-4)} + z_{i_2}^{(n-4)} + \cdots + z_{i_8}^{(n-4)})$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_8$ 中至少有四个数不同. 这样下去，最后我后得到

$$z_k^{(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}}(a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n)(k = 1,2,\cdots,n) \quad ③$$

其中 a_i 是正整数，并且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^{n-1}$$

由 ①,② 及 ③ 我们有

$$\left|z_k^{(n-1)}\right| = \frac{1}{2^{n-1}}|a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n| =$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}|(a_1-1)z_1 + (a_2-1)z_2 + \cdots + (a_n-1)z_n| \leqslant$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}|a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n|\rho =$$

$$\frac{2^{n-1}-n}{2^{n-1}}\cdot\rho=k\rho$$

此处$0<k=\dfrac{2^{n-1}-n}{2^{n-1}}<1$.上面的不等式表明,$A^{(n-1)}$完全被包含在以原点为圆心,半径是$k\rho$的圆内.

重复上述步骤m次后,我们得到,第$m(n-1)$个多边形$A^{(m(n-1))}$完全被包括在以原点为圆心半径是$k^m\rho$的圆内.由于$0<k<1$,而ρ是一个定数,因此当$m\to\infty$时,$k^m\rho\to 0$.这样只要$p>m(n-1)$,第p个多边形$A^{(p)}$完全被包含在以原点为圆心,半径可以小于任意给定的正数(只要m充分大)的圆内,因而所作的多边形收敛于一点(即原点).

1957 年 11 月份解答者名单

五题全部解出者:杨胜归与秦应龙.

解出 1,2,3,4 者:陈钟锜,邵黎康,邱大陆,杨子昭,唐宗寿,泰州中学高三(3)x,y 数学小组,丁木英,冯克勤,刘延良.

解出 2,3,4,5 者:上海南洋模范中学高三(四)科学小组,王伟生.

解出 1,2,3 者:钱树栅,郑桦,叶解慰,于根兴,邱仲英,陈昌楚.

解出 1,2,4 者:陈非非.

解出 2,3,4 者:吴江舫,陆少华,强宁春,洪毅,陆健瑜,上海南洋模范中学高三数学小组,王俞,夏永绵,许芳官,霖肖田心,黄述谷,王佐农,李继闵,齐东旭,罗善成,张华山,范秉椿,桂永和.

解出 1,2 者:洪见谷,陆文镕与杨永靖,戴静安,倪慎非,黄人杰,汤志根,李友耕.

解出 1,3 者:金松.

解出 1,4 者:林美,金成梁.

解出 2,3 者:邓快帆与邓凯帆,朱囊生,王士铨,曹永源,何鸿桐,李仁杰,上海徐汇中学高三(三)数学小组,张逸,王自强,志狭,张长达,上海文建中学高三(三)数学小组,黄霞生,王谷雨,杜韵秋,南京十一中高三(二)数学小组,杨慎礼.

解出 2,4 者:朱惠生,王志成,李学明,钟贞,杨勇成与杨永源与李思仁,邓诚鑫,林狄,李永良与朱瑞麟,杜宝纯,欧阳崇珍与李汶才,顾昌森,王兆龙,常州二中朝阳数学小组,黄匡稷,张志达,武汉十二中 H.B.C.数学小组,丁浩明,苏铭德,傅忠良,刘启昌,严谷良,沈以淡,周晨,李恒,陈祖万,福建春江南侨中学高三甲三人小组,东坡,叶大年,季鼎祥,刘炳琦,张存谦,陈本立,潘肃,杨祖正与梁桂汶,凌立德,南京师院附中 Tartaglia 数学小组.

解出第 1 者:周鼎蒴,蔡体常,上海天助桥四人数学小组,李忠源,董继立,宋文亮与胡万函与张玉山.

解出第 2 者:张国相,朱咏堂,吴学颜,贺士钊与许金龙,丘子靖,邓春生,侯宝福,王普与查宝霞,杨永盛,黎观生,汤慕忠与黄道林,杨启鹏,武汉十五中“$x+y=lvt$”小组,天等陈君,于业昌,严承章,包宏斗,张祖腾,金腓力,刘飞旗,林镜清,钱永新,冯瑞荃,陈玉麟,林长泰,曲存让,王光耀,杨景芳,董振中,福州四中 α,β,γ 数学小组,滕用铨与杨世钦,汪仁贵,常忠仁,剡俊华与陈东

升，方邦城与刘子翼，梅林周，葛根高，周维鹏，江苏太川中学 x,y,z 数学小组，武汉十四中高三(一)三人小组，吕洪与朱济生，南昌五中四人小组，林永成，启东中学高三(二)三人数学小组，曹景忠，河北定县一中火箭数学小组，周世英，湖北实师(37)w数学小组，李选求，邱玉科，李永鑫，韩文栋，林齐成，邱文娟与曹珠屏，殷贤炎，黑龙江商业厅沈君，赵更生，丁雍序，湖北孝感高中 M.И.数学小组，邹中桂，江西吉安高中高斯数学小组，开封一高三八班数学研究组，孙振中与丁呈巩，李君，王文求，赵文钦，单守信，广东台山端芬中学尤拉数学小组，王嘉桁，刘桂元，江明怀，贺相琨，黄耀辉，张竞钱与赵文钦.

解出3者：严金仕，陈心钜，陈绍刚，付建华，甘文照，张鹤亭，陈福麟，李开明与李熙谋，李兆顺，丘子青，衡其平与郭尚明.

解出4者：冯德华，沈康乐，丁绍亭，吴树思，姚玉珩，南河柱，宋富昌，申得洙，徐姚一中 $\frac{1}{\pi}$ 数学小组，张炳耀，顾国学，何云鹏与王连孝，刘再进，湖南浏阳一中高三俊明数理小组，李长魁，朱政祥，吴乾璠，徐文豪，陈发枝，濮介，王忠国，符家燔，喻英才，史德锡，景振中，吴祥鹄，唐清华，余新河，林文经，王荣祥，华南工学院建一乙数学爱好者，陶文有，何五昌，薛俊华.

解出5者：赵松行.

1957年12月号征解问题答案

❖圆柱直交

1. 两个半径同为 R 的圆柱垂直相交，问它们公共部分的体积是多少？(提出人：上海 孙学才)

解法1 它们垂直相交，其公共部分是一个"合盖"形的立方体(图1). 令其体积为 V，同时命以 R 为半径的球积为 V_1.

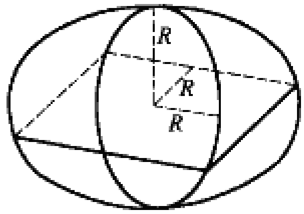


图1

依祖暅球体求积公式 $V:V_1=4:\pi$，所以

$$V=\frac{4}{\pi}\times V_1=\frac{4}{\pi}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{16}{3}R^3$$

注 这个问题我国古代数学家祖暅很早就解出了，叫做"牟合方盖".

解法2 设两柱相交公共部分的体积为 V. 如图2，把它们的公共部分切下，那么 V 就等于这个正立方体减去那些多余部分.

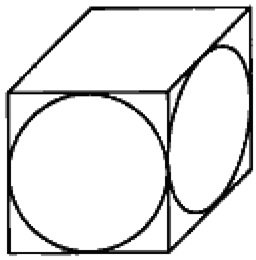


图2

上，下多余部分可看做是两个相等的锥体，其体积为

$$\frac{1}{3}(2R)^2\cdot R=\frac{4}{3}R^3$$

于是

$$V=(2R)^3-2\times\frac{4}{3}R^3=\frac{16}{3}R^3$$

解法3 设圆柱的轴分别是 x,y,z，所求体积在第一卦限内，如图3，作平面平行于平面 yz，与所求体积在第一卦限内的那一部分截成正方形 $ABCD$，所以 $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$. 又 $OB=OC=OD=R$，所以 $ABCD$ 为正方形，其面积为 BC^2.

设 A,B,C,D 的直角坐标是 $A(x,0,0)$，$B(x,y,0)$，$C(x,y,z)$，$D(x,0,z)$.

由 $x^2+y^2=R^2$，得 $x=\sqrt{R^2-y^2}$，由 $y^2+z^2=R^2$，得 $z=\sqrt{R^2-y^2}$. 于是 $S_{正方形ABCD}=xz$.

所以，所求体积

$$V = 8\int_0^R (R^2 - y^2)\mathrm{d}y = 8\left(R^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{16}{3}R^3$$

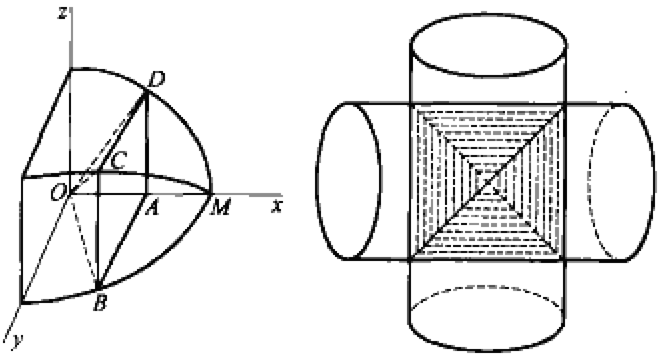


图 3

解法 4　作一平面通过一个圆柱的轴，与它个圆柱的轴垂直，这个平面称为"轴平面"，它把物体分成"前半""后半"．因为两半完全相等，所以只需讨论前半．

再平行于"轴平面"做一些平面，把物体的前半分为 n 块薄片，每块的厚度是 $\frac{R}{r}$．这薄片从旁面看去都成正方形．

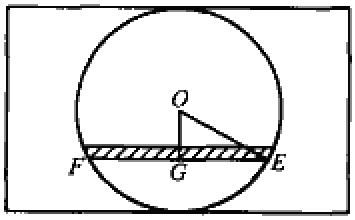


图 4

这个物体从上往下看时，如图 4，其中第 k 块薄片的外边长度为

$$l_k = 2EG = 2\sqrt{OE^2 - OG} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2}$$

它的面积为

$$l_k^2 = 4R^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

它的体积为

$$v_k = l_k^2 = \frac{R}{n} = \frac{4R^3}{n}\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

于是物体前半的体积为

$$V' = \sum_{k=1}^{n} \frac{4R^3}{n}\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = 4R^3\left(1 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = 4R^3\left[1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

达极限时

$$V' = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{4R^3}{n}\left(1 - \frac{k^2}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[4R^3\left(1 - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} 4R^3\left[1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = 4R^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8R^3}{3}$$

所以整个物体的体积 $V = 2V' = \frac{16R^3}{3}$.

❖方程的有理解

2. 设 x, y 为有理数，试解方程 $x^2 + y^2 = x^2y^2$.(提出人：湖南浏阳 陈思桃)

解 利用毕达哥拉斯定理，设直角三角形的三边

$$a : b : c = x : y : xy = 3 : 4 : 5$$

令 $x = 3w, y = 4w$，于是 $xy = 12w^2 = 5w$.

解这式，得 $w = \frac{5}{12}$，所以 $x = \frac{5}{4}, y = \frac{5}{3}$，这是一组解答.

但因为题中 x 与 y 是对称的，x, y 的符号也可取正号，或取负号，所以采用这个特殊三角形就可得出解答八组如表 1.

表 1

x	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{3}$
y	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$

同样，若取直角三角形的三边为其他数值，例如取

$$a : b : c = 5 : 12 : 13, \text{或 } 7 : 24 : 25, 8 : 15 : 17, 9 : 40 : 41, \cdots$$

就得

$$\begin{cases} x = \frac{13}{12} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{25}{24} \\ y = \frac{25}{7} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{17}{15} \\ y = \frac{17}{8} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{41}{40} \\ y = \frac{41}{9} \end{cases}, \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

因此知道本题有理解答的组数是有无穷个之多.

注 显然 $x = y = 0$ 也是题中的一解.

❖代数式的系数

3. 试求下列两式中 x^6 的系数：

(1) $(1+x)^5 + (1+x)^6 + (1+x)^7 + \cdots + (1+x)^{15}$.

(2) $(1+x+x^2+x^3)^{10}$.

(提出人：山东莱阳迟树文及江苏兴化王顺祥)

解 (1) $(1+x)^5 + (1+x)^6 + (1+x)^7 + \cdots + (1+x)^{15}$

这是一个首项为 $(1+x)^5$，公比为 $(1+x)$ 的等比级数.

根据等比级数求和公式,这式的和

$$S=\frac{(1+x)^5[(1+x)^{11}-1]}{1+x-1}=\frac{1}{x}\cdot[(1+x)^{16}-(1+x)^5]$$

从这式看来,分母有 x,所以要得到 x^6 的系数,必须在分子中求出 x^7 的项,但这样的项只在 $(1+x)^{16}$ 的展开式中才有,它的系数是

$$C_{16}^7=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=11\ 440$$

所以 11 440 是所求展开式中含 x^6 的系数.

(2) 第一种解法. 首先求 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 展开后 x^6 的系数.

因为

$$(a+b+c+\cdots+k)^n=\sum\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots k!}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots k^k$$

所以

$$(1+x+x^2+x^3)^{10}=\frac{10!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}x^{\beta+2\gamma+\delta}$$

其中 $$\alpha+\beta+\gamma+\delta=10,\beta+2\gamma+3\delta=6.$$

在本题中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta=7,1,1,1$ 或 $8,0,0,2;7,0,3,0;4,6,0,0;6,3,0,1;6,2,2,0;5,4,1,0$.

所以所求系数为

$$\frac{10!}{7}+\frac{10!}{8!2!}+\frac{10!}{7!3!}+\frac{10!}{4!6!}+\frac{10!}{6!3!}+\frac{10!}{6!2!2!}+\frac{10!}{5!4!}=$$

$$720+45+120+210+840+1\ 260+1\ 260=4\ 455$$

第二种解法. $(1+x+x^2+x^3)^{10}=(x+1)^{10}=(x^2+1)^{10}$

$$(x+1)^{10}=1+C_{10}^1x+C_{10}^2x^2+C_{10}^3x^3+C_{10}^4x^4+C_{10}^5x^5+C_{10}^6x^6+\cdots+x^{10}$$

$$(x+1)^{10}=1+C_{10}^1x+C_{10}^2x^4+C_{10}^3x^6+\cdots+x^{20}$$

所以 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 展开式中 x^6 的系数为

$$C_{10}^6+C_{10}^1C_{10}^4+C_{10}^2C_{10}^2+C_{10}^3=210+2\ 100+2\ 025+120=4\ 455$$

❖分三角形

4. 在 $\triangle ABC$ 内有一个定点 P,过 P 作一条直线,把原三角形分做两部,使两者面积之差为极大,问该怎样分法?(提出人:上海 顾元承,张福才)

解 分析,设三角形的面积为 $\triangle$. 过 P 作直线,必分三角形为一个三角形及一个四边形,或两个都是三角形,设其中小的一部分面积为 s,另一部分的面

积为 △ - s，它们之差为 △ - 2s．由此知道当 s 为最小时，两部分面积之差即为最大．故若过 P 作直线，能构成一个最小三角形或一个最小四边形就够了．

在事实上，过 P 作直线，所构成的四边形绝不可能为最小面积，证明如下．

如图 6，设 FPF′ 为所求的直线．若 PF ⩾ PF′．作 BP 交 AC 于 B′．作 FB″ ∥ F′B′，交 BP 于 B″．因为 △PFB″ ∽ △PF′B′，所以

$$\triangle PFB'' : \triangle PF'B' = PF^2 : PF'^2$$

但 PF ⩾ PF′，所以 △PFB″ ⩾ △PF′B′，所以 $S_{四边形FBCF'}$ > △BCB′．

若 PF′ ⩾ PF．作 CP 交 AB 于 C′．同样可证 $S_{四边形FBCF'}$ > △CBC′．于是知道，过 P 作直线分 △ABC，绝不可能得一个四边形为最小面积，也只有得一个三角形为最小面积．

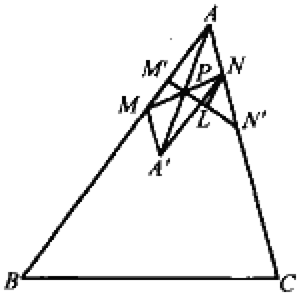


图 5

作法　如图 5，设 P 至 A，B，C 的距离中，以 PA 为最短，联结 PA，延长至 A′，使 PA′ = PA．作 A′M ∥ AC，A′N ∥ AB，分别交 AB，AC 于 M，N．联结 MN，即为所求．

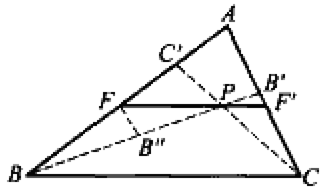


图 6

证明　因为 AMA′N 为平行四边形，P 为 AA′ 的中点，P 也必为 MN 的中点．设过 P 在作直线 M′N′，分别交 AB，AC 于 M′，N′．若 PN′ > PM′．在 PN′ 取 PL = PM′，连 NL，得 △PMM′ = △PNL，所以 △AMN = $S_{四边形AM'LN}$，所以 △AM′N > △AMN，所以 △AMN 是过 P 截取 ∠A 的最小三角形．于是

$$S_{四边形MBCN} - \triangle AMN = \triangle ABC - 2\triangle AMN$$

但因为 △AMN 为最小，所以 △ABC − 2△AMN 为最大，所以 MN 为所求．

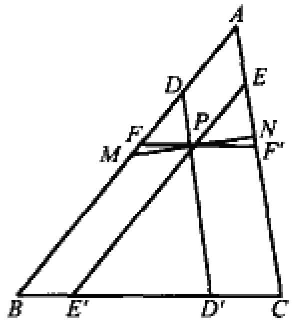


图 7

讨论　如图 7，因为 P 至 A，B，C 的距离中以 PA 为最短．过 P 作 DD′ ∥ AC，EE′ ∥ AB，FF′ ∥ BC．得三个平行四边形 PEAD，PE′BF，PD′CF′．在这三个四边形中，前二者是异底同高，得

$$S_{平行四边形PEAD} < S_{平行四边形PE'BF}$$

后二者也是异底同高，得

$$S_{平行四边形PEAD} < S_{平行四边形PF'CD'}$$

因此知道在这三个四边形中，以 $S_{平行四边形PEAD}$ 为最小．故在 AB 上截取

$$DM = DA$$

联结 MPN，即为所求. 在此时所得的解答只有一个.

若所作三个平行四边形中有两个相等，即 P 在三角形的一条中线上，那么所得解答就有两个.

若所作三个平行四边形都相等，即 P 为三角形的重心，如图 8，那么所得的解就有三个.

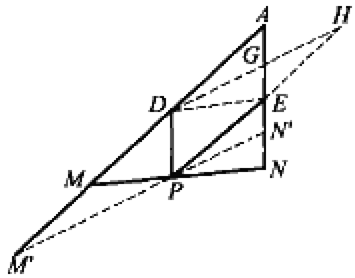


图 8

注 所作 $\triangle AMN$ 的面积

$$\triangle AMN = S_{平行四边形ADPE} + \triangle DMP + \triangle EPN = S_{平行四边形ADPE} + \triangle PED + \triangle ADE = 2S_{平行四边形ADPE}$$

过 P 任作直线 $M'P'N'$，所得三角形 $AM'N'$ 的面积

$$\triangle AM'N' = S_{平行四边形ADPE} + \triangle DM'P + \triangle EPN' = S_{平行四边形ADPE} + \triangle PHD + \triangle ADG = 2S_{平行四边形ADPE} + \triangle EHG$$

所以 $\triangle AMN < \triangle AM'N'$.

❖三角形性质

5. 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a,b,c. 求证：

(1) 当 $\cos A : \cos B = b : a$ 时，原三角形为二等边三角形或直角三角形.

(2) 当 $a\tan A + b\tan B = (a+b)\tan\frac{A+B}{2}$ 时，原三角形为二等边三角形.

（提出人：天津 解延年）

解法 1 (1) 因为 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a}$，又在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$，于是

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

即 $\sin 2A = \sin 2B$，即 $2\cos(A+B)\sin(A-B) = 0$.

当 $\sin(A-B) = 0$ 时，得 $A = B$，即原三角形为二等边三角形；

当 $\cos(A+B) = 0$ 时，得 $A + B = 90°$，即原三角形为直角三角形.

(2) $a\left(\tan A - \tan\frac{A+B}{2}\right) = b\left(\tan\frac{A+B}{2} - \tan B\right)$

$$\frac{a}{b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}-\tan B}{\tan A-\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}\cos B-\cos\frac{A+B}{2}\sin B}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B}}{\dfrac{\sin A\cos\frac{A+B}{2}-\cos A\sin\frac{A+B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}}=$$

$$\frac{\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B}}{\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}}=\frac{\cos A}{\cos B}$$

但$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$,于是$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$,所以 $a=b$,即原三角形为三等边三角形.

解法2 (1)
$$\cos A:\cos B=b:a$$

即
$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b:a$$

即
$$\frac{a}{b}(b^2+c^2-a^2)=\frac{b}{b}(a^2+c^2-b^2)$$

即
$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$$

即
$$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$$

即
$$(a^2-b^2)c^2=a^4-b^4$$

即
$$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$$

当 $a^2-b^2=0$ 时,得 $a=b$,所以原三角形为二等边三角形.

当 $c^2-a^2-b^2=0$ 时,得 $a^2+b^2=c^2$,所以原三角形为直角三角形.

(2)$a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$,即

$$\frac{a\sin A}{\cos A}+\frac{b\sin B}{\cos B}=\frac{(a+b)\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

即
$$\frac{a\sin A\cos B+b\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{a\sin\frac{A+B}{2}+b\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

即
$$a\cos B\left(\sin A\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\cos A\right)=$$

$$b\cos A\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos B-\sin B\cos\frac{A+B}{a}\right)$$

即
$$a\cos B\sin\left(A-\frac{A+B}{2}\right)=b\cos A\sin\left(\frac{A+B}{2}-B\right)$$

即
$$a\cos B\sin\frac{A-B}{2}=b\cos A\sin\frac{A-B}{2}$$

即
$$(a\cos B-b\cos A)\sin\frac{A-B}{2}=0$$

当$\sin\frac{A-B}{2}=0$时,得$A=B$,所以原三角形为二等边三角形.当$a\cos B-b\cos A=0$时,即

$$2R\sin A\cos B-2R\sin B\cos A=0(因为\ a=2R\sin A,b=2R\sin B)$$

即
$$2R\sin(A-B)=0$$

得$A=B$,所以原三角形为二等边三角形.

解法 3 (1)因为$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$,即$\sin A\cos B=\cos A\sin B$,即$\sin 2A=\sin 2B$.当$2A=2B$时,得$A=B$,即原三角形为二等边三角形.当$\sin(180^\circ-2A)=\sin 2B$时,得$A+B=90^\circ$,即原三角形为直角三角形.

(2)
$$a\left(\tan A-\tan\frac{A+B}{2}\right)=b\left(\tan\frac{A+B}{2}-\tan B\right)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}-\tan B}{\tan A-\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\dfrac{\sin\frac{A+B}{2}\cos B-\cos\frac{A+B}{2}\sin B}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B}}{\dfrac{\sin A\cos\frac{A+B}{2}-\cos A\sin\frac{A+B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}}=$$

$$\frac{\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos B}}{\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}}=\frac{\cos A}{\cos B}$$

但$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$,于是$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$,所以$a=b$,即原三角形为二等边三角形.

1957年12月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:胡习年,南京建筑学校江周数学研究小组.

解答第1,2,3,5题者:池体涛,上海南模中学高二(4)科学小组,张禄度,张君彦.

解答第1,2,4,5题者:上海徐汇中学高Ⅲ(3)数学小组.

解答第1,3,4,5题者:吴昭亮,上海中学58,478,南京十一中高三(二)数学小组,安徽师范$\alpha\beta\gamma$数学小组,陈非非,刘旭,张志达.

解答第2,3,4题者:上海四川中学高三(3)π小组,何泰来,武汉十四中高三(1)王李纪三人,黄海元.

解答第1,2,5题者:雷英果,上海东昌中学高三(6)班AKQJ数学小组.

解答第1,3,5题者:朱襄生,邹曼郎,刘宝志,徐道卿,四川三台中学姬骊莺数学爱好者,杨仲明,王华,武汉十四中高三(二)101118三人数学小组,方文德,方正域,汤志根,齐东旭,吉林中学温鹏翔亿人数学小组何澄浓,温涌源,石继斌,陆明时,吴明德,周国銮,张先觉,金嘉年.

解答第2,3,5题者:武汉三十三中高二(1)高斯数学小组,曹授伟,许履珑,许履瑚,张荣华,辘轲,广州三十八中高三(3)数学小组,邱仲英,黄兴治,胡绍宠,汤宝华,黄义珍,俞荣达,林祖燧,谢鸿女,河南汲县一中高三(4)祖冲之数学小组,朱伟清,郭达民,南京师范附中达达烈数学小组,徐自新,上海五十八中高三(二)数学小组,司徒英颐,上海文建中学高三(3)数学小组.

解答第2,4,5题者:江西泰和中学π数学小组.

解答第3,4,5题者:郑竹青,赵宝明,湖北孝感高中三(六)班π数学小组,江西吉安高中高三(3)高斯数学小组,潘其璪,江苏兴化中学π数学小组,沙炎孙,邱家禄,范秉椿,章正华,张方平,王普,陈仲锜,杨肇栋,南京三中高三(甲)爱因斯坦数理小组,王连庆.

解答第1,3题者:李学俭,杨大栋,倪慎非,徐树森,唐乐如,曾昭中,谢文炼.

解答第1,4题者:王相贤.解答第1,5题者:黄茂兴,刘平东,李明连,陆少华,方天英,徐燕椿,上海同济数学物理小组,杨明华,顾榕塘,刘立川,李友耕,潘福钟,潘福铨,于根兴,上海洋泾中学高三(4)数理化小组,陈欣高,曹永源,叶时爽,朱金洲,王德胜,陈涛年,郭士华,黄祖荫,陶醒民.

解答第2,5题者:宋景禄,孙厚军,许傅根,叶恭璇,杨康熙,浙江余姚一中

高二(2)1/π数学小组，吴富荪，雪雷，雷鸣，雪中，杨春益.

解答第3,4题者：李霞川，熊谟恭，江苏常州二中高三(1)数学小组，湖北实师37W数学兴趣小组.

解答第3,5题者：王炳云，北京百零一中高三(2)数学小组，江西丰城中学Ω数理小组，广州十七中高三(乙)数学爱好者，扬州新华中学高三(一)x^{20}，郭宝华，纪金蓝，陕西凤翔中学高三甲H.G.F.数学小组，王作妮，天津三中高三(1)C.D.E.数学组，王天龙，常州二中高三(1)朝阳数学小组，江苏如皋中学高三(三)M.И.小组，湖南沣县一中高十七班$m=xy$，福州四中αβγ数学小组，天津大学$\alpha\omega\theta$先生，刘鹤川，张力中，南昌五中四人小组，项宝珍，陈凤菊，宾敬，无锡五中数学小组，吉林九中93712，河南汲县一中高三(2)数学爱好者，梧州高中数学组等二百一十五件，姓名从略.

解答第1题者：王泽函，汤彬如，支煜根，上海向明中学高二(6)数学小组，刘琦，福建仙游师范数学组，任殿生，卢洪谦，金帛昌，孔祥恭，陈显威，邹七元，王金海，金嘉华，王禄堂，陈叔千，李鸿春.

解答第2题者：雷金泉，杜旭光，许炽雄，虞鑫钜，武汉三十三中高二(4)第三刘徽小组，上海新成中学高三(1)女子数学小组.

解答第3题者：天津师院附中男(58)班，郑州机器制造学校机化202班，上海六十九中蜻蜓小组，璩兴广，朱太亨，杨正，曾世融，北京师大附中高一(2)数学小组等百零五件，姓名从略.

解答第4题者：江苏川沙中学高三乙“文秀安国”数学小组，江苏师院数学系Triely数学小组，黑龙江省安达一中高一(1)数学小组，喻峻，彭刚忠.

解答第5题者：王一如，南京四中高三(1)数学小组，王凤宝，供红，曾中文，王世浩，郭二平，齐道人，山东烟台一中八级三班数学小组等二百四十四件，姓名从略.

1957年12月号小知识问题答案

❖割圆九式

1.项名达的"割圆九式"是怎样写法?(提出人:汉口 王普)

答 项名达(1789—1850)著象数一原(一名象数原始)第六卷,有"割圆九式"如下

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^2\cdot 4^2}-\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\cdots$$

$$\tan\alpha=\sin\alpha-T_1\frac{\sin^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\sin^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{6r^2}+\cdots$$

式中 T_1 为第一数,T_2 为第二数,以下同.

$$\cos\alpha=r+T_1\frac{\sin^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\sin^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{6r^2}+\cdots$$

$$\cos\alpha=r-\left(\frac{\sin^2\alpha}{2r}+T_1\frac{\sin^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{3\sin^2\alpha}{6r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{8r^2}+\cdots\right)$$

$$\cot\alpha=\frac{r^2}{\sin\alpha}-\left(\frac{\sin\alpha}{2}+T_1\frac{\sin^2\alpha}{4r^2}+T_2\frac{3\sin^2\alpha}{6r^2}+T_3\frac{5\sin^2\alpha}{8r^2}+\cdots\right)$$

$$\cot\alpha=\cos\alpha+T_1\frac{\cos^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\cos^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\cos^2\alpha}{6r^2}+\cdots$$

$$\cos\alpha=r+T_1\frac{\cos^2\alpha}{2r^2}+T_2\frac{3\cos^2\alpha}{4r^2}+T_3\frac{5\cos^2\alpha}{6r^2}+\cdots$$

$$\sin\alpha=r-\left(\frac{\cos^2\alpha}{2r}+T_1\frac{\cos^2\alpha}{4r^2}+T_2\frac{3\cos^2\alpha}{6r^2}+T_3\frac{5\cos^2\alpha}{8r^2}+\cdots\right)$$

$$\tan\alpha=\frac{r^2}{\cos\alpha}-\left(\frac{\cos\alpha}{2}+T_1\frac{\cos^2\alpha}{4r^2}+T_2\frac{3\cos^2\alpha}{6r^2}+T_3\frac{5\cos^2\alpha}{8r^2}+\cdots\right)$$

❖人造卫星

2.问人造卫星环绕地球需要多大的速度?又飞往月球需要多大的速度?各是怎样的算法?(提出人:沈阳 姚达惠)

答1 设人造卫星以地心为中心,作环形运动而不掉下来,它的质量为 m,和地心的距离为 r,速度为 V_r.

因人造卫星的离心力等于它对地球的向心力(但方向相反),即

$$\frac{mV_r^2}{r}=\frac{gmR^2}{r^2}$$

式中 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$,$R=$ 地球半径 $=6\ 370\ \mathrm{km}$.所以 $V_r=\sqrt{\frac{gR^2}{r}}$.

当人造卫星在地面的上空不远时,$R\approx r$,因此上式变为 $V_r=\sqrt{gR}$.求人造卫星环绕地球所需的速度是

$$V_r=\sqrt{9.8\times 6\ 370\ 000}=\sqrt{62\ 426\ 000}=7\ 901\ \mathrm{m/s}=7.9\ \mathrm{km/s}$$

又设人造卫星飞往月球的速度为 V.

因动能等于反抗地心引力所做的功,即

$$\frac{1}{2}mV^2=gmR$$

故人造卫星飞往月球所需的速度是

$$V=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times 9.8\times 6\ 370\ 000}=\sqrt{124\ 852\ 000}=$$
$$11\ 174\ \mathrm{m/s}=11.18\ \mathrm{km/s}$$

答2 设人造卫星环绕地球所需的离心力为 F.依公式 $F=\frac{mV^2}{r}$,式中 V 为卫星的速度,r 为地球半径(这里我们假定卫星轨道半径差不多等于地球半径).因卫星的重量,不但不应妨碍它绕地球做圆周运动,而且与它的向心力相等,但作用在卫星上的唯一的力量是它的重量,所以必须使 $F=\frac{mV^2}{r}=mg$.由此得到

$$V=\sqrt{gr}=7.9\ \mathrm{km/s}$$

实际上,卫星轨道半径较地球半径为大,故卫星的速度必须大于上述数据,即必须得到差不多 8 km/s 的速度.

设人造卫星飞往月球的速度为 V,那么卫星所具有的动能为 $E=\frac{mV^2}{2}$.

根据牛顿万有引力法则 $F=f\frac{Mm}{r^2}$,即两物体 M 与 m 相互的吸引力与它们质量的乘积成正比,而与它们间的距离之平方成反比.如果要使物体(卫星)脱离地球表面而飞向无穷远处,就需要对它做功,其数值为 $W=f\frac{Mm}{r}$(M 为地球的质量).因而 $\frac{mV^2}{2}=f\frac{Mm}{r}$,即

$$V^2 = \frac{2fM}{r} \qquad ①$$

但因为卫星位置在地球上的重量,就是它被吸向地球的力量,即

$$mg = f\frac{Mm}{r^2} \text{ 或 } f\frac{M}{r} = gr \qquad ②$$

解 ①,② 两式,得

$$V = \sqrt{2gr} = 11.2\ \text{km/s}.$$

所以卫星飞往月球所需要的速度为 11.2 km/s(但不计算空气的阻力).

❖吃西瓜

3. 有西瓜 n 个. 把第一个横竖各切一刀,把第二个横竖各切两刀,依此类推,把第 n 个横竖各切 n 刀. 问这些西瓜吃完后,剩下的瓜皮有多少块?(提出人:河北南宫　张延南)

答　本题依着不同的切法,剩瓜皮的块数也就不同. 现在举出两种不同的切法如下.

(1) 平面切法

如图 1,西瓜虽是椭球形,可把它看成是球形. 我们将它横竖地切开后,边缘部分每块只剩皮一块. 但中央部分却上下两面都有皮,所以每块应该剩皮两块. 因此得

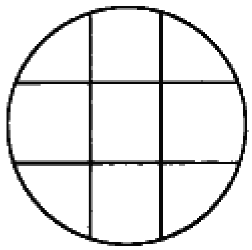


图 1

第 1 个西瓜剩皮的块数是 $2^2 = 4$,第 2 个西瓜剩皮的块数是 $3^2 + 1^2 = 10$,第 3 个西瓜剩皮的块数是 $4^2 + 2^2 = 20$,第 4 个西瓜剩皮的块数是 $5^2 + 3^2 = 34$,第 5 个西瓜剩皮的块数是 $6^2 + 4^2 = 52$,…,第 n 个西瓜剩皮的块数是

$$(n+1)^2 + (n-1)^2 = 2(n^2+1)$$

故剩下瓜皮的块数是

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n+1)^2 + [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2] =$$

$$[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2] + [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2] - 1 =$$

$$\frac{[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} + \frac{(n-1)[(n-1)+1][2(n+1)+1]}{6} - 1 =$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - 1 = \frac{n(2n^2+3n+7)}{3}$$

(2) 依照地球经纬线的切法

如图 2,第 1 个西瓜剩皮的块数是 $2(1^2+1) = 4$,第 2 个西瓜剩皮的块数是

$2(2^2+2)=12$，第 3 个西瓜剩皮的块数是 $2(3^2+3)=24$，…，第 n 个西瓜剩皮的块数是

$$2(n^2+n)=2n(n+1)$$

故剩下瓜皮的块数是

$$2[(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)]=$$
$$2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]=$$
$$2\left[\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}\right]=\frac{2n(n^2+3n+2)}{3}$$

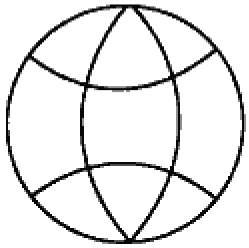


图 2

注　平面切法的另外两种解法如下.

(1) 第一个西瓜横竖各切一刀是 $(1+1)^2=4$ 块，第二个瓜横竖各切两刀是 $(2+1)^2=9$ 块，但因为中间的部分一块就是两块，即中间有 $(2-1)^2=1$ 块（2减1的1字是切两刀时生出边缘的一块）. 因此第二个西瓜，横竖各切两刀，就有 $(2+1)^2+(2-1)^2=10$ 块. 第三个西瓜横竖各切三刀是 $(3+1)^2=16$ 块，但中间有 $(3-1)^2=4$ 块，所以就有 $(3+1)^2+(3-1)^2=20$（块）. 以后依此类推，得到本题剩下西瓜皮的块数是

$$[(1+1)^2+(1-1)^2]+[(2+1)^2+(2-1)^2]+[(3+1)^2+$$
$$(3-1)^2]+\cdots+[(n+1)^2+(n-1)^2]=$$
$$2(1^2+1)+2(2^2+1)+2(3^2+1)+\cdots+2(n^2+1)=$$
$$2[(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+n]=$$
$$2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n\right]=\frac{n(2n^2+3n+7)}{3}$$

(2) 第一个西瓜切成 4 块（图 3）.

第二个西瓜横竖各切二刀，分成五部分（图 4）. 边缘四部分：$FAE=GBF=HCG=EDH$，有皮 $4\cdot 2$ 块，中间部分有皮 2 块，计有 $4\cdot 2+2$ 块.

第三个西瓜横竖各切三刀，同样地分成五部（图 5）. 边缘部分有皮 $4\cdot 3$ 块，中间部分有皮 $2\cdot 2^3$ 块. 以后依此类推，第 n 个西瓜横竖各切 n 刀，边缘部分有皮 $4n$ 块，中间部分有皮 $2(n-1)^2$ 块.

故剩下瓜皮的块数是

$$4(1+2+3+\cdots+n)+2[1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]=$$
$$2n(n+1)+\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}=\frac{n(2n^2+3n+7)}{3}$$

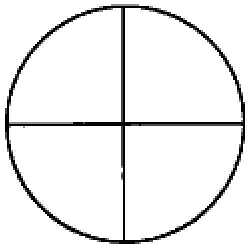


图 3

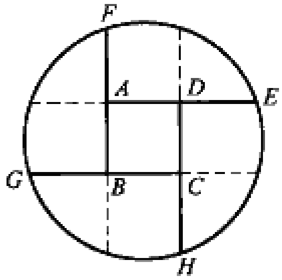


图 4

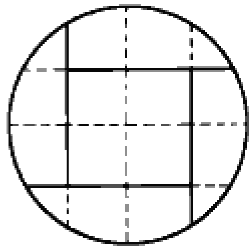


图 5

❖1 至 1 000 的整数

4. 取一个或若干个数目，用加号及减号把它们连起来，能够表示从 1 至 1 000 范围内任何一个整数，问这样的数目最少需要几个？并请写出这些数目来.（提出人：长沙 夏金凯）

答 所求的数是：首项为 1，公比为 3，项数为 7 的一个等比级数，即

$$1,3,9,27,81,243,729$$

因为

$$1=1,2=3-1,3=3,4=3+1,5=9-3-1$$
$$6=9-3,7=9-3+1,8=9-1,9=9,10=9+1$$
$$11=9+3-1,12=9+3,13=9+3+1,\cdots$$

所以数目 1 由第一项 1 取得. 数目 1，2，3，4 由第一，二两项 1，3 取得. 数目 1，2，3，…，13 由第 1 至第三项 $1,3,3^2$ 取得. 依此类推，数目 1，2，3，…，364 由第一至第六项 $1,3,3^2,\cdots,3^5$ 取得. 添上第七项 $3^6=729$，那么从 1 至 1 000 范围内任何一个整数都可以从这七项数取得了.

事实上，我们可以建立一个定理：n 个数 $1,3,3^2,\cdots,3^{n-1}$ 中一个或若干个，用加号及减号连起来，可以表示从 1 至 $S_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$ 中任何一个整数.

证 利用数学归纳法，当 $n=1$ 及 $n=2$ 时，定理真确.

设 $n=k$ 时，定理已证实，即利用 $1,3,3^2,\cdots,3^{n-1}$ 能够组成 1 至 $\dfrac{3^n-1}{2}$ 中任何一个整数，我们进一步考虑 $1,3,3^2,\cdots,3^n$.

由于 $1,3,3^2,\cdots,3^{n-1}$ 已假定能组成 1 至 $\dfrac{3^n-1}{2}$ 中任何一个整数. 我们把这

样所组成的每个数都加上 3^n. 于是从 $3^{n-1}+1$ 至 $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ 中任何一个整数也能利用 $1,3,3^2,\cdots,3^n$ 组成，所以本定理得证.

❖念数字

5. 把 n 个自然数从 1 到 n 写成"表 1". 今从左上角念起，到右下角为止，每次都须经过 $1,2,3,\cdots,n$ 诸数. 问共有多少种念法？又如将 n 自然数写成"表 2"共有多少种念法？(提出人：上海 徐孝舜)

答 (1)"表 1" 中的 n 必是奇数，令 $n=2k-1$，于是"表 1" 变为"表 1′".

从表 1′ 的左上角念起，向右方下方到达各个相应位置的念法种数，例如"表 1″".

表 1″ 的看法，例如第七行第五列的数字是 90，就是说在表 1′ 中从左上角的 1 字念起达到第七行第五列的数字 11 有 90 种念法. 其余类推.

设在左上角达到第 l 列第一字的念法种数为 $_1T_l$ 就得 $_1T_l=\frac{1}{l}C_{2(l-1)}^{l-1}$，式中 C_i^j 表示由 i 个物件中取 j 个的组合数. 应用这个公式在"表 1″" 中从左上角到各列第一字的念法种数分别为 $_1T_1={}_1T_2=1$，$_1T_3=2$，$_1T_4=5$，$_1T_5=14$，$_1T_6=42$，$_1T_7=132$，$_1T_8=429$.

表 1

1	2	3	4	5	6	7	8	…	…	$\frac{n+1}{2}$
	3	4	5	6	7	8	9	…	…	…
		5	6	7	8	9	10	…	…	…
			7	8	9	10	11	…	…	…
				9	10	11	12	…	…	…
					11	12	13	…	…	…
						13	14	…	…	…
							15	…	…	…
								…	…	…
									$n-2$	$n-1$
										n

表 1′

1	2	3	4	5	6	7	8	…	…	k
	3	4	5	6	7	8	9	…	…	$k+1$
		5	6	7	8	9	10	…	…	$k+2$
			7	8	9	10	11	…	…	…
				9	10	11	12	…	…	…
					11	12	13	…	…	…
						13	14	…	…	…
							15	…	…	…
									…	…
									$2k-3$	$2k-2$
										$2k-1$

表 1″

1	1	1	1	1	1	1	1	…	…	1
	1	2	3	4	5	6	7	…	…	…
		2	5	9	14	20	27	…	…	…
			5	14	28	48	75	…	…	…
				14	42	90	165	…	…	…
					42	132	297	…	…	…
						132	429	…	…	…
							429	…	…	…
								…	…	…
									$_1T_{l-1}$	…
										$_1T_l$

(2)“表 2” 的 n 是 3 的倍数加 1,令 $n=3k-2$,于是,“表 2” 变为“表 2′”. 达到表 2′ 中各个相应位置的念法种数是“表 2″”. 这里的 $_2T_l=\frac{1}{2l-1}C_{3(l-1)}^{l-1}$.

$$_2T_1=1, {}_2T_2=1, {}_2T_3=3, {}_2T_4=12, {}_2T_5=55, {}_2T_6=1\ 428$$

表 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	…	…	$\frac{2n+1}{3}$
		4	5	6	7	8	9	10	…	…	…	…
				7	8	9	10	11	…	…	…	…
						10	11	12	…	…	…	…
								13	…	…	…	…
									…	…	…	…
										$n-3$	$n-2$	$n-1$
												n

注:n 为 3 的倍数加 1

表 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	···	$2k-1$
		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	···	$2k$
				7	8	9	10	11	12	13	14	15	···	$2k+1$
						10	11	12	13	14	15	16	···	···
								13	14	15	16	17	···	···
										16	17	18	···	···
												19	···	···
													···	···
														$3k-2$

表 2′

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	···	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	···	···
				3	7	12	18	25	33	42	52	63	···	···
						12	30	55	88	130	182	245	···	···
								55	143	273	455	700	···	···
										273	728	1 428	···	···
												1 428	···	···
													···	···
														T_l

(3) 若从第二列以下的各列都退后三个字写起,例如表 3.

表 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	···	$3k-2$
			5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	···	$3k-1$
						9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	···	$3k$
									13	14	15	16	17	18	19	···	···
												17	18	19	20	···	···
															21	···	···
																···	···
																	$4k-3$

表 3 各相应位置的念法种数是"表 3′".

表 3′

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…	…
						4	9	15	22	30	39	49	60	72	85	…	…
									22	52	91	140	200	272	357	…	…
												140	340	612	969	…	…
															969	…	…
																…	…
																	$_3T_l$

这里的$_3T_l=\frac{1}{3l-2}C_{4(l-1)}^{l-1}$.

$$_3T_1=1,{}_3T_2=1,{}_3T_3=4,{}_3T_4=22,{}_3T_5=140,{}_3T_6=969$$

(4) 若从第二列以下的各列,都退后 m 个字写起,例如表 4.

表 4

1	2	3	…	$m+1$	$m+2$	$m+3$	…	$2m+1$	$2m+2$	$2m+3$	…	$(k-1)m+1$
				$m+2$	$m+3$	$m+4$	…	$2m+2$	$2m+3$	$2m+4$	…	$(k-1)m+2$
								$2m+3$	$2m+4$	$2m+5$	…	$(k-1)m+3$
											…	…
												$(m+1)k-m$

这里的$_mT_l=\frac{1}{ml-(m-1)}C_{(m+1)(l-1)}^{l-1}=\frac{1}{(l-1)m+1}C_{(m+1)(l-1)}^{l-1}$.

例如:用拉丁字母 26 个列成表 5.

表 5

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*
				f	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*
								k	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*
												p	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*
																u	*v*	*w*	*x*	*y*
																				z

在这表里 a 字的念法种数:$_4T_1=1$.

从 a 念到第二列 f 的念法种数:$_4T_2=\frac{1}{5}C_5^1=1$;

从 a 念到第三列 k 的念法种数：${}_4T_3 = \frac{1}{9}C_{10}^2 = 5$；

从 a 念到第四列 p 的念法种数：${}_4T_4 = \frac{1}{13}C_{15}^3 = 35$；

从 a 念到第五列 u 的念法种数：${}_4T_5 = \frac{1}{17}C_{20}^4 = 285$；

从 a 念到第六列 z 的念法种数：${}_4T_6 = \frac{1}{21}C_{25}^5 = 2\ 530$.

1957年12月号小知识解答者名单

解答第1,2,4题者:广东台山端芬中学尤拉数学组.

解答第1,2题者:童惠民.

解答第1,4题者:江苏兴化中学π数学小组.

解答第2,4题者:济南一中高二(3)课外研究小组,上海延安中学高三(3)海音数学小组,杨健柏,上海七宝中学高二(1)吴林数学小组,王掌发,倪非,张荣华,南京建筑学校江周数学研究小组,曹宏燕,安徽黄麓师范αβγ数学小组.

解答第2题者:张恒喜,姚惠中,任新如,周晨,施周,江西丰城中学Ω数理小组,王永仓,吴一心,建化,熊年年,丁育胜,仇福庭,宋成良,孙绍升,贺书富,王金海,常熟中学高二(5)s.y.k.数学兴趣小组,广西全县中学高二数学小组,黄彪,董玉锟,曾昭中,李倬,胡春风,李润生,上海同寿坊数学小组,明德,王明同,孔祥恭,龚华容,孙庆俊,李家庭,王永林,许炽雄,苗温永,虞鑫钷,王永求,安徽池州师范αβγ刘宗泽数学小组,蒋龙保,石根心,贾恪微,上海东昌中学祖冲之数学小组,福建晋江二中高二(4)数学爱好者.

解答第3题者:俞良中,盛幼君.

解答第4题者:上海五十四中陈君,王才经,欧阳崇珍,李汶才,何元卿,宋学龄,袁宏兴,喜明德,周迪生,秦伟德,陆培荣,上海复兴中学高二(1)萌芽数学小组,向大江,陈友村,孙守经,王孟之,杜芝,聂义勇,罗荣富,马永兴,金维栋,蔡嘉平,何金廷,上海蓬莱中学高三(1)狄建华数学分子团,张复兴,刘训金,喻畯,钱炜昌,朱太亨,何文杰,武昌实验中学高二(六)黎明与前进数学小组,孙志浩,安徽歙县中学高二“金星”数学小组,郑快帆,郑凯帆,龚肖光,施顶汉,上海陕北中学邵陆,熊谟恭,毛昆纯,南昌十一中高三(2)数学小组,宋祖和,金嘉华,徐育三,齐东旭,齐笑奢,何泰来,孙连权,邹桃元,青州都匀一中高二(1)数学研究小组,方文德,方正域,彭国基,陈衍爱,浙江余姚一中高二(2)数学小组,刘冬松,陈丽珍,姜重华,徐卓镛,北京师大附中高一(2)数学小组,江西泰和中学π数学小组.

1958年1月号小知识问题答案

❖数字奇性

1.“2 025”是一个奇趣的数,把它截成两段:“20”与“25”,相加后自乘,仍得回原数.问具有同样性质的,还有哪些奇趣的数字?(提出人:上海 森林木)

答 设四位数的前两位(千位,百位)为 x,后两位(十位,个位)为 y,依题意 $(x+y)^2=100x+y$,即

$$x^2-x(100-2y)+y(y-1)=0$$

于是

$$x=50-y\pm\sqrt{50^2-99y}$$

这里 $\sqrt{50^2-99y}$ 须为正整数,所以 y 只能为0,1和25.

当 $y=0$ 时,$x=0$ 或100;$y=1$ 时,$x=0$ 或98;$y=25$ 时,$x=20$ 或30.

所以 $$\begin{cases}x=20\\y=25\end{cases},\begin{cases}x=30\\y=25\end{cases},\begin{cases}x=98\\y=1\end{cases}$$

所以本题,除2 025外,还有3 025及9 801两数,即

$$(30+25)^2=(55)^2=3\ 025,(98+01)^2=(99)^2=9\ 801$$

注 (1)推广本题奇趣数字的性质,得两公式如下

$$[(2+4+6+\cdots+\overline{10^n-2})+(1+3+5+\cdots+\overline{10^n-1})]^2=(25\times10^{2n-2}-5\times10^{n-1})\times10^{2n}+25\times10^{2n-2} \quad ①$$

$$[(2+4+6+\cdots+10^n)+(1+3+5+\cdots+\overline{10^n-1})]^2=(25\times10^{2n-2}+5\times10^{n-1})\times10^{2n}+25\times10^{2n-2} \quad ②$$

在这两式中,当 $n=1$ 时,由①得

$$(20+25)^2=(45)^2=2\ 025$$

由②得

$$(30+25)^2=(55)^2=3\ 025$$

当 $n=2$ 时,由①得

$$(2\ 450+2\ 500)^2=(4\ 950)^2=24\ 502\ 500$$

由②得

$$(2\ 550+2\ 500)^2=(5\ 050)^2=25\ 502\ 500$$

当 $n=3$ 时,由 ① 得

$$(249\ 500+250\ 000)^2=(499\ 500)^2=249\ 500\ 250\ 000$$

由 ② 得

$$(250\ 500+250\ 000)^2=(500\ 500)^2=250\ 500\ 250\ 000$$

(2) 五位数的数字与六位数的数字,分成两段,具有同样性质的,有下面两个

$$(88+209)^2=(297)^2=88\ 209;(494+209)^2=(703)^2=494\ 209$$

(3) 任何偶数位的数字,分成两段,具有同样性质的,又有下面诸数

$$(8+1)^2=(10-1)^2=100-20+1=81$$

$$(98+01)^2=(100-1)^2=10\ 000-200+1=9\ 801$$

$$(998+001)^2=(1\ 000-1)^2=1\ 000\ 000-2\ 000+1=998\ 001$$

$$(9\ 998+0\ 001)^2=99\ 980\ 001,(99\ 998+00\ 001)^2=9\ 999\ 800\ 001$$

$$(\overbrace{999\cdots98}^{n个}+\overbrace{000\cdots01}^{n个})^2=\overbrace{999\cdots98}^{n个},\overbrace{000\cdots01}^{n个}$$

(4) 这类数还具有一个特性,它们的成立就是"成对"的.并且每对之数对于轴心都成"对称".其轴心为 5,50,500,5 000,… 诸数.

例如$(45)^2$与$(55)^2$是一对,其轴心为 50,得

$$50-5=45,50+5=55$$

$(99)^2$与$(01)^2$是一对,其轴心为 50,得

$$50+49=99,50-49=1$$

$(297)^2$与$(703)^2$是一对,其轴心为 500,得

$$500-203=297,500+203=703$$

$(4\ 950)^2$与$(5\ 050)^2$是一对,其轴心为 5 000,得

$$5\ 000-50=4\ 950,5\ 000+50=5\ 050$$

其余类推.又 $9^2=(8+1)^2$ 与 $1^2=(0+1)^2$ 也是一对,其轴心为 5,得 $5+4=9,5-4=1$.

❖对数与正余弦

2.请问:(1) 负数有没有"对数"存在?为什么?(2)"正弦"和"余弦"的绝对值是否大于 1?是什么道理?(提出人:昆明 吕艳华)

答 这两个问题,在实数范围内是无论如何不能理解的.

我们拿某一个负数的自然对数来看:写出 $\ln(-x)$ 或 $\ln(-x)$,式中 $x>0$.这式在实数范围内,根本就找不到这样一个数.因为 e 的任意实数次幂,都不能

是负数,所以我们对数函数的图象中,自变量 x 的范围根本就不允许是负数,甚至是0.即在图象中,从原点开始,向左方(即负的方向)去看,根本是没有实点.

再拿正弦,余弦的允许值范围来看:在角的实数范围内,它的绝对值根本就不可能大于1.我们知道正余弦等于1,已经是它们的最大值了.这一点,也很容易从它的函数图象中看出来.

但是在复数范围内,依赖于著名的圆函数与对数函数关系的欧拉公式,这两个问题是很容易解决的.讨论如下:

(1)我们如果要指出负数的对数 $\ln(-x)$ 存在,只需指出 $\ln(-1)$ 存在就可以了.因为 $\ln(-x)=\ln(-1)+\ln x$,式中 $x>0$.而这式右边的第二项是早已被理解的.

根据著名的欧拉公式:$e^{ix}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,令 $x=\pm(2k+1)\pi$(k 为自然数).代入上式,得

$$e^{\pm i(2k+1)\pi}=\cos(2k+1)\pi\pm \mathrm{i}\sin(2k+1)\pi=1$$

所以

$$\ln(-1)=0\pm \mathrm{i}(2k+1)\pi$$

由此可以看出 $\ln(-1)$ 在复数范围内是多值的.换句话说,"-1"的自然对数不只是一个0,并且有无穷个虚数都是它的对数.在这里也就看出,在复数范围内,任意负数的自然对数,都是多值函数.用式子表示

$$\ln(-x)=\ln x\pm \mathrm{i}(2k+1)\pi$$

至于改用一切数值为底,任意的负数是否有对数的问题,也是容易答复的.因为利用换底方法,我们很容易知道,在复数范围内,任意负数的对数都是存在的,都是有意义的.

同样,我们还可以证明,复数的对数仍然存在.只要看看欧拉公式本身,就已经告诉了这一点.因为 $\pm \mathrm{i}x=\ln(\cos x\pm \mathrm{i}\sin x)$,我们取 x 以实数,得 $\cos x$ 及 $\sin x$ 都是实数.而 $\cos x\pm \mathrm{i}\sin x$ 却是复数,由此知道复数的对数都是存在的.

从上面说来,更得到一个有趣的结果:正数的对数在复数范围内,也是多值函数.用式子表示

$$\ln(+x)=\ln x\pm \mathrm{i}(2k\pi),\ln(+1)=0\pm \mathrm{i}(2k\pi)$$

(2)① 复数角的正弦之绝对值,可能大于1.

根据欧拉公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

令 $\varphi=\arcsin z$,代入公式得

$$e^{\mathrm{i}\arcsin z}=\cos(\arcsin z)+\mathrm{i}\sin(\arcsin z)=\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z$$

于是

$$\arcsin z=-\mathrm{i}\ln(\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z)$$

所以

$$-z=+\sin[\mathrm{i}\ln(\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z)]$$

但复数的对数 $\ln(\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z)$ 是存在着某一复数.

由上面的等式,很明显地可以看出:在角度取复数范围内的值,正弦可取想象中任意的值,即复数角的正弦之绝对值可能大于1.因为,只要给上面等式右边的角度,以 $|z|>1$ 的复数,显然它的正弦之绝对值就大于1.

② 复数角的余弦之绝对值,也可能大于1.

根据欧拉公式:

$$e^{\mathrm{i}\psi}=\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi$$

令 $\psi=\arccos z$,代入后得

$$e^{\mathrm{i}\arccos z}=\cos(\arccos z)+\mathrm{i}\sin(\arccos z)=z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2}=z+\sqrt{z^2-1}$$

于是

$$\mathrm{i}\arccos z=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

所以

$$z=\cos[-\mathrm{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})]=\cos[\mathrm{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})]$$

很明显,给上面等式右边以复数的角度,可能使 $|z|>1$.这就是说,复数角的余弦之绝对值也可能大于1.

注 (1) 由公式 $\sin z=\dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$,$\cos z=\dfrac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}$,我们对这两式,若适当地选择复数 z 的值,可令 $|\sin z|>1$ 及 $|\cos z|>1$.

(2) 在球面三角术里,球面角的正弦及余弦可能大于1,也可能小于1.由下列公式可以看出

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos a$$

❖圆阵和五雄

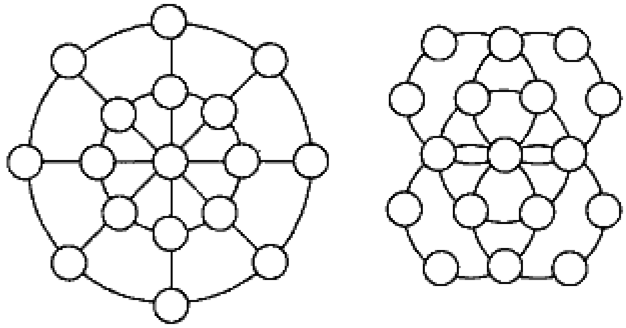
5.在图1中的(a)和(b)的小圈处,都用数码1,2,3,…,17填写,使(1)图1(a)中各条直径上诸数之和相等.(2)图1(b)中各圆周上诸数之和相等.问该怎样写法?(提出人:四川重庆 岳华及广西邕宁 王达勉)

答 (1) 写出几个图形如图2所示.

这些图形,不仅各条直径上数字之和相等,并且内外各圆周上数字之和亦相等,即当中心数字为1时,各周上数字之和等于76;中心数字为5时,各周上数字之和等于74;中心数字为9时,各周上数字之和等于72;中心数字为13时,各

周上数字之和等于 70;中心数字为 17 时,各周上数字之和等于 68.

这样摆成了同样坚固的内外两圈,叫做“铜墙铁壁的圆阵”.



(a) (b)

图 1

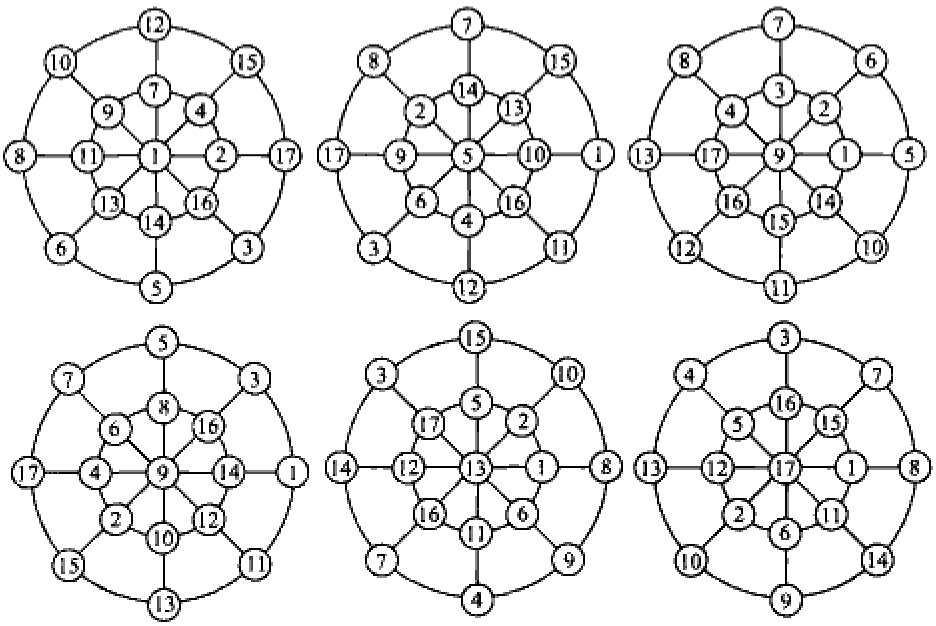


图 2

(2) 写出几个图形如图 3 所示.

这些图形,不仅各圆周上数字之和相等,并且四角上两数之和亦相等,即

$$1+17=2+16=3+15=4+14=5+13=6+12=7+11=8+10$$

这样构成了势均力敌的列强,叫做“各霸一方的五雄”.

上面的每个图形,各角上两数字可以交换,四个角有 $2^4=16$ 个交换法. 又四角互易位置有 $4!=24$ 个排列法. 因此就某一个图形来说,它的四角上八个数字虽然是固定的,但位置却不是固定的,而有 $8\times24=192$ 个排列法. 此外对于中心圆来说,还可以向上下翻转,向左右翻转,也就是有 4 个翻转法,故上面每

一个图形都可以有 $4\times192=768$(种) 填写法.

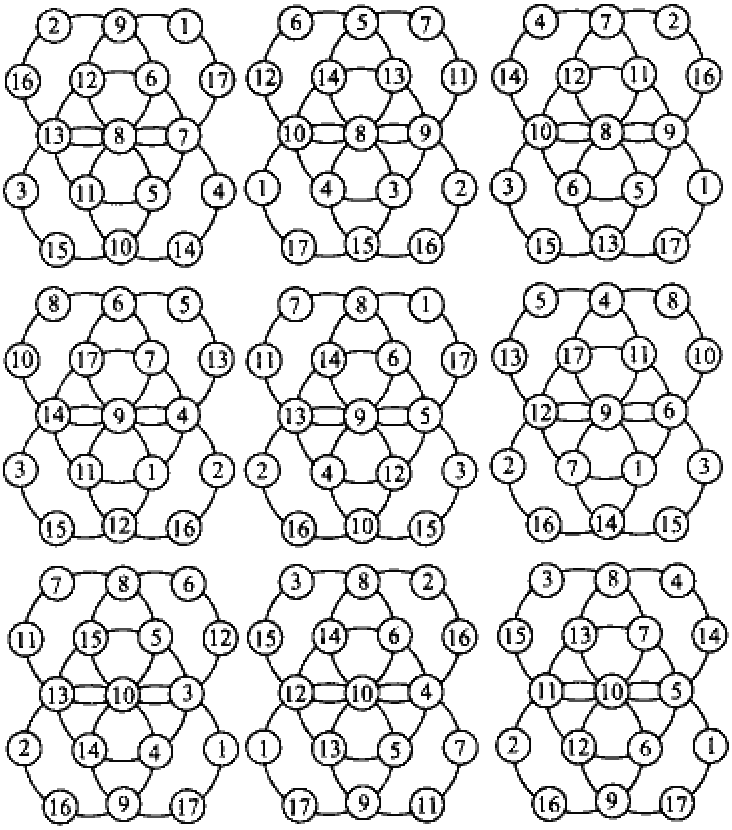


图 3

1958年1月号小知识解答者名单

解答第2题者:江苏常州三中高二乙璧.

解答第1,3题一部分者二百一十八件,姓名从略.

1958 年第 1 期问题解答

1. 任意三角形 ABC,点 E,F,G 分三角形三边成比例,即$\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{DB}=\frac{BF}{FA}=\frac{p}{q}$. $AD,BE;BE,CF;CF,AD$ 分别交于点 X,Y,Z(图 1(a)).

试证:$\triangle ABC,\triangle DEF,\triangle XYZ$ 的重心合一.(提出人:江苏师院 秦淦)

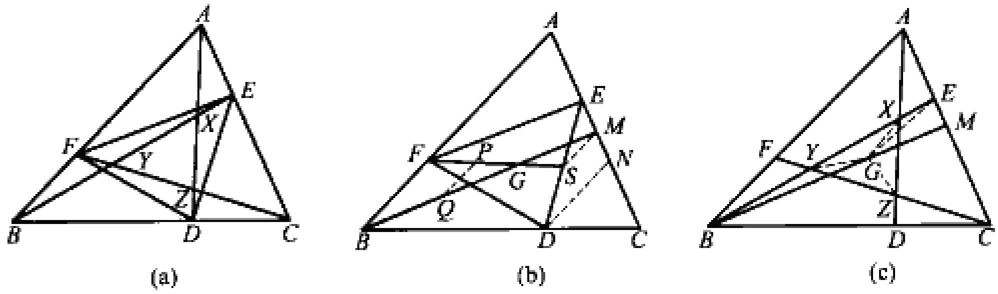


图 1

证　我们分两步来证明.

(1) 首先证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 重心合一.

设 $\triangle ABC$ 之一中线 BM 与 $\triangle DEF$ 之一中线 FS 交于点 G(图 1(b)),作 FG 与 BG 的中点连线 PQ,则有 $PQ \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}BF$.

联结 MS,并过点 D 作平行于 MS 的直线 DN,交 AC 于 N,我们有 $SM \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}DN$,并且 $EM=MN$,因此 $AE=NC$.

由已知条件,并利用 $AE=NC$ 这事实,有

$$\frac{DC}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{NC}{AC}=\frac{p}{p+q}$$

这说明 $DN \mathbin{/\!/} AB$,因此 $DN=\frac{p}{p+q}AB=BF$, $SM \underline{\mathbin{/\!/}} PQ$,所以

$$\triangle PGQ \cong \triangle SGM,PG=GS,QG=GM$$

由此得到

$$BG=2GM,FG=2GS$$

这就证明了 G 是 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ 的共同重心.

(2) 证明 G 同时是 $\triangle XYZ$ 的重心. 不失一般性,我们假设 $q>p$(图 1(c)). 根据截线定理

$$\frac{BY}{YE}\cdot\frac{AF}{BF}\cdot\frac{EC}{AC}=1$$

并利用已知条件,我们有

$$\frac{BY}{YE}=\frac{p(p+q)}{q^2}\text{或}\frac{BY}{BE}=\frac{p(p+q)}{q^2+p(p+q)}$$

可得

$$BY=\frac{p(p+q)}{q^2+p(p+q)}\cdot BE$$

完全类似的理由可得

$$EX=\frac{p^2}{p^2+p(p+q)}\cdot BE$$

因此

$$XY=BE-(EX+BY)=\frac{q^2-p^2}{p^2+pq+q^2}\cdot BE \quad ①$$

同理可得

$$XZ=\frac{q^2-p^2}{p^2+pq+q^2}\cdot AD;YZ=\frac{q^2-p^2}{p^2+pq+q^2}\cdot CF \quad ②$$

另一方面

$$ME=\frac{1}{2}AC-AE=\frac{1}{2}AC-\frac{p}{p+q}AC=\frac{q-p}{2(q+p)}\cdot AC \quad ③$$

因此

$$S_{\triangle BEM}=S_{\triangle ABC}\cdot\frac{q-p}{2(q+p)}$$

其中 $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积,由于 $\frac{2}{3}S_{\triangle BEM}=S_{\triangle BGE}$(因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心),且根据 ① 有

$$S_{\triangle XGY}=\frac{q^2-p^2}{p^2+pq+q^2}\cdot S_{\triangle BEM}=\frac{(q-p)^2(p+q)}{3(p+q)(q^2+pq+p^2)}S_{\triangle ABC}=\frac{(q-p)^2}{3(q^2+pq+p^2)}S_{\triangle ABC}$$

同理可得

$$S_{\triangle XGZ}=S_{\triangle ZGX}=\frac{(q-p)^2}{3(q^2+pq+p^2)}S_{\triangle ABC}$$

$\triangle XGY$,$\triangle YGZ$ 和 $\triangle ZGX$ 等积说明了 G 是 $\triangle XYZ$ 的重心.

2. 如图 2,过圆直径 AB 上一点 C 作一弦 PQ,BP 与 BQ 的延长线交过 A 点之切线于 X,Y,则 $AX\cdot AY$ 为一定值.(提出人:河南汲县一中高三(4) 祖冲之数学小组)

证 过点 C,作平行于 XY 直线 MN,交 BX,BY 于 N,M,并联结 AP. 我们有 $MN\perp AB$. 因此

$$\angle CMQ = 90^\circ - \angle ABQ$$

注意到 $\angle APB$ 是直角，及 $\angle APQ = \angle ABQ$，就有

$$\angle CPN = 90^\circ - \angle APQ = 90^\circ - \angle ABQ$$

所以

$$\angle CMQ = \angle CPN$$

同时由对顶角相等关系，可以知道

$$\triangle CMQ \backsim \triangle CPN$$

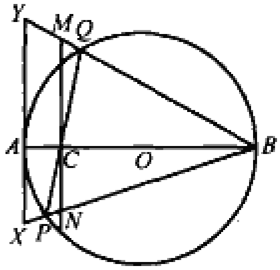


图 2

所以有

$$\frac{CP}{CM} = \frac{CN}{CQ} \text{ 或 } CM \cdot CN = CP \cdot CQ \qquad ①$$

考虑 $\triangle ABY$ 及 $\triangle ABX$，由于 $MN \parallel XY$，即得

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AY}{CM} \quad 及 \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AX}{CN}$$

左右项分别相乘得

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{AX \cdot AY}{CM \cdot CN}$$

根据 ① 及 $CP \cdot CQ = AC \cdot BC$ 这等式我们得到

$$AX \cdot AY = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} \cdot CP \cdot CQ = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} \cdot AC \cdot BC = \overline{AB}^2 \cdot \frac{AC}{BC}$$

是为定值，命题证完.

3. 证明：在直角三角形内 $0.4 < \frac{r}{h_c} < 0.5$，其中 r 为内切圆半径，h_c 为斜边上的高.（提出人：天津师院 解延年）

证 如图 3，由于 $\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c = r \cdot S$$

其中 c 为斜边长，S 为三角形周长之半，因此有

$$\frac{r}{h_c} = \frac{c}{2S} = \frac{c}{a + b + c}$$

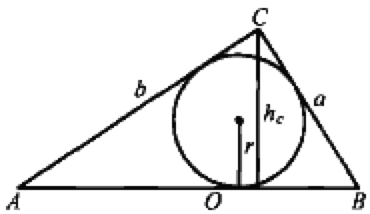


图 3

因为三角形的两边和大于第三边，故有 $a + b > c$，即得

$$\frac{r}{h_c} = \frac{c}{a + b + c} < \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} = 0.5$$

另一方面，在直角三角形中

$$a = c\sin A, b = c\sin B$$

所以

$$\frac{r}{h_c}=\frac{c}{a+b+c}=\frac{1}{1+\sin A+\sin B}=\frac{1}{1+2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}} \qquad ①$$

注意到 $A+B=90°$ 及 $|\cos\theta|\leqslant 1$，分母

$$1+2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2}=1+\sqrt{2}\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 1+\sqrt{2}$$

代入式 ①，并利用 $2+2\sqrt{2}<5$ 的事实得

$$\frac{r}{h_c}\geqslant\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{2}{2+2\sqrt{2}}>\frac{2}{5}=0.4$$

所以

$$0.4<\frac{r}{h_c}<0.5$$

4. 证明三数 $m_1=\frac{a+b}{a-b}$；$m_2=\frac{c+d}{c-d}$；$m_3=\frac{ac-bd}{ad+bc}$ 满足以下关系式：

$$m_1+m_2+m_3=m_1m_2m_3$$

（四川大学田景黄选自苏联“数学教学”）

证　设 $\frac{b}{a}=\tan\alpha$，$\frac{d}{c}=\tan\beta$，我们有

$$m_1=\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan(45°+\alpha)$$

$$m_2=\frac{c+d}{c-d}=\frac{1+\frac{d}{c}}{1-\frac{d}{c}}=\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=\tan(45°+\beta)$$

$$m_3=\frac{ac-bd}{ad+bc}=\frac{1-\frac{bd}{ac}}{\frac{c}{d}+\frac{b}{a}}=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\cot(\alpha+\beta)=\tan[90°-(\alpha+\beta)]$$

因为

$$(45°+\alpha)+(45°+\beta)+[90°-(\alpha+\beta)]=180°$$

所以我们有

$$\tan(45°+\alpha)+\tan(45°+\beta)+\tan[90°-(\alpha-\beta)]=$$
$$\tan(45°+\alpha)\cdot\tan(45°+\beta)\cdot\tan[90°-(\alpha+\beta)]$$

即

$$m_1+m_2+m_3=m_1\cdot m_2\cdot m_3$$

直接运算也可得到我们的结论.

5. 设 n 为奇数，证明下式中 p 是整数

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=p\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$$

（提出人：浙江师院 吴泽藩）

证 由

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

及

$$\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2n+1}-\frac{n(n-1)}{2n-1}\right]$$

我们有

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-0+\frac{6}{5}-\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2n+1}-\frac{n(n-1)}{2n-1}\right]=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

由题设可得

$$\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}=p\frac{n}{2n+1},\text{即 } p=\frac{n+1}{2}$$

因为 n 是奇数，所以 p 是整数.

6. 证明下列不等式

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)}\geqslant$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{ad}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$$

其中 a,b,c,d 同号.（石水选自苏联“数学教学”）

证 利用不等式 $ac+bd\geqslant 2\sqrt{abcd}$，我们有

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd\geqslant bc+ad+2\sqrt{abcd}=(\sqrt{bc}+\sqrt{cd})^2$$

由此得到

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}\geqslant\sqrt{bc}+\sqrt{ad} \quad ①$$

用同样的方法可得

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \quad ②$$

及

$$\sqrt{(a+d)(b+c)} \geqslant \sqrt{ac}+\sqrt{bd} \qquad ③$$

①② 和 ③ 相加即得

$$\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)} \geqslant$$
$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号才成立.

7.已知 a,b,c 成等比级数且 $\log_c a,\log_b c,\log_a b$ 成等差级数,试求后者的公差.(提出人:上海同济中学 周伟民)

解 根据已知条件我们有 $b^2=ac$.两边取以 b 为底的对数可得

$$\log_b a+\log_b c=2 \text{ 或 } \log_b a=2-\log_b c \qquad ①$$

设所求公差为 d,根据 ① 我们有

$$d=\log_b c-\log_c a=\log_b c-\frac{\log_b a}{\log_b c}=\frac{(\log_b c)^2-\log_b a}{\log_b c}=$$
$$\frac{(\log_b c)^2-(2-\log_b c)}{\log_b c}=\frac{(\log_b c)^2+\log_b c-2}{\log_b c} \qquad ②$$

因为 $\log_c a,\log_b c,\log_a b$ 成等差级数,故

$$2\log_b c=\log_c a+\log_a b=\frac{\log_b a}{\log_b c}+\frac{1}{\log_b a}=\frac{(\log_b a)^2+\log_b c}{\log_b c\log_b a}$$

或

$$2(\log_b c)^2\log_b a=(\log_b a)^2+\log_b c \qquad ③$$

将式 ① 代入式 ③ 可得

$$2(\log_b c)^2(2-\log_b c)=(2-\log_b c)^2+\log_b c$$
$$2(\log_b c)^3-3(\log_b c)^2-3\log_b c+4=0$$

解之可得

$$\log_b c=1,\log_b c=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4} \qquad ④$$

将 ④ 代入 ② 得

当 $\log_b c=1$ 时,$d=0$ 这仅当 $a=b=c$ 时成立;

当 $\log_b c=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$ 时,$d=\frac{3}{2}$.

8.解方程

$$4(\sin^{20}x+\cos^{20}x)+(\sin^4x+\cos^4x)^3\cdot[2\sin^4x\cos^4x-3(\sin^8x+\cos^8x)]=0$$

解 由原方程直接可以知道 $\cos x\neq 0$,故以 $\cos^{20}x$ 除原方程得

$$4(\tan^{20}x+1)+(\tan^4x+1)^3[2\tan^4x-3(\tan^8x+1)]=0$$

令 $\tan^4x=y$,则上式变成

$$4(y^5+1)+(y+1)^3[2y-3(y^2+1)]=0$$

以 $y+1$ 除上式(因为 $y>0$,故 $y+1\neq 0$)并整理可得

$$y^4-8y^3+2y^2-8y+1=0$$

$$(y^2+1)(y^2-8y+1)=0$$

由于 $y^2+1>0$,故有 $y^2-8y+1=0$,解之得

$$y=4\pm\sqrt{15},\text{即 } \tan x=\sqrt[4]{4\pm\sqrt{15}}$$

因此得到

$$x=\arctan\sqrt[4]{4\pm\sqrt{15}}$$

1958年第1期问题解答者姓名

解出第1,2,3,4,5,6,7,8题者:陈非非,何泰来,李师正,钱未末,郡黎康,夏永绵.

解出第1,2,3,4,5,6,7题者:钱立业,郑快帆,郑凯帆,江浩,秦大壮,求时,纪国荫.

解出第1,2,3,4,5,6,8题朱襄生,雷华英.

解出第1,2,3,4,5,7,8题黄水源.

解出第1,2,3,4,6,7,8题者:苏玉田.

解出第1,2,3,5,6,7,8题者:宋明章.

解出第2,3,4,5,6,7,8题者:陈尤昊,李关德,许傅根,上海市文建中学高三(3)数学小组,江西黎和中学高三(1)π数学小组,何鸿桐.

解出第1,2,3,4,5,7题者:胡长庚,纪荣钦.

解出第1,3,4,5,6,7题者:武汉三十三中高二(一)高斯数学小组.

解出第2,3,4,5,6,7题者:江苏岷山中学高二乙χ,ψ,ω数学小组,钱贻策,狄建华,柴承尧,昌哲明,余成,王守志.

解出第2,3,4,5,6,8题者:上海吴淞路616弄号数理爱好者,邹志鸿,陈心钜,朱悲行.

解出第2,3,4,5,6题者:余新河,张书文.

解出第2,3,4,5,7题者:何俊若.

解出第2,3,4,6,7题者:关嘉峪,张连第,毛尚精.

解出第3,4,5,6,8题者:韩讯.

解出第1,4,5,6题者:谢文炼.

解出第2,3,4,5题者:李进宝,天津十九中高三(一)Δl数学小组,武汉十四中高二(六)三人数理小组.

解出第2,3,4,6题者:江礼伦,沈成春.

解出第2,3,5,7题者:包宏斗.

解出第2,3,5,7题者:上海市东中学高二(六)$\sin\frac{\pi}{2}$数学小组.

解出第2,4,5,6题者:李可丰.

解出第3,4,5,6题者:谢毓祥,庄中云,江苏常州二中高三(一)朝阳数学小组,池体涛.

解出第3,4,5,7题者:唐翘健.

解出第3,4,6,7题者:符正吾.

解出第3,4,6,8题者:上海敬业中学高三(5)沈济华数学小组.

解出第4,5,6,7题者:杨桢固.

解出第1,3,4题者:黄金梅,孙觉,刘宗泽.

解出第2,3,4题者:上海敬业中学高二(4)αβγ数学小组,吉林市一高中53,3班30号,杨占衡,长春十二高中二年(六)∞数学小组,天津十六中高三(三)数学小组.

解出第2,3,5题者:邹天祥,段骏书.

解出第2,4,6题者:戴家英.

解出第3,4,5题者:河南汲县一中高三(4)祖冲之数学小组,施清苑,丁雍序,叶大年,郑鸿林,沈阳铁西区北四路小学一读者.

解出第3,4,6题者:涂光铎,王金汉,王世瑛,巴汉杰.

解出第3,5,6题者:武汉三十三中高二(三)裴蜀数学小组.

解出第4,5,6题者:杜森田,粟增.

解出第4,5,7题者:许贤定,任德祥,谢善孙.

解出第4,6,8题者:马国欢.

解出第5,6,7题者:文国礼.

解出第2,4题者:张远耀,朱报佑,邹志冈,吴国新.

解出第2,6题者:朱永作.

解出第3,4题者:晋中二中高二(4)数学爱好者,毛盖国,陈成去,杜志毅,张筱琴,安徽濉溪中学欧拉数学小组.

解出第3,5题者:刘玉璧.

解出第3,7题者:许金奎.

解出第4,5题者:甘家炎,梅祥富,陈志才,洪楠.

解出第4,6题者:程龙,湖北沔阳沙湖镇苏章数学小组,郝长城.

解出第4,7题者:王普,潘明东,熊松年,徐智周.

解出第2题者:跃进.

解出第3题者:张华民.

解出第5题者:陈建恕,祖德硕,上海南洋模范中学高二(x)$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$数学物理小组,周天一,杨玉庆,李太林,南安国光中学高二(3)31号,汤彬如,黄种池.

解出第4题;黄振元,黄西恩.

1958 年 1 月号问题

1.设 $n,k,a+1$ 为三个正整数,不全为奇数.试将

$$\sum_{i=0}^{k}(n+ai)^3$$

表成二整数的平方差.

解 我们有

$$\sum_{i=0}^{k}(n+ai)^3=(k+1)n^3+3n^2a\binom{k+1}{2}+\frac{na^2k(2k+1)(k+1)}{2}+a^3\binom{k+1}{2}^2=\left[n(k+1)+\binom{k+1}{2}a\right]\left[\binom{n+ak+1}{2}+\binom{n}{2}+k\binom{a}{2}\right]$$

令第一因子为 $p-q$,第二因子为 $p+q$,得

$$p=\binom{n+1}{2}+\frac{nk(a+1)}{2}+\binom{a+1}{2}\left(\frac{k+1}{2}\right)$$

$$q=\binom{n}{2}+\frac{nk(a-1)}{2}+\binom{a}{2}\binom{k+1}{2}$$

因为 $n,k,a+1$ 不全为奇数,可知 p 和 q 整数,而

$$\sum_{i=0}^{k}(n+ai)^3=p^2-q^2$$

2.设 a,b,c 为三角形之三边,$S=\frac{a+b+c}{2}$,$S^2=2ab$.

试证:(1)$S<2a$,$S<2b$;(2)$a>c$,$b>c$.

证 (1)因为 a,b,c 为三角形三边,故 $a+c>b$.由此知 $2S>2b$,即 $S>b$;因此 $S^2>Sb$,即 $2ab>Sb$,故 $2a>S$;同理可得 $2b>S$.

(2)由 $2a>S$ 及 $a+c>b$,我们有

$$2a>\frac{a+b+c}{2}>\frac{b+b}{2}=b$$

因此 $(2a-b)^2>0$,两端加上 $8ab$ 有 $(2a+b)^2>8ab$.而 $8ab=4S^2=(a+b+c)^2$,于是

$$(2a+b)^2>(a+b+c)^2$$

故得

$$2a+b>a+b+c$$

即 $a > c$,同理可得 $b > c$.

3.先使甲、乙、丙、丁四人按前后顺序站立,从三个红帽,二个黄帽,一个蓝帽中取出四顶帽子来,分别给甲、乙、丙、丁四人戴上.于是丁只能看到甲、乙、丙三人所戴帽子的颜色,丙只能看到甲、乙二人所戴的帽子,乙只能看到甲所戴的帽子,每人都看不见自己所戴的帽子.假如丁先说不知道自己戴的是什么色的帽子,然后丙也说不知道自己戴的是什么色的帽子,然后乙也说不知道自己戴的是什么色的帽子,最后甲说出了自己所戴帽子的颜色.试问甲戴的是什么颜色的帽子?他是怎样推知的?

答 甲戴的帽子是红色的,他是如下推知的.

甲先听丁说不知道自己所戴帽子的颜色,可以断定甲、乙、丙三人中至少有一人戴红帽子(否则甲、乙、丙戴的是两顶黄帽、一顶蓝帽,丁会知道他自己戴的是红帽).然后甲又听乙说也不知道自己所戴帽子的颜色,便更进一步断定甲、乙二人中至少有一人戴红帽子(否则,丙在听到丁的发言后,又看到甲、乙二人都不戴红帽子,会知道自己戴的是红帽子).其后甲又听乙说也不知道自己所戴帽子的颜色,终于断定自己必定戴的是红帽(否则,乙在听到丁和丙的相继发言后,又看到甲不戴红帽子,会知道自己戴的是红帽子).

4.设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,联 AI, BI, CI 各交 BC, CA, AB 于 D, E, F,并设 L, M, N 各是 AD, BE, CF 的中点.若 $\angle A < \angle B < \angle C$,求证:$IL > IM > IN$.

证 因为

$$\frac{IA}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}=\frac{AB+AC}{BC}>1$$

所以 $IA > ID$,因此 $IL=\frac{1}{2}(IA-ID)$.同理

$$IM=\frac{1}{2}(IB-IE),IN=\frac{1}{2}(IC-IF)$$

因为 $\angle IBA > \angle IAB$,所以 $IA > IB$.

已知 $ID < IE$,所以 $IA - ID > IB - IE$,所以 $IL > IM$.

又 $\frac{IB}{IE}=\frac{a+c}{b}$,$\frac{IC}{IF}=\frac{a+b}{c}$,且因为 $b < c$,所以

$$\frac{a+c}{b}>\frac{a+b}{c},即\frac{IB}{IE}>\frac{IC}{IF}$$

所以 $\frac{IB-IE}{IE}>\frac{IC-IF}{IF}$.

已知 $IE > IF$,所以

$$IB-IE>IC-IF$$

因此 $IM > IN$,所以 $IL > IM > IN$.

1958 年 1 月号解答者名单

解出 2 题者：吕哲明，余春熔，贾凤鸣，梅林周，黄淑镖，沈克庆，陈锡煌等，苗根，陈吕庆等，陈林垣，邹邦仇，林朝先，王光荣，朱奇，郭癸卯，符家播，金昌熙，曹雄，沈时彬，吕大心，沈阳三十五中高十一、二同学，刘德欣，汪绪元，刘正旗等，刘桂元，陈震，郑吕胜，潘明东，朱宾，朱昌平等，高炳林，虹霞，沈其强，杨振南，谭鹤良，陆吾生，夏卫民，李德山，牟光宇，张大茂，薛养金，王世林，叶梅林，杨维宝等，汪彼得，陈心钜，陈炳正，刘玉林，王天寿，雷在璧等，吴一心，赵维英，周宗泉，曾建中，赵鸿钧，徐炘生，睦南，张聘经，上海同济中学高三(3) $a+bi$ 数学小组，沈有明，倪乃民，张弦，张恒喜，张素林等，吴林森，黄子铮，江西吉安高三(3) 高斯数学小组，陈洪侠，秦恩林，蒋大为，王祥弟，郭裔傅，甘文照，黎自安，陈鹤年，王胜等.

解出 3 题者：超过 100 人不一一登名.

解出 4 题者：石忠琳，蒲思立，项思明，伊燕翔，杨正，冯汝明，雷鸣春，志回，陈国康，张延龄，沈复初，喜明德，谈正琨，于涤尘.

解出 2,4 题者：吕伟杰，林一星，伏虎，宋福曜，周晨，杨泽良，贺祖蔚，张树芬，李忠源，宋秉炜，施君威，石文善，江礼伦，牛宗考，吴远源，刘再进，陈维周，魏昌炽，张振鑫，林朝光，杜志毅与张筱琴，郑金福与吴锦鸢，黄述谷，吉林市一高中 56,3 班 30 号，浙江余姚一中高二(2) $\frac{1}{\pi}$ 数学小组，上海市 67 中高二(1) 班数学爱好者.

解出 2,3 题者：刘开绩，王士铨，邬文俊，单守信，郭光朴，杨卓清，柳峰，张庙康，杨傅林，胡万涵，谢英乐，王盛基，徐岳，郁槐明，杨承恩，邹中桂，徐埭贤，王福定，蒋岚瑞，赵铁林，张祖腾，钟贞一，赵近等，齐东旭，郑万嵩，钟联炯，李生沂，欧阳崇珍，唐功齐，李师正，殷龙彪，张镛清，丰烜解，许训民，杨明安，钱树珊，霍元素，张宏志，钟坤元，魏永祥，李秀兰，陈书文，王正元，陶气，方瑰，蔡体常，王华杰，李淳，牟宪文，刘春泉，费栋宇，邵黎康，林之乔，季鼎祥，邹怀震，李国球，丁士昭与周朗，姚典与张学文，刘永才石名峰萧马成，刘大本，苗长明，湖南师院附中爱因斯坦数学小组，扬州铁中 15 班 43 号，南京十一中高三二数学小组，河南汲县一中高三(四) 祖冲之数学小组. 李国有、鲁祥兴，上海同济中学无名小组，陈万明，孙开令，罗寻岷，广州市沙河小学，江西萍乡高中三乙数学小组，广州第八中学高三(3) 杨辉数学小组，李桂香，吴继昌，上海蓬莱中学高三(1) 狄建华数学分子团，姜嘉陵，胡嗣训.

解出3,4题者:胡敦友,范秉椿,高镇水,马合元,丛汲泉,牟丙伦.

解出1,2题者:王肇新,邓快帆,邓凯帆.

解出2,3,4题者:无名氏,沈伟,汪尧昌,陈霖嵩,陈振华,王宏彰,李汉光,李承之,邬祖炎,熊漠恭,胡加康,戴静安,陆少华,王俞,熊福祥,李炯,刘彰祥,张存谦,孟凡成,梅开仁,杨占衡,潘瑞征,金成梁,吕文彬,钱文衡,王德洪,洪毅,史常营,杨建中,熊道庵,唐世玮,邹庆明,温涌源,马建敏,杨确,马希华,徐大栋夏孝勇,张馥臣等,上海市建平中学无名氏,又上海市建平中学无名氏,北京101中高二(4)数学小组,江苏无锡二十中高三(乙)数学小组,上海58中高三(二)数学小组,江苏扬州中学高三(八)五人小组,杨永清,陆文镕,杨琪,张美超,杭州一中高三(4)数学学习小组,刘戟门,吴龙.

解出1,3,4题者:赵源.

解出1,2,4题者:孙沅.

解出1,2,3题者:刘延良.

解出1,2,3,4题者:吴江舫,何泰来,桂永和,马恒,蒋声,罗善成,印仲英,唐宗寿,周永良,周惠德,台州中学高三(8)祖冲之数学小组.

1958年2月号征解问题答案

❖照相

1.五个人并排照相，当他们坐好了之后，照相师又请他们调换一下座位，并且请他们都不要坐在原来的座位上，问他们可以有多少种不同的方法重新坐好?(提出人:山东蓬莱 李钟春，孙应运)

解法1 设 a,b,c,d,e 为五个人，A,B,C,D,E 为原来他们依次的座位，Z_5 表示个人的重新坐法种数，Z_4 表示4个人的重新坐法数，Z_3 表示3个人的重新坐法种数……

当 a 在 B 时，有下列两种情形:

(1)a 在 B 且 b 在 A 时，还剩下有3个人和3个位子，故其重新坐法种数是 Z_3.

(2)a 在 B 但 b 不在 A 时，其重新坐法种数是 Z_4.

结合这两种情形，知道 a 在 B 时有重新坐法(Z_4+Z_3)种.

同理，a 在 C,D,E 时都各有坐法(Z_4+Z_3)种.所以 $Z_5=4(Z_4+Z_3)$.

依此，$Z_4=3(Z_3+Z_2)$，$Z_3=2(Z_2+Z_1)$.显然 $Z_1=0$，$Z_2=1$，所以 $Z_3=2$.同样得 $Z_4=9$，$Z_5=44$.故本题的答案:他们有不同的重新坐法 $Z_5=44$ 种.

注 (1)题中5人如换为 n 人，得一般的公式

$$Z_n=(n-1)(Z_{n-1}+Z_{n-2})$$

(2)开始几个 Z_n 的值，列表1.

表1

Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8
0	1	2	9	44	265	1 854	14 833

解法2 设五人 a,b,c,d,e 原来坐在 A,B,C,D,E 位上.Z_n 表示 n 个重新坐法的种数，列表2.

表2

五人坐法		四人坐法		三人坐法	
五人在原位	1种	四人在原位	1	三人在原位	1
四人在原位	0	三人在原位	0	二人在原位	0
三人在原位	${}_5C_3=10$	二人在原位	${}_4C_2=6$	一人在原位	${}_3C_1=3$
二人在原位	${}_5C_2Z_3=20$	一人在原位	${}_4C_1Z_3=8$		
一人在原位	${}_5C_1Z_4=45$				

在二人坐法中，二人都不在原位的坐法种数是 $Z_2=1$.

在三人坐法中，三人都不在原位的坐法种数是

$$Z_3=P_3-(1+0+{}_3C_1)=3!-(1+3)=2$$

在四人坐法中，四人都不在原位的坐法种数是

$$Z_4=P_5-(1+0+{}_4C_2+{}_4C_1Z_3)=4!-(1+6+4\cdot 2)=9$$

在五人坐法中，五人都不在原位的坐法种数是

$$Z_5=P_5-(1+0+{}_5C_3+{}_5C_2\cdot Z_3+{}_5C_1\cdot Z_4)=$$
$$5!-(1+0+10+10\cdot 2+5\cdot 9)=44$$

本题更可详细说明如下：设以 N_1,N_2,N_3,N_4,N_5 分别表示只有一人，二人，三人，四人，五人坐在原位的坐法种数，$N_a,N_{ab},N_{abc},N_{abcd},N_{abcde}$ 分别表示只有 $a,ab,abc,abcd,abcde$ 坐在原位的坐法种数.

显然，$N_{abcde}=1$，所以 $N_5={}_5C_5\cdot N_{abcde}=1$.

$$N_{abcd}=P_1-{}_1C_1\cdot N_{abcd}=1-1=0$$

所以
$$N_4={}_5C_4\cdot N_{abcd}=0$$

$$N_{abc}=P_2-{}_2C_1\cdot N_{abcd}-{}_2C_2\cdot N_{abcde}=2-0-1=1$$

所以
$$N_3={}_5C_3\cdot N_{abc}=0$$

$$N_{ab}=P_3-{}_3C_1\cdot N_{abc}-{}_3C_2\cdot N_{abcd}-{}_3C_3\cdot N_{abcde}=6-3-0-1=2$$

所以
$$N_2={}_5C_2\cdot N_{ab}=20$$

$$N_a=P_4-{}_4C_1\cdot N_{ab}-{}_4C_2\cdot N_{abc}-{}_4C_3\cdot N_{abcd}-{}_4C_4\cdot N_{abcde}=$$
$$24-8-6-0-1=9$$

所以
$$N_1={}_5C_1\cdot N_a=45$$

故五人不在原位的坐法种数是

$$Z_5=P_5-(N_1+N_2+N_3+N_4+N_5)=120-(1+10+20+45)=$$
$$120-76=44(\text{种})$$

一般的公式：

$$Z_n=n!-(1+{}_nC_2\cdot Z_2+{}_nC_3\cdot Z_3+{}_nC_4\cdot Z_4+\cdots+{}_nC_{n-1}\cdot Z_{n-1})$$

解法 3　这类问题，本刊曾经记载过几次：

(1) 本刊总 41 期(1954 年 9 月号) 载有“限制同号码的组合数”，说道，某跳舞会有男女各 n 人，都取定号码从 1 到 n. 设规定男女同号码的不得伴舞，问有多少种分配法？令其分配法为 Z_n，得公式

$$Z_n=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

式中令 $n=5$，得

$$Z_5=5\cdot 4\cdot 3-4\cdot 5+5-1=44$$

(2) 本刊总70期(1957年2月号)载有“n对兄妹之组合”,问n对兄妹有几种可能结婚的组合?设组合数为Z_n,得公式

$$Z_n = n! - (1 + {}_nC_2 \cdot Z_2 + {}_nC_3 \cdot Z_3 + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot Z_{n-1})$$

这公式在上面已经写出.

(3) 本刊总79期(1957年11月号)“关于n对兄妹之组合”,又有两个公式:

①$Z_n = nZ_{n-1} + (-1)^n$.在这式依次令$n = 1,2,3,4,5$,得$Z_5 = 44$.

②$\begin{cases}\text{当 } n \text{ 为奇数时}, Z_n = {}_nP_{n-2} - {}_nP_{n-3} + {}_nP_{n-4} - \cdots - {}_nP_1 + 1; \\ \text{当 } n \text{ 为偶数时}, Z_n = {}_nP_{n-2} - {}_nP_{n-3} + {}_nP_{n-4} - \cdots + {}_nP_1 - 1.\end{cases}$

本题$n = 5$代入,得

$$Z_5 = {}_5P_3 - {}_5P_2 + {}_5P_1 - 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1 = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

解法4 本题若不限制各人不回原位的规定,应有坐法$P_5 = 5! = 120$(种).现在我们来去掉其中有一人坐于原位的“坐法”.若一人a不动,其余四人b,c,d,e有坐法4!种应该去掉.同样b,c,d,e依次不动,共应去掉${}_5C_1 \cdot 4!$种.

但这样计算一人不动时,在坐法${}_5C_1 \cdot 4!$种中含有重复的.如当a,b同时不动,其余三人的坐法3!种是多计算了,应该从${}_5C_1 \cdot 4!$中去掉.这样重复的共应去掉${}_5C_2 \cdot 3!$种.

又上述计算二人不动时,在坐法${}_5C_2 \cdot 3!$中也有重复的.如当a,b,c同时不动其余二人的坐法2!种是多计算了,应该从${}_5C_2 \cdot 3!$中去掉.这样重复的共应去掉${}_5C_3 \cdot 2!$种.

同样在计算三人不动时,应该从${}_5C_3 \cdot 2!$中去掉${}_5C_4 \cdot 1!$种.最后在计算四人不动时,应该从${}_5C_4 \cdot 1!$去掉${}_5C_5 \cdot 0!$种.

总结上述,得到五人都不在原位的坐法是

$$Z_5 = 5! - \{{}_5C_1 \cdot 4! - [{}_5C_2 \cdot 3! - ({}_5C_3 \cdot 2! - \overline{{}_5C_4 \cdot 1! - {}_5C_5 \cdot 0!})]\}$$

$${}_5C_2 \cdot 3! - {}_5C_3 \cdot 2! + {}_5C_2 \cdot 1! - {}_5C_5 \cdot 0! = 10 \cdot 6 - 10 \cdot 2 + 5 - 1 = 44(\text{种})$$

一般的公式:

$$Z_n = {}_nC_2 \cdot (n-2)! - {}_nC_3 \cdot (n-3)! + {}_nC_4 \cdot (n-4)! - \cdots + (-1)^n {}_nC_n \cdot 0!$$

解法5 a,b,c,d,e的原来座位为A,B,C,D,E.经调换后,a可以坐在B,C,D,E位上,有坐法4种.

如果确定a在B位,那么b,c,d,e的任意调换,就有坐法$P_4 = 24$(种),但其中包括有三人坐于原位的情况.

当a在B时,b,c,d,e中的任意三人各有坐法3!种.其中c在原位C的坐法$3! = 6$(种)是不合题意的.

在上述24种中,包括有d在原位D(上面没有计算过)的坐法$3! - 2! =$

4(种),是不合题意.

又上述 24 种中,还包括有 e 在原位 E(在此以前没有计算过)的坐法 $3!-2!-1!=3$(种),也是不合题意.

因此,当 a 在 B 位,不合于题意的坐法是 $3!+(3!-2!)+(3!-2!-1!)$ 种.

同样可讨论 a 在 C,D,E 的情况.

所以合于题意的坐法数是

$$Z_5=4[4!-3!-(3!-2!)-(3!-2!-1!)]=4(24-6-4-3)=44$$

一般公式

$$\begin{aligned}Z_n=&(n-1)\{(n-1)!-(n-2)!-[(n-2)!-(n-3)!]-\\&[(n-2)!-(n-3)!-(n-4)!]-\cdots-\\&[(n-2)!-(n-3)!-\cdots-2!-1!]\}=\\&(n-1)[(n-1)!-(n-2)(n-2)!+(n-3)(n-3)!+\\&(n-4)(n-4)!+\cdots+2\cdot2!+1\cdot1!]\end{aligned}$$

这式还可简化,如应用恒等式 $\sum\limits_{n=1}^{n} n\cdot n!=(n+1)!-1$,上式就变为

$$\begin{aligned}Z_n=&(n-1)\{(n-1)!-(n-2)(n-2)!+(n-2)!-1\}=\\&(n-1)\{(n-1)!-(n-3)(n-2)!-1\}=\\&(n-1)(n-1)!-(n-3)(n-1)!-(n-1)=\\&2(n-1)!-(n-1)\end{aligned}$$

解法6 设五人 a,b,c,d,e 原来分别坐在 A,B,C,D,E 位上.各人都调换后的坐法列表 3,答重新坐法 44 种.

表 3

A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
b	a	d	e	c	c	a	b	e	d	d	a	b	e	c	e	a	b	c	d
		e	c	d			e	b	d			e	b	c			d	b	c
	c	a	e	d			d	e	b				c	b				c	b
		d	e	a		d	a	e	b		c	a	e	b		c	a	b	d
		e	a	d			b	e	a			b	e	a			b	a	d
	d	a	e	c			e	a	b			e	a	b			d	a	b
		e	a	c				b	a				b	a				b	a
			c	a		e	a	b	d		e	a	b	c		d	a	b	c
	e	a	c	d			b	a	d				c	b				c	b
		d	a	c			d	a	b			b	a	c			b	a	c
			c	a				b	a				c	a				c	a

解法7 设五人 a,b,c,d,e 分别坐在五位 A,B,C,D,E 上.今要全部变换

坐法，首先可定 a 的座位，依次再定 b,c,d,e 的座位.

因为 a 可以坐在 B,C,D,E 中任意一位，所以有4种坐法.设 a 在 B 时，那么 b 的坐法有下列两类.

(1) 当 a 在 B 且 b 在 A 时，c,d,e 的依次坐法只有两个：即 D,E,C 与 E,C,D.

(2) 当 a 在 B 且 b 在 C,D,E 中任意一位，可有3种坐法.当 b 在 C 时，c,d,e 的依次坐法有三个：即 A,E,D；D,E,A；E,A,D.同样 b 在 D 与 E 时，也各有坐法三个.所以这里共有坐法 $3\times3=9$(个).

同理讨论 a 在 C,D,E 的坐法.

所以他们的重新坐法 $=4(2+3\times3)=44$(种).

解法8 设 a,b,c,d,e 依次坐下了，今要调换座位.假定 b 在首位，暂时不要变动，让 a,c,d,e 调换，就有坐法 $P_4=24$ 种.在这24种坐法中，c,d,e 三人肯定仍会坐在原位上的，每人各有坐法 $P_3=6$ 种，三人共有坐法 $3P_3=18$ 种.但这18种中，包括有 c,d 在原位上的 $P_2=2$ 种，亦包括有 d,e 在原位上的 $P_2=2$ 种，还包括有 c,d,e 在原位上的 $P_1=1$ 种，都应该从18中去掉.因此知道：当在首位时，a,c,d,e 都不在原位的坐法有

$$P_4-(3P_3-2P_2-P_1)=24-(18-4-1)=11(\text{种})$$

同样可讨论 c,d,e 居首位的情况.所以本题的重新坐法 $=4\times11=44$(种).

解法9 要 a,b,c,d,e 都调换原来的座位 A,B,C,D,E，可考察如下：

b 在 A 时，是适合题意.但在4!种中有 c,d,e 在原位的情况.若 c 在 C 时有坐法 $(5-2)!=6$(种).若 e 在 C 且 d 在 D 时，有坐法 $(5-3)!=2$(种).若 d 在 C 且 e 在 E 时，有坐法 $(5-3)!=2$(种).若 a 在 C 且 d 或 e 在原位时，有坐法 $2(5-3)!=4$(种)，不过其中有1种是合于题意的.因此 b 在 A 时，适合题意的坐法有

$$4!-[3!+2\cdot2!+(2\cdot2!-1)]=4!-3!-4\cdot2!+1(\text{种})$$

c,d,e 在 A 时的情况，与 b 在 A 时相同.

所以本题的重新坐法为

$$4(4!-3!-4\cdot2!+1)=4(24-6-8+1)=44(\text{种})$$

解法10 设 a,b,c,d,e 原来坐在 A,B,C,D,E 位上.若 a 在 A 位，那么其余四人无论怎样坐，都是不合题意的.

今假定 b 在 A 位，我们分下列四种情况：

(1) 首先假定 a,c,d,e 四人中任何一人，如说 c 坐在原位上(当然不合题意)，即 b 在 A，且 c 在 C，但 e 不在 E 时，那么剩下的 B,D 两位，如用来坐 a,e 两

人有 P_2 种,如用来坐 i,e 两人也有 P_2 种,所以这类的坐法是 $2P_2$ 种.

(2) 当 b 在A,e 在E,但 c 不在 C 时,同样也有坐法 $2P_2$ 种.

(3) 当 b 在A,c 在C,e 在E 时,那么剩下的 B,D 两位,只可用来坐 a,d 两人,有坐法 P_2 种.

(4) 当 b 在A,d 在D,其余三人均不在原位的坐法有 3 种.

以上四种情况都不适合题意,应从 b 在A 位的坐法$P_4 = 24$种中减去,也就是说:当 b 在A 时"适合题意"的坐法有 $P_4 - (2P_2 + 2P_2 + P_2 + 3) = P_4 - (5P_2 + 3) = 11$(种).

同样,当 c 在A,d 在A 及e 在A 的坐法都有 11 种.故本题的重新坐法是 $4(P_4 - 5P_2 - 3) = 44$(种).

解法 11 他们重新坐法的种数可分为三类:

(1) 在两端的两人,仍是原来的两人,但互换座位.

(2) 在两端的两人,是由原来当中的三人,每次抽出两人.

(3) 在两端的两人,一个是原来两端中的一个,但换了位置.另一个是原来当中三人中的一个.

由这三类得出下列式中的三项,所以五人不回原位的坐法种数是

$$Z_5 = 2 + P_3(P_3 - 2) + 2 \cdot {}_3P_1(P_3 - 3) =$$
$$2 + 6(6 - 2) + 2 \cdot 3(6 - 3) = 2 + 24 + 18 = 44$$

解法 12 设五人为 a,b,c,d,e,位置依次为 A,B,C,D,E.

若 a 固定在A 位就有坐法$P_4 = 24$ 种.若 e 固定在E 位,且不在 A 位,就有坐法 $3P_3 = 18$(种)(均不合规定的坐法).若 d 固定在D 位,但 e 不在E 位,a 不在 A 位,就有坐法$(P_2)^2 + (P_2)^1 + (P_2)^0 = 4 + 2 + 1 = 7$(种).若 c 固定在C 位,但 d,e,a 不在D,E,A 位,就有坐法 $3P_3 = 18$(种).若 b 固定在B 位,但 a,c,d,e 不在 A,C,D,E 位,就有坐法 9 种.这些不合规定的坐法共有 $P_4 + 3P_3 + (P_2)^2 + (P_2)^1 + (P_2)^0 + 3P_3 + 9 = 24 + 18 + 7 + 18 + 9 = 76$(种),所以本题重新坐好的方法有 $P_5 - 76 = 120 - 76 = 44$(种).

注 此题中的${}_nC_m$ 即为 C_n^m.

❖ n 列数字

2. 在表 4 中,写有 n 列数字.试证明每列数字之和都是一个奇数的平方.又求出 n 列诸数之和是多少?(提出人:苏州于逵及南京汤宝华)

解 设第 1 列,第 2 列,……,第 n 列诸数之和分别为$S_1,S_2,\cdots,S_n$.用观察

法不难看出：$S_1=1=1^2, S_2=9=3^2, S_3=25=5^2, \cdots$. 但 $S_n=(2n-1)^2$，这是否正确呢？我们需用数学归纳法来证明.

表 4

$$n\text{列}\begin{cases}1\\2\quad 3\quad 4\\3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\\4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 10\\\cdots\end{cases}$$

假定第 k 列诸数之和是一个奇数 $(2k-1)$ 的平方，即 $k, k+1, k+2, \cdots, 3k-2$ 诸数之和：$S_k=(2k-1)^2$. 那么第 $k+1$ 列诸数之和是什么呢？我们从上列最后一个数的后面，添上两个顺序的自然数，得到第 $k+1$ 诸数是

$k+1, k+2, k+3, \cdots, 3k-2, 3k-1, 3k, 3k+1$

在此，得 $S_{k+1}=(S_k-k)+\overline{3k-1}+3k+\overline{3k+1}=S_k+8k=(2k-1)^2+8k=(2k+1)^2$.

这就是说，第 $k+1$ 列诸数之和，是紧接 $2k-1$ 后面的一个奇数 $(2k+1)$ 的平方.
由此证明了第 n 列诸数之和：$S_n=(2n-1)^2$.

从上面，已知 $S_1=1, S_2=3^2, S_3=5^2, \cdots, S_n=(2n-1)^2$. 故 n 列诸数之和是

$$1^2+3^2+5^5+\cdots+(2n-1)^2=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}4k^2-\sum_{k=1}^{n}4k+n=$$

$$4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{(1+n)n}{2}+n=$$

$$\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-2n^2-2n+n=$$

$$\frac{2}{3}\cdot n(n+1)(2n+1)-\frac{3n(2n+1)}{3}=$$

$$\frac{n(2n+1)(2n+2-3)}{3}=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

❖三角形内一点的范围

3. 从正三角形内一点，向各边作三条垂线. 设其中一条小于其他两条之和时，问这点的位置有怎样的范围？（提出人：哈尔滨赵成绪）

解　如图 1，设从正三角形内一点 P 向边作垂线 $PX=x, PY=y, PZ=z$. 由题意

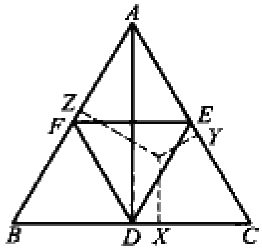


图 1

$$y+2>x \quad ①$$

$$z + x > y \quad ②$$

$$x + y > z \quad ③$$

令高 $AD = h$，因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，得

$$x + y + z = AD = h \quad ④$$

由 ①，④ 得 $2x < h$，所以

$$x < h/2 \quad ⑤$$

令三角形各边中点为 D, E, F，作 $\triangle DEF$. 由 ⑤ 知点 P 在梯形 $FBCE$ 之内. 同样由 $y < h/2, z = h/2$，知点 P 在梯形 $DCAF$ 及梯形 $EABD$ 之内. 故点 P 的范围应该在这三个梯形公共部分 $\triangle DEF$ 之内.

讨论　点 P 的范围，应该把 $\triangle DEF$ 的各边除外. 又从 $\triangle DEF$ 的三个角顶向各边作垂线且只能作出两条.

❖关于垂心与外心

4. 设 x, y, z 为 $\triangle ABC$ 的垂心至三顶点 A, B, C 的距离；x', y', z' 为外心至三边 a, b, c 的距离. 试用几何学及三角术两种方法来证明：

(1) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}$，(2) $\frac{a}{x'} + \frac{b}{y'} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{4x'y'z'}$（提出人：江西泰和中学数学小组）

解法 1　几何学证法.

(1)　$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz} \quad ①$$

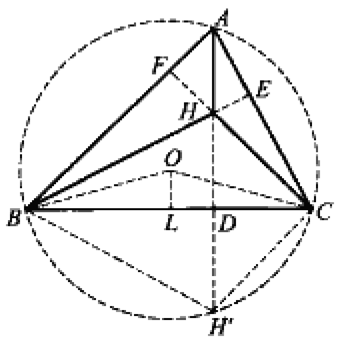


图 2

设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，O 为外心. 将 $\triangle HBC$ 以 BC 为轴，从上向下翻转过来，得 $\triangle H'BC$. 于是 $\triangle HBC \cong \triangle H'BC$.

因为 $\angle BHC = \angle FHE$（对顶角相等），$\angle AFH = \angle AEH = 90°$，所以 $\angle FHE$ 与 $\angle A$ 互为补角，即 $\angle BHC$ 与 $\angle A$ 互为补角.

又因为 $\angle BH'C = \angle BHC$（全等三角形的对应角相等），所以 $\angle BH'C$ 与 $\angle A$ 互为补角. 因此过四点 A, B, H', C 可作一个圆，使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle H'BC$ 都内接于这圆内.

再因为 $\triangle HBC \cong \triangle H'BC$，所以 $\triangle HBC$ 与 $\triangle H'BC$ 的外接圆相等（全等三角形的外接圆相等）. 也就是它们的外接圆半径相等. 命其半径为 R，S_{ABC} 表示 $\triangle ABC$ 的面积，$S_{\triangle HBC}$ 表示 $\triangle HBC$ 的面积 ……

因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R},S_{\triangle HBC}=\dfrac{ayz}{4R},S_{\triangle HAC}=\dfrac{bxz}{4R},S_{\triangle HAB}=\dfrac{cxy}{4R}$.

由图 2,$S_{\triangle HBC}+S_{\triangle HAC}+S_{\triangle HAB}=S_{\triangle ABC}$,即

$$\frac{ayz}{4R}+\frac{bxz}{4R}+\frac{cxy}{4R}=\frac{abc}{4R}$$

所以
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}$$

(2) $\dfrac{a}{x'}+\dfrac{b}{y'}+\dfrac{c}{z'}=\dfrac{abc}{4x'y'z'}$.

设 BC,CA,AB 的中点为 L,M,N;HA,HB,HC 的中点为 L',M',N'. 联结 LM,MN,NL 及 $M'N',N'L',L'M'$.

因为 $MN \perp\!\!\!\!= \dfrac{1}{2}BC,M'N'=\dfrac{1}{2}BC$,所以 $MN=M'N'$. 同理 $NL=N'L'$,$LM=L'M'$,所以$\triangle LMN\cong\triangle L'M'N'$. 由图 3 可以看出 O,H 各为 $\triangle LMN$,$\triangle L'M'N$ 的垂心. 于是 $OL=L'H'$,即 $OL=\dfrac{x}{2}$,所以 $x=2x'$. 同样 $y=2y'$,$z=2z'$,拿这些值代人 ① 中,得

$$\frac{a}{2x'}+\frac{b}{2y'}+\frac{c}{2z'}=\frac{abc}{8x'y'z'}$$

所以
$$\frac{a}{x'}+\frac{b}{y'}+\frac{c}{z'}=\frac{abc}{4x'y'z'}$$

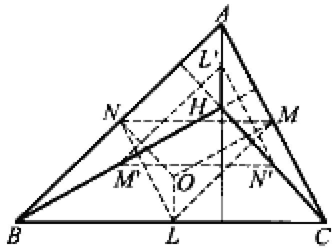


图 3

解法 2 三角术证法.

(1) 由图 2,$\tan\angle BOL=\dfrac{a/2}{x'}=\dfrac{a}{2x'}=\dfrac{a}{x}$. 但 $\angle BOL=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\angle A$. 所以 $\tan A=a/x$. 同样 $\tan B=b/y,\tan C=c/z$.

又因为 $A+B+C=\pi$,所以

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=\frac{abc}{xyz}$$

(2) 由上面$\dfrac{a}{2x'}=\tan A,\dfrac{b}{2y'}=\tan B,\dfrac{c}{2z'}=\tan C$,所以

$$\frac{a}{x'}+\frac{b}{y'}+\frac{c}{z'}=2\tan A+2\tan B+2\tan C=$$
$$2(\tan A+\tan B+\tan C)=\frac{2abc}{xyz}=$$
$$\frac{abc}{4x'y'z'}$$

❖分解因子

5.分解下式的因子：$x^{2n}-2x^n\cos\theta+1$.（提出人：重庆 潘福铨）

解 将原式改写作 $x^{2n}-2x^n\cos\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$，即 $(x^n-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$. 这式分解因子得 $x^n=\cos\theta\pm\mathrm{i}\sin\theta$（式中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$）. 由此知道 x 是 $\cos\theta\pm\mathrm{i}\sin\theta$ 的 n 次根. 但原式是 x 的 $2n$ 次式，应该有 $2n$ 个根. 如若把原式分解为 $2n$ 个 因子，就得

$$x^{2n}-2x^n\cos\theta+1=\left(x-\cos\frac{\theta}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(x-\cos\frac{2\pi+\theta}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2\pi+\theta}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left[x-\cos\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}\right]\cdot\left(x-\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(x-\cos\frac{2n+\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi+\theta}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left[x-\cos\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}\right]$$

这式内是含有虚数的. 如若要使各个因子都是实数，又可变换如下：

试取两式 $x-\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}$ 及 $x-\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}$，式中 $k=0,1,2,\cdots,(n-1)$.

将这两式相乘后，就成实数 $x^2-2x\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+1$. 因此，如分解原式的因子都成实数，就得

$$x^{2m}-2x^n\cos\theta+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+1\right)\cdot\cdots\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{2(n-2)\pi+\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}+1\right)$$

即
$$x^{2n}-2x^n\cos\theta+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+1\right)$$

注 当 $\cos\theta=1$ 时，原式变为 $(x^n-1)^2$；当 $\cos\theta=-1$ 时，原式变为 $(x^n+1)^2$，这两式同样也可分解因子.

1958年2月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:周维鹏,上海五十八中高三(2)数学小组,谢深泉,王泽涵,汉口郑懋锟小组,陈非非,武汉一师中一(一)WGE,王普,张方平,章正华,上海蓬莱中学高三(1)狄建华数学分子团.

解答第1,2,3,4题者:郭珠,徐根祥,南京十一中高三(2)数学小组,郭达民,熊谟恭,汤志根,邵钰保,江西泰和中学高三(1)π数学小组,安徽歙县中学高二飞马数学小组,何泰来,何友桦,绍兴二中高二(3)五星数学研究小组,陈剑豪,上海建平中学$\sum\sum\sum$数学小组,福州四中高三(1)αβγ数学小组,张耀林,龚成良,王松乔,许炽雄,苗永温,虞鑫钜.

解答第1,2,3,5题者:张祖腾,周国銮,季鼎祥,上海延安中学高二(3)数理小组,陈万龙,李虎城,方天英,周润生,唐文,居绍元,周金麟,南京三中高三甲爱因斯坦数理小组,姜世昌.

解答第1,2,4,5题者,上海徐汇中学Ⅲ(3)数学小组,张一萍,陆忠明.

解答第1,3,4,5题者:江西泰和中学数学教研组,李时与,纪国荫.

解答第2,3,4,5题者:许传根,唐文骞,王国华.

解答第1,2,3题者:邬曼郎,李炯,陈照荣,徐文豪,黄文生,虞元伟,肖嗣尧,刘宝华,齐培华,贝虹,上海洋泾中学高三(4)数理化小组,武汉十二中高三(3)杨辉小组,常州二中高三(1)朝阳数学小组,上海东昌中学高三(6)AKQJ数学小组,叶昭烈,吴元鸿,戴世杰,常州戚区数学跃进小组,北京师大附中高一(2)数学爱好者小组,黄辅山,施昌彦,李杰,苏州高中高三(1)数学爱好者小组,上海东昌中学高三(1)$\sum\pi$数学小组.

解答第1,2,4题者:王掌发,王思仲,燕声,刘广祥,钱未末,李树身,黄文健.

解答第1,2,5题者:张禄度,王幼权,李伟奇,黄祥富,雷英果,上海敬业中学高三(4)数学小组,朱连喜,广东台山端芬中学尤拉数学小组,张海祥,李师正,陈子琨,李其可,徐自新.

解答第1,3,4题者:上海向明中学高二(6)萌芽数学小组,史树中.

解答第1,3,5题者:朱襄生.

解答第1,4,5题者:上海延安中学高三(3)力学竞赛小组,关志仁,陆少华.

解答第2,3,4题者:王孟之,谢精颐,武汉十四中高三(1)CS数理小组,武汉三十三中高二(1)高斯数学小组,江苏常州三中高二乙壁,思仲,思修,江苏师

院数系一甲(2) 数学小组,刘明星,陈宏汉,吉林市一高中551班,陈钟琦.

解答第2,3,5题者:孙厚军,张世觉,王福定,周汉明,方根新,金启康,江西吉安中学高三(3) 高斯数学小组,上海文建中学高三(3) 数学小组,孙应运,董振中.

解答第2,4,5题者:温鹏翔,长沙拉兹数学小组,范秉椿,游一中,陆菊生,上海仪凤衔61弄3号.

解答第3,4,5题者:胡敦友.

解答第1,2题者:朱云生,南京四中高三(1) 跃进数学小组,丁育胜,仇福庭,胡震中,孙加明,潘金才,清灵,陈志浩,翘澧,林祖燧,邹中桂,呼和浩特二中(十) 蓓蕾小组,上海中学周君,邹志鸿,曾昭中,张时敏,朱恕行,彭公志,无锡一中高三(甲) 吴一心数学爱好者,沈苏,曹丽芳,王思宏,湖北黄冈合作干校会计班数学爱好者,程振明.

解答第1,3题者:蒲乙高,周晨,武汉十四中高三(二) 鸭子数学小组,杜炎,曹振民,四川蒲江丽圆曹永源数学物理小组,宋成,毛定良,上海西梅家衔26号,郭顺生.

解答第1,5题者:上海同寿坊第二数理化小组,广东饶平二中0数学小组,解答第2,3题者:黑龙江双城兆麟中学(19)xy数学小组,徐州三中高二居里小组,天津十九中高三(1)Δl数学小组,广东普一中高二甲班(∞ + ε)/2数学小组,扬州新华中学ca数学爱好者,鞍山一中杨辉数学小组,长春十二高中二年六班∞ 数学小组,湖南邵阳二中高24班9,16,47数学小组,旅蓉雯,李芳莉,杜瑶仙等百零八件,姓名从略.

解答第2,4题者:北京百零一中高三(2) 数学小组,武汉三十三中高二(三) 裴蜀数学小组,崔剑敏,陈明亨,韦志明.

解答第2,5题者:李钟春,龚仙宝,朱兴龙,朱兴昌,吴佩聍,于煜,任德祥,上海中国中学高二(1)$E = mc^2$爱因斯坦数学物理研究小组,沈阳无名氏,丁呈玑.

解答第3,4题者:郭朝泓,温涌源.

解答第3,5题者:北京师大附中高三三班,青岛建校59275号,李钟春,广东潮安二中王君,夏奠清.

解答第4,5题者:张信忠.

解答一个题者:海南中学高三(3) 高二(1)BRO数学小组,济南三中α数学小组,安徽歙县中学高二"金星" 数学小组,辽宁实验一中高二 c.σ.天津七中,福州一中初三(乙)4523MN数学兴趣小组,吉林前郭旗麦克斯韦数理小组,温州二中高二(己) 数学爱好者,山西运城中学高三数学研究小组,许昌第五步预校,张厚五,陈允惠,季行平,陈艳菊等二百三十三件,姓名从略.

1958年2月号小知识问题答案

❖各种垛

1. 什么叫做“四隅垛”，“方垛”，“刍甍垛”，“刍童垛”，“圆锥垛”？(提出人：长沙 张杰拣)

答 我国研究高阶等差级数求和方法是很早的，这种算法被称曰“垛积术”；宋沈括(1031—1095)梦溪笔谈载有“长方垛”(即刍童垛)的求积法，杨辉详解九章算法(1261)载有“四隅垛，方垛，刍甍垛，刍童垛”的算法；元朱世杰四元玉鉴(1303)载有“圆锥垛”的求法．今列出一些求和公式如下：

(1) 四隅垛，亦称“四角垛”，形如正方锥，有 n 层，各层都是正方阵．底层每边是 n 个．向上逐层每边少 1 个，顶层是 1 个．其总和

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

(2) 方垛，是一个截顶的四隅垛，形如正方台．底层每边是 n 个，顶层每边是 p 个，层数是 $n-p+1$．其总和：

$$S = p^2 + (p+1)^2 + (p+2)^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 =$$
$$\frac{1}{3}(n-p+1)\left[(n^2+np+p^2) + \frac{1}{2}(n-p)\right]$$

(3) 刍甍垛，形始长方楔，有 n 层，各层都是长方阵．顶层是长 p 个，阔 1 个．以下逐层每边是长阔都多 1 个．底层是长 $p+n-1$ 个，阔 n 个．其总和

$$S = 1p + 2(p+1) + 3(p+2) + \cdots + n(p+\overline{n+1}) =$$
$$\frac{1}{6}n(n+1)[3p+(2n-1)]$$

(4) 刍童垛，亦称“长方垛”，是一个截顶的刍甍垛，形如长方台，有 n 层．顶层是长 p 个阔 q 个．以下逐层每边是长阔都多 1 个．底层是长 a 个，阔 b 个．其总和

$$S = \frac{n}{6}[(2q+b)p + (2b+q)a + (b-q)]$$

(5) 圆锥垛，顶层是 1 个，第二层是 3 个，以下的奇数层都是正六角阵，隔层每边多 1 个．偶数层都是等角六角阵，隔层也是每边多 1 个．各层的排列如图 1

所示.

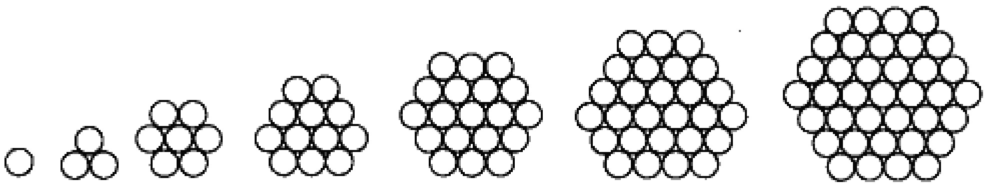


图 1

各层的数目是:1,3,7,12,19,27,37,48,61,75,91,108,127,142,169,187,…

这种垛积,因为层数是奇数或是偶数,其求和公式也不相同.分述如下:

当 n 是奇数时,得

$$S=\frac{1}{8}(n+1)[(n+1)^2+n(n-1)]$$

当 n 是偶数时,得

$$S=\frac{1}{8}n[n^2+(n+1)(n+2)]$$

注 "三角垛"亦称"落一形".

❖多级火箭

2.发射人造卫星,为什么不能用一级火箭而要用多级火箭?有什么数理的根据?(提出人:桂林 詹肖梅)

答 要发射人造卫星上天,是用火箭把它送出去的办法.

假定火箭的原始质量(包括所带燃料在内)是 m_0,不带燃料的火箭质量是 m.气体从火箭喷出的速度(不变)是 v_c,火箭将要达到的速度是 v.根据苏联齐奥尔夫斯基(1857—1935)的研究,得到公式

$$\frac{m_0}{m}=e^{\frac{v}{v_c}} \text{ 即 } v=v_c\ln\frac{m_0}{m}$$

式中 ln 表示自然对数.

从这式知道,在"不考虑重力"的空间里,火箭速度(末速)仅决定于质量比 m_0/m 及喷气速度 v_c.式中 $e=2.718\,28\cdots$ 是一个定值.当 m_0/m 增加时,v 跟着而迅速地增加.例如取 $v_c=4$ km/s,令 $m_0/m=100$,得到 $v=(4\ln 100)$ km/s $=4\times4.6$ km/s $=18.4$ km/s;令 $m_0/m=10\,000$,得到 $v=4\times9.2$ km/s $=36.8$ km/s.但一般的用液体燃料只能得到 $v=2.5$ km/s,因此要脱离地球引力而远去,即具有速度 11.2 km/s,须得到 $m_0/m=90$.这就是说,火箭连同燃料的

质量应比火箭本身的质量重到 90 倍.像这样的火箭是无法把它送上天去的.因为若从地面发射火箭,采用过高的速度,会和空气摩擦发生高热,即刻把火箭熔烧掉了.

要解决这种困难,是采用多级火箭,即在火箭发射前,将燃料分载于各级火箭中.当第一级火箭燃料耗完后,自动地抛掉以减轻质量.这样使剩下火箭的"质量比"增加,因而使速度达到更高.

例如用单级火箭,设火箭的质量 $m = 2\ 000$ kg,所带燃料和氧化剂(即助燃剂)为 48 000 kg.原始质量 $m_0 = 2\ 000 + 48\ 000 = 50\ 000$ (kg),这时质量比 $m_0/m = 50\ 000/2\ 000 = 25$.

假如改用两级火箭,两级的质量各为 1 000 kg,连同所带燃料和氧化剂的原始质量,跟从前一样仍为 50 000 kg.因为第一级火箭燃料耗尽后,不再参加航行,这时质量比 $m_0/m = 50\ 000/1\ 000 = 50$.显然两级火箭的比值要比单级火箭提高一倍,因而迅速可以增加 69%(因为 $\ln 2 = 0.69$).

如用三级或多级火箭,我们可以采用逐节脱落的方式相继发射.这样可使火箭的质量逐渐地减少,速度更继续地增加.

但在上面公式中含有"自然对数".我们可以看出,当"真数"m_0/m 成"等比级数"增加时,$\ln(m_0/m)$ 只成"等差级数"增加.换句话说,质量比的值虽然增加得很快,火箭速度却慢慢儿增加.在事实上,用两级火箭比单级火箭的速度,增加是 33%;用三级火箭,增加是 45%;用四级火箭,增加是 50%.级数增加虽说可以不受限制,但速度增加最多也不过 70%.所以现在发射人造卫星,通常是采用三级或四级火箭.

❖桌上电灯

3.房间里桌上有一盏电灯 P.当 OB 突然断绝,电灯 P 势必和桌面相碰而碎,问电灯和桌面相碰在何处?假定 $AO = 4, OP = 2.9, \angle AOP = 120°$.如若 $h = 7$,电灯会不会和桌面相碰而碎?(提出人:江苏无锡华惠敏)

答1 设 QS 为桌面.电灯 P 因受重力作用,是会向地面下坠的.$AO + OP = 4 + 2.9 = 6.9$.当 OB 断绝后,AO 与 OP 的改变,最多是拉成直线.但因 P 又受到有绳子 AOP 的拉力,因此它不能继续下降而开始作单摆运动.设 P 与桌面相碰于 S,从 A 作 $AQ \perp QS$.因为 $\triangle AQS$ 为直角三角形

$$AQ = 6, AS = AO + OP = 6.9$$

所以

$$QS=\sqrt{AS^2-AQ^2}=\sqrt{6.9^2-6^2}=\sqrt{47.61-36}=\sqrt{11.61}=3.407\,345\,0$$

这就是说,电灯和桌面相碰,距 A 的垂足之距离为 3.407 345 0.

若 $h=7$,那么 OB 断绝后,AOP 变成一条直线也只有长度6.9,始终是小于7.因此电灯永不会和桌面相碰,它只是以 A 为圆心,6.9为半径,朝向地心,向左右两方作来回的摆动.

注 题中 $\angle AOP=120°$ 是无谓的数,计算时可以不用.

答2 如图2,$\angle SAQ=\alpha$.因为 $\triangle AQS$ 为直角三角形

$$\cos\alpha=\frac{AQ}{AS}=\frac{6}{(4+2\cdot 9)}=\frac{6}{6.9}=0.869\,565\,22$$

查表 $\cos 29°35'31''$ 与上值相近,得 $\alpha=29°35'31''$.所以

$$QS=AS\cdot\sin\alpha=6.9\times 0.493\,819\,61=3.407\,35$$

这就是说,电灯和桌面相碰,距 A 的垂足之距离为3.407 35.

若 $h=7$,得 $AO+OP=6.9<h$,所以电灯永不会和桌面相碰.

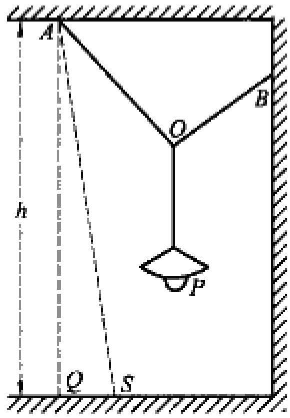


图 2

❖分铁丝

4.把一条长1尺的铁丝分为两段,使一段做成正方形,另一段做成正三角形.设两条所围的面积之和为最小,问该怎样分法?(提出人:沈阳 周玉)

答1 设做正三角形的一段长 a 尺,那么做正方形的一段长 $(1-a)$ 尺.两段所围面积之和为 S.

$$S=\frac{a}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}+\left(\frac{1-a}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}a^2}{36}+\left(\frac{1-a}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}a^2}{36}+\frac{1-2a+a^2}{16}=$$

$$\frac{9-18a+9a^2+4\sqrt{3}a^2}{144}=\frac{(9+4\sqrt{3})a^2-18a+9}{144}=$$

$$\frac{9+4\sqrt{3}}{144}\left[a^2-\frac{18a}{9+4\sqrt{3}}+\left(\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\right)^2\right]+\frac{1}{16}-\frac{9}{16(9+4\sqrt{3})}=$$

$$\frac{9+4\sqrt{3}}{144}\left(a-\frac{9}{9+4\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4\sqrt{3}}{16(9+4\sqrt{3})}$$

这式当 $a - \frac{9}{9+4\sqrt{3}} = 0$,即 $a = \frac{9}{9+4\sqrt{3}}$ 尺时,得 S 为最小值.所以

$$a = \frac{9}{9+4\sqrt{3}} = \frac{9(9-4\sqrt{3})}{33} = \frac{3(9-4\sqrt{3})}{11} = 0.565(\text{尺})$$

$$1 - a = 1 - \frac{3(9-4\sqrt{3})}{11} = \frac{4(3\sqrt{3}-4)}{11} = 0.435(\text{尺})$$

这就是说,把铁丝分成两段,使一段之长为5.65寸,去做正三角形;另一段之长为4.35寸,去做正方形,两者所围面积之和必为最小.

注 (1)当 $a = \frac{9}{(9+4\sqrt{3})}$ 尺时,得到 S 的最小值为

$$S = \frac{4\sqrt{3}}{16(9+4\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}(9-4\sqrt{3})}{16(9+4\sqrt{3})(9-4\sqrt{3})} =$$

$$\frac{9\sqrt{3}-12}{4(81-48)} = \frac{3\sqrt{3}-4}{44} = 0.027\,185\,3(\text{方尺})$$

(2)做"正三角形一段铁丝之长"是 $a = \frac{9}{9+4\sqrt{3}}$(尺),即 $\frac{3(9-4\sqrt{3})}{11}$ 尺,做"正方形一段铁丝之长"是 $1 - a = \frac{4\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$(尺),即 $\frac{4(3\sqrt{3}-4)}{11}$ 尺.两段铁丝长之比是 $a:(1-a) = 9:4\sqrt{3}$.

答2 设正三角形的面积为 S_1,正方形的面积为 S_2,两者面积之和为 S.如图3

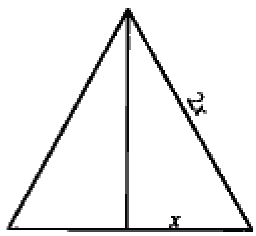


图3

$$S_1 = x\sqrt{3x^2} = x^2\sqrt{3}(\text{方尺})$$

$$S_2 = \left(\frac{1-6x}{4}\right)^2(\text{方尺})$$

$$S = S_1 + S_2 = x^2\sqrt{3} + \left(\frac{1-6x}{4}\right)^2$$

$$\frac{dS}{dx} = 2x\sqrt{3} + 2\left(\frac{1-6x}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) =$$

$$2x\sqrt{3} - \frac{3-18x}{4} = \frac{2(9+4\sqrt{3})x-3}{4}$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{9+4\sqrt{3}}{2} > 1$$

当 $\frac{dS}{dx} = 0, \frac{d^2S}{dx^2} > 0$ 时,S 有最小值.令 $\frac{dS}{dx} = 0$,得

$$x = \frac{3}{2(9+4\sqrt{3})} = \frac{3(9-4\sqrt{3})}{2(81-48)} = \frac{9-4\sqrt{3}}{44} = 0.094\,2(\text{尺})$$

于是 $6x = 0.565$ 尺，$(1 - 0.565)$ 尺 $= 0.435$ 尺．这就是说，“做三角形的铁丝之长”是 5.65 寸，“做方形的铁丝之长”是 4.35 寸．

要验算上面所求的数值是否正确的，可取 x 以不同的数值，分别计算出 S_1，S_2，S 诸值来做比较，便可一目了然．如表 1．

表 1

x/寸	S_1/方寸	S_2/方寸	S/方寸
0.5	0.433 00	3.062 5	3.495 50
0.6	0.624 96	2.56	3.184 96
0.8	1.108 48	1.69	2.798 48
0.942	1.536 9	1.181 6	2.718 53
1	1.732 05	1	2.732 05
1.2	2.494 08	0.49	2.984 08
1.5	3.897 00	0.062 5	3.959 50

❖七个菱形

5．把十五个数码 1，2，3，…，15 填入图 4 中各个小圈内，使每个菱形的四个数字之和都相等，问该怎样填法？（提出人：浙江余姚 宋公蔚）

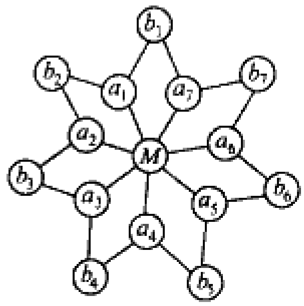


图 4

答　图 4 中共有七个菱形．设七个菱形的中心数字为 M．每两个菱形公有的 7 个位置诸数之和为 A，分别写作为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$．各自的顺序，从左上角起，逆着时针运行的方向．其余 7 个角诸数之和为 B．分别写作 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$，各自的顺序，从上面的角起，向着左方旋转．

由图 $M + A + B = \dfrac{(1 + 15)15}{2} = 120$．

设 $M = 1$，得 $A + B = 119$ 及 $7M + 2A + B = 7N$（N 是自然数表示每菱形的四数之和）．由这知道此时的 A 及 B 都须为 7 的倍数．

如 A 取最小数值，即 A 为下列七数：2，3，4，5，6，7，8．

因为 $2 + 3 + 4 + \cdots + 8 = 35$，所以

$A = 35, B = 119 - 35 = 84$（即 B 由七数 15，14，13，12，11，10，9 组成）

$$N = \frac{7M + 2A + B}{7} = \frac{161}{7} = 23$$（这是每菱形四数之和取最小值所得的数）

此时 A 的七数与 B 的七数相配合，作表 2 如下．

表 2

M	1						
B	15	14	13	12	11	10	9
$N-B$	7	8	9	10	11	12	13
A	2 5	5 3	3 6	8 2	7 4	4 8	6 7
	2 5	5 3	7 2	4 6	3 8	8 4	6 7
	2 5	6 2	5 4	3 7	8 3	4 8	7 6
	2 5	6 2	3 6	7 3	4 7	8 4	5 8
	3 4	2 6	6 3	8 2	4 7	7 5	5 8
	4 3	2 6	7 2	6 4	3 8	5 7	8 5
	4 3	2 6	7 2	3 7	6 5	8 4	5 8
	4 3	2 6	5 4	8 2	3 8	7 5	6 7
	3 4	5 3	2 7	8 2	6 5	4 8	7 6

由表 2 可作出一些图形(图的填写法,先写中心数字 M.再在 A 内,a_1 取其最小值,逆着时针运行的方向继续地写 $a_2(a_2>a_1),a_3,a_4,\cdots$).

例如取表中 A 栏内第一列,第二列,第三列,即可作出下列三图,如图 5 所示.

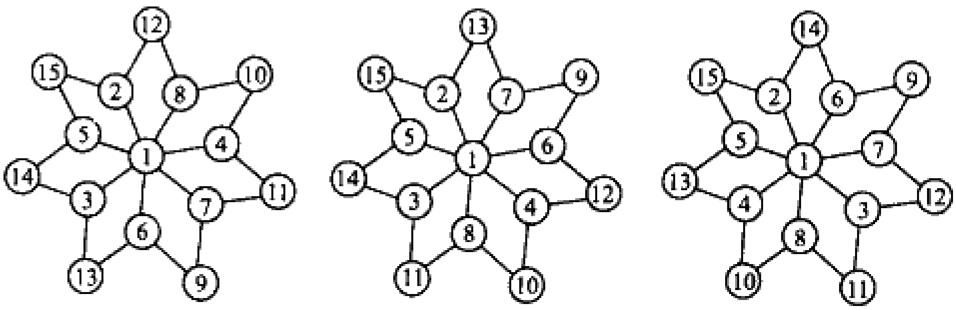


图 5

像这样的每个图形,都可以变化,即 a_1 可移置于 $a_2,a_3,a_4,\cdots,a_7$ 诸位置.又若将当中从上至下的三个数 b_1,M,a_4 不动,其余的数左右调换.即 a_1,a_2,a_3,分别与 a_7,a_6,a_5,调换,b_2,b_3,b_4 分别与 b_7,b_6,b_5 调换.这样做法每个图形就都变成 14 个.

其次令 $A=42,49,56,\cdots,84$,得 $B=77,70,63,\cdots,35$.相应的各个菱形四数之和是 24,25,26,$\cdots$,30.

同样,设 $M=2,3,4,\cdots,8$,也可作出一些图形,列表 3.

表 3

M	1								2						
A	35	42	49	56	63	70	77	84	36	43	50	57	64	71	78
B	84	77	70	63	56	49	42	35	82	75	68	61	54	47	40
N	23	24	25	26	27	28	29	30	24	25	26	27	28	29	30

M	3							4						
A	37	44	51	58	65	72	79	38	45	52	59	66	73	80
B	80	73	66	59	52	45	38	78	71	64	57	50	43	36
N	25	26	27	28	29	30	31	26	27	28	29	30	31	32

M	5								6							
A	32	39	46	53	60	67	74	81	33	40	47	54	61	68	75	82
B	83	76	69	62	55	48	41	34	81	74	67	60	53	46	39	32
N	26	27	28	29	30	31	32	33	27	28	29	30	31	32	33	34

M	7								8								
A	34	41	48	55	62	69	76	83	28	35	42	49	56	63	70	77	84
B	79	72	65	58	51	44	37	30	84	77	70	63	56	49	42	35	28
N	28	29	30	31	32	33	34	35	28	29	30	31	32	33	34	35	36

设 $M=15,14,13,\cdots,9$ 时，本来可以依照上法去作图．但亦可简化如下：

在 $M=1$ 的图形中，设将 $1,2,3,\cdots,15$，改写作 $15,14,13,\cdots,1$．那么 $M=1$ 的每个图形，都变成 $M=15$ 的图形了．在这两种图形中，当 $M=1,N=23,24,25,\cdots,30$ 时，相应的得到 $M=15,N=41$（这是 N 的最大值），$40,39,\cdots,34$．换句话说，两种图形中的 N 之和总是 64．同样由 $M=2,3,4,\cdots,7$ 的每个图形，也都可以得到 $M=14,13,12,\cdots,9$ 的每个图形．因此只要作出 $M=1,2,3,\cdots,8$（其实只要做到 $M=8,N=32$ 也就足够）的图形，那么全部的图形也就作出来了．

今写出一些图形的填写法如表 4（表中 M 从 1 到 15，N 从 23 到 41 都有）．

表 4

M	N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	23	2	5	3	6	7	4	8	12	15	14	13	9	11	10
		2	5	3	8	4	6	7	13	15	14	11	10	12	9
		2	5	4	8	3	7	6	14	15	13	10	11	12	9
		2	5	8	4	7	3	6	14	15	9	10	11	12	13
		2	6	3	4	7	5	8	12	14	13	15	11	10	9
		2	6	4	3	8	5	7	13	14	12	15	11	9	10
		2	6	5	8	4	3	7	13	14	11	9	10	15	12
		2	6	7	5	4	3	8	12	14	9	10	13	15	11
		2	7	6	5	3	4	8	12	13	9	11	14	15	10
	24	2	10	6	4	5	3	12	9	11	7	13	14	15	8
	26	2	8	4	10	12	6	14	9	15	13	11	3	7	5
		2	8	14	6	12	4	10	13	15	3	5	7	9	11
		2	10	4	6	12	8	14	9	13	11	15	7	5	3
		2	10	12	8	6	4	14	9	13	3	5	11	15	7
		2	12	10	8	4	6	14	9	11	3	7	13	15	5
		3	11	7	5	15	9	13	10	12	8	14	6	2	4
	27	2	9	13	6	12	11	10	14	15	4	7	8	3	5
		2	10	11	12	6	7	15	9	14	5	3	8	13	4
		2	10	12	5	15	8	11	13	14	4	9	6	3	7
		3	9	5	11	13	7	15	8	14	12	10	2	6	4
		3	9	15	7	13	5	11	12	14	2	4	6	8	10
		3	11	5	7	13	9	15	8	12	10	14	6	4	2
		3	11	9	15	7	5	13	10	12	6	2	4	14	8
		3	11	13	9	7	5	15	8	12	2	4	10	14	6
		3	13	11	9	5	7	15	8	10	2	6	12	14	4
	29	5	13	11	14	12	7	15	8	10	4	3	2	9	6
	30	9	12	10	13	14	11	15	5	8	7	6	2	4	3
		9	12	10	15	11	13	14	6	5	7	4	3	5	2
		9	12	11	15	10	14	13	7	8	6	3	4	5	2
		9	12	15	11	14	10	13	7	8	2	3	4	5	6
		9	13	10	11	14	12	15	5	7	6	8	4	3	2
		9	13	11	10	15	12	14	6	7	5	8	4	2	3
		9	13	12	15	11	10	14	6	7	4	2	3	8	5
		9	13	14	12	11	10	15	5	7	2	3	6	8	4
		9	14	13	12	10	11	15	5	6	2	4	7	8	3

续表 4

M	N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
2	24	1	6	7	3	5	4	10	11	15	9	12	14	13	8
	25	1	7	5	8	3	6	13	9	15	11	10	12	14	4
	28	1	10	9	13	8	12	11	14	15	7	9	5	6	3
3	25	1	6	4	8	9	2	7	14	15	12	10	5	11	13
	28	1	13	7	6	15	2	14	10	11	5	12	4	8	4
4	28	2	8	15	6	7	5	9	13	14	1	3	11	12	10
	29	3	8	15	9	5	7	12	10	14	2	1	11	13	6
	30	3	11	7	6	15	10	14	9	12	8	13	5	1	2
5	28	1	8	3	9	4	6	15	7	14	12	11	10	13	2
	29	3	6	10	12	11	4	7	14	15	8	2	1	9	13
	32	3	4	6	13	12	11	15	9	10	7	8	2	4	1
6	31	2	13	11	9	4	7	15	8	10	1	5	12	14	3
7	29	2	6	5	4	3	9	12	8	14	11	13	15	10	1
	30	1	8	2	15	3	9	10	8	14	13	6	5	11	4
	34	5	9	15	10	11	12	14	8	13	3	4	6	4	1
	35	8	11	15	12	13	10	14	6	9	2	1	3	5	4
8	28	1	4	2	5	6	3	7	12	15	14	13	9	11	10
		1	4	2	7	3	5	6	13	15	14	11	10	12	9
		1	4	3	7	2	6	5	14	15	13	10	11	12	9
		1	4	7	3	6	2	5	14	15	9	10	11	12	13
		1	5	2	3	6	4	7	12	14	13	15	11	10	9
		1	5	3	2	7	4	6	13	14	12	15	11	9	10
		1	5	4	7	3	2	6	13	14	11	9	10	15	12
		1	5	6	4	3	2	7	12	14	9	10	13	15	11
		1	6	5	4	2	3	7	12	13	9	11	14	15	10
	30	1	6	3	5	7	11	9	15	13	14	10	4	2	12
		1	9	2	7	5	3	15	6	12	11	13	10	14	4
	31	1	9	3	15	2	7	12	13	11	5	6	14	4	10
	32	1	9	13	4	15	3	11	12	14	2	7	5	6	10
		1	12	3	7	15	5	13	11	9	14	2	4	6	10
	33	1	13	7	15	4	9	14	10	11	5	3	6	12	2
	34	5	7	15	10	13	11	9	12	14	4	1	3	2	6
	36	9	12	10	13	14	11	15	4	7	6	5	1	3	2
		9	12	10	15	11	13	14	5	7	6	3	2	4	1
		9	12	11	15	10	14	13	6	7	5	2	3	4	1
		9	12	15	11	14	10	13	6	7	1	2	3	4	5
		9	13	10	11	14	12	15	4	6	5	7	3	2	1
		9	13	11	10	15	12	14	5	6	4	7	3	1	2
		9	13	12	15	11	10	14	5	6	3	1	2	7	4
		9	13	14	12	11	10	15	4	6	1	2	5	7	3
		9	14	13	12	10	11	15	4	5	1	3	6	7	2

续表 4

M	N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
9	29	1	4	3	6	2	8	5	14	15	13	11	12	10	7
	35	4	7	13	12	11	10	14	8	15	6	1	3	5	2
10	33	1	9	12	7	5	3	14	8	13	2	4	11	15	6
11	35	4	5	12	9	13	10	6	14	15	7	3	2	1	8
12	36	1	8	14	7	11	9	10	13	15	2	3	6	4	5
13	39	7	8	12	10	15	9	14	5	11	6	4	1	2	3
14	36	3	7	6	15	5	4	8	11	12	9	1	2	13	10
15	34	1	4	2	5	6	3	7	11	14	13	12	8	10	9
	37	3	7	14	6	5	4	10	9	12	1	2	11	13	8
	38	2	10	12	8	6	4	14	7	11	1	3	9	13	5
	40	4	13	11	12	10	6	14	7	8	1	2	3	9	5
	41	8	13	12	11	9	10	14	4	5	1	3	6	7	2

1958年2月号小知识解答者名单

解答第1,2,4题者:上海同济中学高三(3) $a+bi$ 数学小组,陆忠明.

解答第1,2题者:任德祥,吴祖宜.

解答第1,3题者:南京十二中高二(3)居里数理小组.

解答第1,4题者:武汉十二中高二(3)H.B.C.数学小组.

解答第2,4题者:荣列润,王文求,安徽歙县中学高二飞马数学小组,福建晋江二中高二(4)数学爱好者.

解答第3,4题者:四川蒲江丽圆曹永源数学物理小组,周汉明,浙江绍兴二中高二(3)五星数学研究小组,吉林前郭旗麦克斯韦数理小组,德辉,常州戚区数学跃进小组,马重芳.

解答第1题者:王长龙,吴尧,王思忠.

解答第2题者:苏保根,王掌发,广州十七中高三(乙)数学爱好者,熊松年,贾彦宾,傅正生,许炽雄,苗永温,虞鑫钜.

解答第3题者:姚平,孙厚军,郑锦文,韩国俊,韩国钧,朱兴龙,朱兴昌,杨雨田,赵延光,马罗兰,罗实茂.

解答第4题者:狄建华,广东恩平金沟仁和数学小组,朱云生,湖北沔阳沙湖镇苏章数学小组,陈志浩,山东胶县一中,黑龙江双城兆麟中学(19) xy 数学小组,陈永泰,徐凤春,邵贻仁,陆培荣,王顺才,丁育胜,仇福庭,何泰来,石继豪,陈剑豪,朱广修,陈宏汉,周润生,唐文,居绍元,周金麟,何鸿枫,黄全福,孙觉,程振明,张汉林,林贻俊,潘全贵,李德库,周衍,周行,舒昌乐,胡震中,陈伯余,张厚五,景振中,钟兆楷,文德泽,常州三中高二乙璧,向进,璩兴广,上海敬业中学高三(4)数学小组,沈元亨,周凤君,曾昭中,郑孝贤,陈宝林,卢元伟,上海延安中学高二(3)数理小组,武汉十二中高三(3)杨辉小组,张复兴,上海威海卫路491号林君,刘业田,文功,辽宁实验一中高二 $c.\sigma.$,杨国楧,袁盛贵,上海新力中学高三(1)罗骏森课外小组,上海东昌中学高三(5)祖冲之数理小组.

解答第5题者:潘金才,郭锡悌,赵延光,胡绍义,晏花香等一百七十件,姓名从略.

1958 年第 2 期问题答案

1. 圆 O 的内接梯形 $ABCD$，若 $\angle AOD$ 是直角(图 1)，则其面积等于高的平方.(提出人:浙江嘉兴一中丁雍序)

证 过圆心 O 做梯形 $ABCD$ 两底的垂线交 AB，CD 于 N，M 点，由对称性知 N，M 各平分 AB，CD，即 $AN = NB$，$CM = MD$. 圆周半径

$$AO = DO \qquad ①$$

$\angle MOD + \angle DOA + \angle AON = 180°$，$\triangle ANO$ 的内角和 $\angle NAO + \angle ANO + \angle NOA = 180°$，已知 $\angle ANO = \angle DOA$；$\angle AON = \angle AON$，等量相减得

$$\angle MOD = \angle OAN \qquad ②$$

由直角三角形性质及条件 ①② 得

$$\triangle ANO \cong \triangle OMD$$

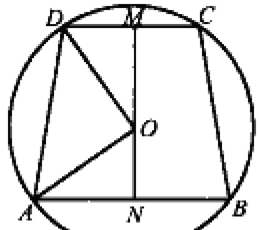


图 1

所以

$$ON = MD, AN = OM$$

$$\text{梯形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot NM = (AN + DM) \cdot NM = NM \cdot NM = (NM)^2$$

证得.

2. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，过 G 作直线分别交 AB，AC 于 K，T(图 2)，那么 $\frac{BK}{AK} + \frac{CT}{AT} = 1$.(提出人:江苏师院 苏意如)

证 由 A 点作 BC 边的中线交于 D，当然 AD 通过重心 G. 过点 B，C 作 AD 的平行线交 KT 的延长线于 E，F，即 $BE \parallel DG \parallel CF$.

因为 D 为 BC 的中点，所以

$$BE + CF = 2DG = AG \qquad ①$$

对顶角 $\angle BKE = \angle AKG$，内错角 $\angle EBK = \angle KAG$. 所以 $\triangle BKE \backsim \triangle AKG$.

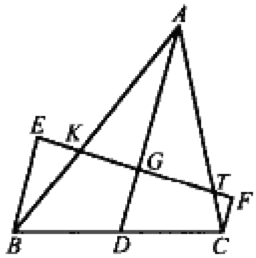


图 2

由对应边成比例得

$$\frac{BK}{AK} = \frac{BE}{AG} \qquad ②$$

同理可得 $\triangle CFT \backsim \triangle AGT$，那么

$$\frac{CT}{AT}=\frac{CF}{AG} \quad ③$$

② + ③ 得

$$\frac{BK}{AK}+\frac{CT}{AT}=\frac{BE}{AG}+\frac{CF}{AG}=\frac{BE+CF}{AG}=\frac{AG}{AG}=1$$

3.四边形 $ABCD$,若 $\angle A+\angle C$ 是直角(图 3),则$(AB\cdot DC)^2+(BC\cdot DA)^2=(AC\cdot BD)^2$.(提出人:武昌 朱明章)

证 过 A,D 引直线相交于 P 使 $\angle PAD=\angle BAC$;$\angle PDA=\angle ACB$.联结 BP,于是在 $\triangle APD$ 与 $\triangle ABC$ 中有 $\angle PAD=\angle BAC$;$\angle ADP=\angle ACB$ 所以

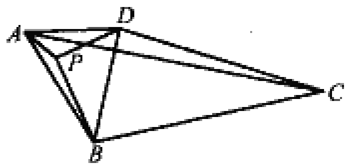


图 3

$$\triangle APD \backsim \triangle ABC \quad ①$$

对应边成比例 $AP:AB=AD:AC$,而又 $\angle BAP=\angle CAD$,所以 $\triangle APB\backsim\triangle ADC$.对应角

$$\angle DCA=\angle PBA \quad ②$$

显然

$$\begin{aligned}\angle BPD&=\angle PAD+\angle PAB+\angle PDA+\angle PBA=\\&\angle BAC+\angle CAD+\angle DCA+\angle ACB=\\&\angle A+\angle C=90^\circ(\text{假设})\end{aligned}$$

又由 ① 与 ② 得

$$AD:AC=PD:BC;AB:AC=PB:DC$$

即 $$BC\cdot DA=AC\cdot PD;AB\cdot DC=AC\cdot PB$$

平方相加,得

$$(AB\cdot DC)^2+(BC\cdot DA)^2=(AC\cdot PB)^2+(AC\cdot PD)^2=AC^2(PB^2+PD^2)$$

在 $\triangle PBD$ 中 $\angle DPB=90^\circ$,所以 $PB^2+DP^2=BD^2$,所以

$$(AB\cdot DC)^2+(BC\cdot DA)^2=(AC\cdot BD)^2$$

4.若 α,β,γ 满足条件:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$$

试证明:不等式$\sqrt{\tan\alpha\tan\beta+5}+\sqrt{\tan\beta\tan\gamma+5}+\sqrt{\tan\gamma\tan\alpha+5}\leqslant4\sqrt{3}$.(四川大学 田景黄,浙江师院高天青选自苏联"数学教学")

证 对于任意实数 a,b,总有

$$(a-b)^2\geqslant0,\text{即 } a^2+b^2\geqslant2ab$$

应用上述事实,明显地成立

$$2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta+5}\sqrt{\tan\beta\tan\gamma+5}\leqslant\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+10$$
$$2\sqrt{\tan\beta\tan\gamma+5}\sqrt{\tan\gamma\tan\alpha+5}\leqslant\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha+10$$
$$2\sqrt{\tan\gamma\tan\alpha+5}\sqrt{\tan\alpha\tan\beta+5}\leqslant\tan\gamma\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta+10$$

由此得到

$$(\sqrt{\tan\alpha\tan\beta+5}+\sqrt{\tan\beta\tan\gamma+5}+\sqrt{\tan\gamma\tan\alpha+5})^2\leqslant 3(\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha)+45$$

从条件 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，显然

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$$

所以

$$\sqrt{\tan\alpha\tan\beta+5}+\sqrt{\tan\beta\tan\gamma+5}+\sqrt{\tan\gamma\tan\alpha+5}\leqslant\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

5. 若 $0<\alpha_i<\pi(i=1,2,\cdots,n)$，试证明：$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{n}<\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$.（石水选自苏联“数学教学”）

证　我们分两步来说明.

(1) 我们首先证明不等式对 $n=2^k$ 时成立，为此我们采用数学归纳法.

当 $k=1$（即 $n=2$）且 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时，$\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}<1$，从而

$$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{2}=\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}<\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

归纳法假定当 $k=m$ 时，不等式成立，即

$$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{2^m}}{2^m}<\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2^m}}{2^m}$$

要证当 $k=m+1$ 时，不等式亦成立，假定 $0<\alpha_i<\pi(i=1,2,\cdots,2^{m+1})$，那么

$$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{2^m}}{2^m}+\frac{\sin\alpha_{2^m+1}+\sin\alpha_{2^m+2}+\cdots+\sin\alpha_{2^{m+1}}}{2^m}\right)<$$
$$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2^m}}{2^m}+\sin\frac{\alpha_{2^m+1}+\alpha_{2^m+2}+\cdots+\alpha_{2^{m+1}}}{2^m}\right) \quad ①$$

令

$$\frac{\alpha_1\alpha_2+\cdots+\alpha_{2^m}}{2^m}=\alpha,\frac{\alpha_{2^m+1}+\alpha_{2^m+2}+\cdots+\alpha_{2^m+1}}{2^m}=\beta$$

式 ① 可写为

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\leqslant\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}$$

(2) 现在我们证明对于任意自然数 n，不等式成立. 已知 $0<\alpha_i<\pi(i=1,2,\cdots,n)$，对于给定的 n，我们可以补足 r 个 $\alpha_{n+j}(j=1,2,\cdots,r)$，使 $n+r=2^k$，而我们可取

$$\alpha_{n+1}=\alpha_{n+2}=\cdots=\alpha_{n+r}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$$

应用第一部分的结果，我们知道

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{n+r}=$$

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n+r\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}<$$

$$2^k\sin\frac{(n+r)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}{(n+r)^n}=(n+r)\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}=$$

$$n\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}+r\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$$

消去 $r\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$，两边再除以 n，即得

$$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{n}<\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$$

注 如果 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$，则不等号变成等号.

6. 设 x,y 为正有理数，试解方程 $x^4=4(x+y)y$.（提出人：江西黎和中学高三(1)π数学小组）

解 从原方程得

$$4y^2+4xy-x^4=0$$

利用求根公式求根

$$y=\frac{x}{2}(-1\pm\sqrt{1+x^2})\tag{a}$$

因为 x,y 为正有理数，所以上式的负号必须弃去.

令 x 为既约分数 $\frac{p}{q}$，代入式(a)中

$$y=\frac{p}{2q}(-1+\frac{1}{q}\sqrt{p^2+q^2})\tag{b}$$

这里我们知道 p 与 q 是互质的正整数，因此由(b)可知，p^2+q^2 必须是一个平方数，令

$$p^2+q^2=r^2 \qquad ①$$

因为 $(p,q)=1$，所以 p 与 q 中至少有一个（例如 p）必定是奇数，由①得

$$p^2 = r^2 - q^2 = (r + q)(r - q) \quad ②$$

设 $r + q$ 与 $r - q$ 的最大公因数是 d,那么

$$r + q = ad, r - q = bd \quad ③$$

以 ③ 代入 ② 中得

$$p^2 = abd^2 \quad ④$$

因为 a,b 互质,则 a 与 b 必定都是完全平方数(因为两个互质的数,只有它们各都是完全平方数时,它们的积才可以是一个平方数),令 $a = m^2, b = n^2$,代入 ④ 中

$$p = mnd \quad ⑤$$

由 ③ 中两式相减

$$q = \frac{a - b}{2}d = \frac{m^2 - n^2}{2}d \quad ⑥$$

由 ③ 中两式相加

$$r = \frac{a + b}{2}d = \frac{m^2 + n^2}{2}d \quad ⑦$$

由于 p 是奇数,从 ⑤ 中知 m, n, d 都是奇数,比较 ⑤ 与 ⑥,d 必定等于 1(因为 p,q 互质).由于 a,b 互质,从等式 $a = m^2, b = n^2$ 中知 m,n 也互质,而且从 ③ 知 $a > b$,因此 $m > n$.

综合上述,设 m,n 为互质的奇数,并且 $m > n$,那么

$$p = mn, q = \frac{m^2 - n^2}{2}, r = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

所以

$$x_1 = \frac{p}{q} = \frac{2mn}{m^2 - n^2}, y_1 = \frac{p}{2q}\left(-1 + \frac{r}{q}\right) = \frac{2mn^3}{(m^2 - n^2)^2}$$

当然从 ① 知可以使 $p = \frac{m^2 - n^2}{2}, q = mn$.所以

$$x_2 = \frac{m^2 - n^2}{2mn}, y_2 = \frac{(m + n)(m - n)^3}{8m^2m^2}$$

例如:当 $m = 3, n = 1$ 时,则

$$x_1 = \frac{3}{4}, y_1 = \frac{3}{32}; x_2 = \frac{4}{3}, y_2 = \frac{4}{9}$$

当 $m = 5, n = 3$ 时,则

$$x_1 = \frac{15}{8}, y_2 = \frac{135}{128}; x_2 = \frac{8}{15}, y_2 = \frac{8}{225}$$

7. 设 α, β, γ 为方程 $x^3 + px + q = 0$ 之根,试证:$60(\alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7)^2 = 49(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)(\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5)$.(提出人:内蒙古

呼和浩特二中 谢毓祥)

证 α,β,γ 为方程 $x^3+px+q=0$ 的根,由根与系数关系得

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & ①\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p & ②\\ \alpha\beta\gamma=-q & ③\end{cases}$$

式①的平方减去式②的二倍得

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2p \quad ④$$

又

$$(\alpha+\beta)^3=-\gamma^3,\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3\alpha\beta\gamma=-3q$$

式④的平方减去式②平方的二倍得 $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2p^2$,又

$$(\alpha+\beta)^5=-\gamma^5,\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=5pq$$

同理

$$(\alpha+\beta)^7=-\gamma^7,\alpha^7+\beta^7+\gamma^7=7p^2q$$

将以上结果整理,即得题证.

8. 求下列级数之和 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{x^{2^{n-1}}+1}$.(提出人:北京徐仲平)

解 对任何自然数成立

$$\frac{1}{x^n-1}-\frac{2}{x^{2^n}-1}=\frac{1}{x^n+1}$$

那么

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+1}+\cdots+\frac{1}{x^{2^{n-1}}+1}=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)+$$

$$\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{4}{x^4-1}\right)+\cdots+\left(\frac{2^{n-1}}{x^{2^{n-1}}-1}-\frac{2^n}{x^{2^n}-1}\right)=$$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2^n}{x^{2^n}-1}$$

1958 年第 2 期问题解答者姓名

解答第 1,2,3,4,5,6,7,8 题者:黄水源,张远南,陈传孟.

解答第 1,2,3,4,5,7,8 题者:余成.

解答第 1,2,3,4,6,7,8 题者:武汉三十三中高二(3) 赫诺尔数学小组,陈非非,刘法绥.

解答第 1,2,3,4,6,7 题者:朱襄生,江苏崐山中学高二乙 χ,ψ,ω 数学小组.

解答第 1,2,3,4,7,8 题者:武汉三十三中高二(3) 裴蜀数学小组.

解答第 1,2,4,5,7,8 题者:康敏.

解答第 1,2,3,4,7 题者:李才贵.

解答第 1,2,3,4,8 题者:武汉十四中高二(六) 三人数理小组.

解答第 1,2,3,7,8 题者:上海敬业中学高二(4) 刘德民数学分子团,上海敬业中学高二(4)αβγ 三刘丁数学小组.

解答第 1,2,4,7,8 题者:许贤定,林邦荣.

解答第 1,2,4,6 题者:徐仲平.

解答第 1,2,4,7 题者:钱贻策,黄海元,温鹏翔,任兰泉,黄文宣,安徽全椒县$\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}$ 数学小组,张馨等.

解答第 1,2,4.8 题者:曾志惠.

解答第 1,2,6,7 题者:许传根,朱极佑.

解答第 1,2,7,8 题者:武汉三十三中高二(3) 裴蜀数学小组,李可丰.

解答第 1,3,7,8 题者:王普,张方平.

解答第 1,4,5,8 题者:陈尤昊.

解答第 1,4,7,8 题者:任德祥,许善孙,王启希.

解答第 1,2,3 题者:陈騄.

解答第 1,2,4 题者:狄建华,浦校忠.

解答第 1,2,7 题者:成都交通路 59 号读者,涂光泽,李太林,盛海滨.

解答第 1,2,8 题者:王守志.

解答第 1,4,5 题者:陈忠明.

解答第 1,2 题者:长沙九中高中十二班红色数学小组,北京师大附中高中二(2)A,B 小组,李兴伦,张光启,胡官锐,刘培德,常荣卿,毛益国,梅钢清,方一俊,张延诰,黄鑫煜,程龙,李西山,杨本树,东方,刘宝珠,王享士,林骏,严善衍,南安国光中学求知数学小组,叶玉澄,江苏吴县中学高二(2)Decartes 数学小组,

江苏吴县中学高二(1) 哥伦布数学爱好者小组,黄金福,孙觉,刘宗泽,黄律,孙丽卿,于宏,吉林一高中56,3班30号,江礼伦,济南三中高二牛顿数理研究小组,杨占衡,仃奋,南安国光中学高二(3)"南华"数学组,王俊生,陈进,上海敬业中学高二$\left(y_{\max}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+4\right)$高斯小组,朱为定.

解答第1,3题者:刘元甫,蔡传图.

解答第1,5题者:朱永作.

解答第1,6题者:何大国.

解答第1,7题者:蒋福敏,庄中云,彭祖仁.

解答第1,8题者:北京师大附中高一(2) 伽罗瓦数学小组,谢溶华.

解答第1题者:上海61中高一(2) 几何小组,黄顺英数学小组,江西吉安师范二(1)21号,张华民,刘万生,蒋甫卿,陈国俊,李世才,张畛寰,方文德,方正域,范传福,雨村,刘源西,徐世良,潘政奇,彭大恺,蔡宏彬,何惠明,耿学功,黄弈华,罗星望,张有荣,叶飞来,叶建兴,杨梓辉,余建心,谢顺泰,徐子江,俞福南,金贵云,康旺盛,吴天德,王鸿钧,薛纪善,廖辉国,杨玉庆,洪昌熊,王译燕,徐徇明,李天生,邵树川,吴让融,胡远仕,陈桂兴,朱纯金,王善潮,郑忠立,熊松年,吴一心,相元良,宗大荣,保安干数学爱好者.

解答第2题者:温俊亭,尤异,沈顾泰.

解答第7题者:王明伦.

解答第8题者:蒋昌木.

提供问题者名单及通信处

成都四川大学　田景黄

上海控江中学高二(3)　吴尧

浙江师院　高天青

武汉市三十三高二(三)　裴蜀数学小组

浙江省宁波五中高三(2)　陈传孟

江苏昆山中学高二乙,χ,ψ,ω数学小组

江苏师院　鲍多益

同济中学　陆忠明

1958 年 2 月号问题

1. 已知周长及一底角，求作所设圆的内接梯形.(安兆国提)

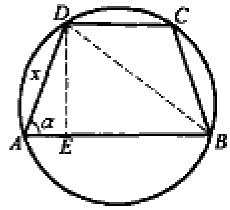


图 1

解 假设所设圆的直径为 d，所求的内接梯形为 $ABCD$，其中 $AB \mathbin{/\!/} DC$，$AB+BC+CD+DA=2S$ 为已知长，$\angle A=\alpha$ 为已知角(图 1).

我们无妨假定 $\alpha<90°$. 引 $DE\perp AB$ 于 E，易知

$$EB=\frac{1}{2}(AB+CD)$$

而 $AD=BC$，可见 $AD+EB=S$. 令

$$AD=x$$

则

$$AE=x\cos\alpha,EB=S-x$$

又

$$BD=d\sin\alpha$$

由 $AD^2-BD^2=AE^2-EB^2$，代入得

$$x^2-d^2\sin^2\alpha=x^2\cos^2\alpha-(S-x)^2$$

简化后，为

$$(1+\sin^2\alpha)x^2-2Sx+S^2-d^2\sin^2\alpha=0$$

解之，得

$$x=\frac{S\pm\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2}}{1+\sin^2\alpha}$$

由此可见 x 可以作圆，于是得作法如下.

在所设圆内作一弦 $BD=d\sin\alpha$，又作一弦

$$AD=\frac{S\pm\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2}}{1+\sin^2\alpha}\text{(作图过程从略)}$$

联 AB. 更作弦 DC 使平行于 AB，最后联 BC，则 $ABCD$ 就是所求的梯形.

证明从略.

因 $\angle BCD=180°-\alpha>90°$，故

$$AD=BC<BD$$

又 $BD<\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$. 可见本题有解的条件为

$$0<x<d\sin\alpha$$

且

$$\frac{S}{d}>\sin\alpha \qquad ①$$

现在分三种情形推究如下：

(1) 若 $d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2>0$，即

$$\frac{S}{d}<\sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

则 x 为实数.此时应从两方面进行考察：

第一，要考察不等式

$$\frac{S+\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2}}{1+\sin^2\alpha}<d\sin\alpha \tag{②}$$

成立的条件.为此，将②变为

$$\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2}<d\sin\alpha(1+\sin^2\alpha)-S \tag{③}$$

因③左边为正数，故两边平方，并简化之，得

$$S^2-2dS\sin\alpha+d^2\sin^4\alpha>0$$

而 $f(S)=S^2-2dS\sin\alpha+d^2\sin^4\alpha$ 的根为 $d\sin\alpha(1\pm\cos\alpha)$

可见
$$\frac{S}{d}<\sin\alpha(1-\cos\alpha) \tag{④}$$

或
$$\frac{S}{d}>\sin\alpha(1+\cos\alpha) \tag{⑤}$$

由此觉察到④和①不能并立，而当⑤成立时，欲②成立，由③右边可知必须

$$d\sin\alpha(1+\sin^2\alpha)-S>0$$

即

$$\frac{S}{d}<\sin\alpha(1+\sin^2\alpha) \tag{⑥}$$

于是⑤和⑥是①和②成立的条件.

第二，要考察不等式

$$S-\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2}>0 \tag{⑦}$$

及

$$\frac{S-\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2}}{1+\sin^2\alpha}<d\sin\alpha \tag{⑧}$$

同时成立的条件.将⑦写作

$$S>\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2}$$

两边平方并整理之，得

$$\frac{S}{d}>\sin\alpha$$

因知①和⑦同为真伪.次将⑧变为

$$S-d\sin\alpha(1+\sin^2\alpha)<\sin\alpha\sqrt{d^2(1+\sin^2\alpha)-S^2} \tag{⑨}$$

若 ⑨ 左边的绝对值小于右边，则两边平方并整理后，得

$$S^2 - 2dS\sin\alpha + d^2\sin^4\alpha < 0$$

此时

$$\sin\alpha(1-\cos\alpha) < \frac{S}{d} < \sin\alpha(1+\cos\alpha) \qquad ⑩$$

不难觉察，⑩ 是 ⑨ 成立的条件，因而是 ⑧ 成立的条件. 若 ⑨ 左边的绝对值大于右边，则

$$S^2 - 2dS\sin\alpha + d^2\sin^4\alpha > 0$$

此时

$$\frac{S}{d} < \sin\alpha(1-\cos\alpha) \qquad ④$$

或

$$\frac{S}{d} > \sin\alpha(1+\cos\alpha) \qquad ⑤$$

其中 ④ 和 ① 不能并立，而当 ⑤ 成立时，欲 ⑧ 成立，由 ⑨ 左边可知必须

$$S - d\sin\alpha(1+\sin^2\alpha) < 0$$

即

$$\frac{S}{d} < \sin\alpha(1+\sin^2\alpha) \qquad ⑥$$

于是 ⑤ 和 ⑥ 是 ①⑦⑧ 成立的条件.

综观以上所述，可知在 $\frac{S}{d} < \sqrt{1+\sin^2\alpha}$ 的条件下，若

① $\frac{S}{d} \leqslant \sin\alpha$，则无解；

② $\sin\alpha < \frac{S}{d} < \sin\alpha(1+\cos\alpha)$，则有一解；

③ $\frac{S}{d} = \sin\alpha(1+\cos\alpha)$，则无解；

④ $\sin\alpha(1+\cos\alpha) < \frac{S}{d} < \sin\alpha(1+\sin^2\alpha)$，则有二解；

⑤ $\frac{S}{d} = \sin\alpha(1+\sin^2\alpha)$，则有一解；

⑥ $\frac{S}{d} > \sin\alpha(1+\sin^2\alpha)$，$\frac{S}{d} > \sin\alpha(1+\cos\alpha)$，则无解.

(2) 若 $d^2(1+\sin^2\alpha) - S^2 = 0$，即

$$\frac{S}{d} = \sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

则

$$x = \frac{S}{1+\sin^2\alpha}$$

欲不等式

$$\frac{S}{1+\sin^2\alpha} < d\sin\alpha$$

成立，只需

$$\frac{S}{\frac{S^2}{d^2}} < d\sin\alpha$$

从而
$$\frac{S}{d} > \frac{1}{\sin\alpha} > \sin\alpha$$

故在$\frac{S}{d} = \sqrt{1+\sin^2\alpha}$ 的条件下，如果$\frac{S}{d} > \frac{1}{\sin\alpha}$，便有一解；否则无解.

(3) 若 $d^2(1+\sin^2\alpha) - S^2 < 0$，即

$$\frac{S}{d} > \sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

则 x 为虚数，故此时无解.

2. 已知一立方体，要截去一角使截面是一个直角三角形，有办法吗？（沈青提）

解法1 如图2，设 AB，AC，AD 是已知立方体的三条棱，截面截这三条棱于 P，Q，R 三点.

在 $\triangle PQR$ 中，如果 P 角是直角，则 $PQ \perp PR$. 在平面 ABD 上，作 $PE \perp AB$，则 $PE \perp$ 平面 ABC，因而 $PQ \perp PE$. PQ 同时垂直于 PR 和 PE，那么 $PQ \perp$ 平面 ABD. 但这是不可能的，因为已知 $AQ \perp$ 平面 ABD. 可见 P 角不能是直角. 同理，Q 角和 R 角也不能是直角.

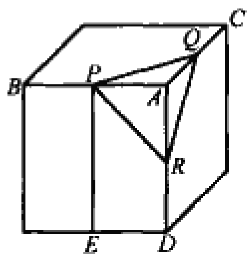


图2

这就是说，$\triangle PQR$ 不能是直角三角形，所以所求的截面无法作成.

解法2 在 $\triangle PQR$ 中，因

$$PQ^2 + PR^2 = 2AP^2 + AQ^2 + AR^2 = 2AP^2 + QR^2 > QR^2$$

故知 P 角是锐角，同理，可知 Q 角和 R 角也是锐角. 于是 $\triangle PQR$ 是锐角三角形. 因此本题无解.

3. 解一次方程组 $\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x + \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)y + \left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)z = 0, k = 0, 1, \cdots, n(n \geqslant 2)$.

解 由第一个和第二个方程（$k = 0,1$）

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)y + \left(1-\frac{1}{2^2}\right)z = 0$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)x + \left(1-\frac{1}{2^2}\right)y + \left(1-\frac{1}{2^3}\right)z = 0$$

解出

$$x=\frac{1}{2}z,y=-\frac{3}{2}z \qquad ①$$

把 x,y 的值代入第 $k+1$ 个方程($k=0,1,2,\cdots,n$)的左端得

$$\left(1-\frac{1}{2^k}\right)x+\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)y+\left(1-\frac{1}{2^{k+2}}\right)z=$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)+\left(1-\frac{1}{2^{k+2}}\right)\right]z=0$$

因此,方程组的每一方程都是前两个方程的结果.故 ① 给出所予方程组的一切解.

4.设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 之间满足下述关系式:

$$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=0$$

求这个三角形的三边 a,b,c 应适合的关系式.

解 因

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B)-\cos\frac{3}{2}(A+B)\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B)+\sin\frac{3}{2}C\right)$$

代入所给等式,得

$$\frac{3}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\cos\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{3}{2}(A-B)+\sin\frac{3}{2}C\right]\cos\frac{3C}{2}=$$

$$\frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}(A-B)\cos\frac{3C}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}=$$

$$\frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}(A-B)\sin\frac{3}{2}(A+B)-\frac{3}{4}\sin C+\frac{1}{4}\sin 3C=$$

$$\frac{3}{4}(\sin A+\sin B)-\frac{3}{4}\sin C-\frac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B)+\frac{1}{4}\sin 3C=$$

$$\frac{3}{4}(\sin A+\sin B-\sin C)-\frac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B-\sin 3C)=$$

$$\frac{1}{4}(3\sin A+3\sin B-3\sin C)-\frac{1}{4}(3\sin A-4\sin^3 A-3\sin B-4\sin^3 B-$$

$$3\sin C+4\sin^3 C)=\sin^3 A+\sin^3 B-\sin^3 C=0$$

但
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

故有
$$\left(\frac{a}{2R}\right)^3+\left(\frac{b}{2R}\right)^3=\left(\frac{c}{2R}\right)^3$$

即
$$a^3+b^3=c^3$$

5."我听见院子里有很多孩子在玩,都是您家的孩子吗?"客人问."不,一共是四家的孩子.我的孩子最多,王家的孩子最少.我表弟的孩子比王家的孩子多,而李家的孩子又比我表弟的孩子多.他们正在踢小足球,可是不够分成每边九个人."主人回答"巧得很".主人接着说:"各家孩子的人数乘起来刚好是我的门牌号数,您不是很喜欢数学吗?您算一下每家孩子各是多少?""真有意思,让我想一想."客人想了一会又说:"我还需要多知道一点,王家只有一个孩子吗?"主人回答了他的问题.这时客人说出了每一家孩子的确数.那么每家各有几个孩子呢?

解 设门牌号数为 N,各家孩子的人数分别是 $a<b<c<d$.那么
$$a+b+c+d<18,\ abcd=N$$

若 $a\geqslant 3$,则 $b\geqslant 4,c\geqslant 5,d\geqslant 6$,而 $a+b+c+d\geqslant 18$.

若 $b\geqslant 5$,则 $c\geqslant 6,d\geqslant 7$,而 $b+c+d\geqslant 18$.

因此必须
$$1\leqslant a\leqslant 2;\ 2\leqslant b\leqslant 4$$

因为客人问王家有几个孩子,因此 N 在 $a=1$ 及 $a=2$ 时都可以表成 a,b,c,d 的乘积.

设 $a=1$,那么 $c+d\leqslant 16-6$.而 $4cd=(c+d)^2-(d-c)^2\leqslant(16-b)^2-1$,因此当 $b=2,3,4$ 时,分别有 $cd\leqslant 48,cd\leqslant 42,cd\leqslant 35$.故 $N=bcd\leqslant 140$.

设 $a=2$,那么 $N\geqslant 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.因此 $120\leqslant N\leqslant 140$.

我们说 N 一定能被40整除,因而 $N=120$.事实上,设 N 不能被5整除,则 $N\geqslant 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6=144>140$.若 N 不能被8整除,则 $N>2\cdot 3\cdot 5\cdot 6=180>140$.不论哪一情形都与 $N\leqslant 140$ 的条件不合,这样,N 可以被40整除,因而 $N=120$.

在 $a=1$ 时,120有两种分解
$$120=1\cdot 4\cdot 5\cdot 6=1\cdot 3\cdot 5\cdot 8$$

在 $a=2$ 时,120只有一种分解
$$120=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$

若 $a=1$,那么主人的回答仍不能使客人得出确切的答案,因此必须 $a=2,b=3,c=4,d=5$.

1958年2月号问题解答者名单

解出1,2,3,4题者:巴子和小米,陈昌楚,王肇新.

解出1,2,3,5题者:唐宗寿.

解出1,2,4题者:上海建平中学$\sum\sum\sum$数学小组,北京101中高三(4)数学小组,张振鑫.

解出2,3,4题者:刘伟人;刘再进,夏承绵;东坡,孙沅,程期远,刘战门,朱明章,陆少华.

解出2,3,5题者:吴江舫.

解出1,2题者:伍哲文小组,温涌源,贾彦宾,徐有庆,梁天骏,周晨.

解出1,3题者:杜志毅毅和张筱琴.

解出2,3题者:倪加誉,陈心钜,魏昌炽.

解出2,4题者:福州四中α,β,γ数学小组,唐同隆;史既济,王士铨,张存谦,李炯,邹中桂,沈培湘,郑桦,巴汉杰,沈振坤和宋宝丰,蒋振淞,何泰来,桂永和,顾鼎锡,陆忠明,柴承尧,李鼎祥,阎家喜,张国柱,朱襄生,苏玉田,刘广祥,张大超,吕哲明.

解出2,5题者:张镛清.

解出3,4题者:胡汉贤,潘科正,吉安高中高斯数学小组,郭光林.

解出3,5题者:张祖腾.

解出1题者:邹志冈和吴国新,蒋镇瀛,沈耀仁与孙善钧与陆钟宣,陈福麟.

解出2题者:张长达,窦荣起,王文术,张肇山,杨厚生,陈中伟,余春熔,项正清,高镇水,朱咏堂,陈兴昭,余新河,荆树汉,林和光,马健敏,张观周等四人,方文德与方正域,刘桂元,蒋永泰,陈玉麟,张景翰,吴京生和胡昭广.

解出3题者:詹光宇,周汉明,柯斌,何立石,毛笃青.

解出4题者:贺士钊,苏铭德,叶訸和包克振,温斯海,歙县中学飞马数学小组,周晨,叶时爽,陈文簱,严承章和朱辰,苏祥,刘占山,刘艺,文国礼,张德明,杨焰,张慧剑,赵振泉和赵源和赵建国,郭传武,朱振佑,王树和,王鉴,黄锡中,上海同济中学高三(3)班$a+bi$数学小组,林贻俊,ЧЪЦ,朱昌平,吴远源,张金全,天津铁路中学高三数学小组.

解出5题者:王正元.

1958 年 3 月号征解问题答案

❖指数和四次方程

1. 解方程:(1)$4^x+6^x=9^x$;(2)$(2x+9)^4+(2x+1)^1=904$.(提出人:上海章萍仙)

解 (1)$4^x+6^x=9^x$,以 4^x 遍除这式两边得

$$1+\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \text{ 即} \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x-1=0$$

于是$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 这式无论 $x\geqslant 0$ 还是 $x\leqslant 0$,恒得$\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 为正. 因此$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,所以 $x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

若把这式右边化为以 10 为底的常用对数,所以

$$x=\frac{\lg(\sqrt{5}+1)-\lg 2}{\lg 3-\lg 2}=\frac{0.208\ 987\ 0}{0.176\ 091\ 3}=1.186\ 81$$

又如以 9^x 遍除原式两边得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-1=0$$

从此得$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 这式无论 $x\geqslant 0$ 还是 $x\leqslant 0$,恒得$\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为正. 因此$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 $x=\log_{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若把这式右边化为以 10 为底的常用对数,所以

$$x=\frac{\lg(\sqrt{5}-1)-\lg 2}{\lg 2-\lg 3}=1.186\ 81\text{(这值与上值相等)}$$

(2)$(2x+9)^4+(2x+1)^4=904$,令 $2x+5=y$,原式变为

$$(y+4)^4+(y-4)^4=904$$

展开括弧化简得

$$y^4+96y^2+196=0$$

由此得

$$y^2=-48\pm\sqrt{48^2+196}=-48\pm 50$$

这式的两根是 $y_1^2=2, y_2^2=-98$,即

$$y_1=\pm\sqrt{2}, y_2=\pm 7\sqrt{2}\mathrm{i}$$

于是得

$$\pm\sqrt{2}=2x+5 \text{ 及 } \pm 7\sqrt{2}\mathrm{i}=2x+5$$

从这两式得出下列的四根 $x_1=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-5), x_2=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+5), x_3=\frac{1}{2}(7\sqrt{2}\mathrm{i}-5), x_4=-\frac{1}{2}(7\sqrt{2}\mathrm{i}+5)$.

❖由内心外心旁心作三角形

2.已知三角形的内心,外心及一个旁心,求作三角形.(提出人:呼和浩特刘鹤)

解 设内心为 I,外心为 O,一个旁心为 I'(其他两个旁心为 I'',I''').以 II' 为直径,M 为圆心,画圆;以 O 为圆心,OM 为半径,画圆.两圆相交于 B,C.延长 II' 交圆 O 于 A,那么 $\triangle ABC$ 即为所求(图1).

因为 I,I' 分别为内心及旁心,故 I,I' 对于所求三角形的两顶点 B,C 都张直角.因而 B,C 在以 II' 为直径的圆上.其圆心就是 II' 的中点 M.由于 B,C 在这圆上,故 $BM=CM$,即 M 在 BC 的中垂线上.但 O 为外心,故 OM 即 BC 的中垂线.再就圆 O 说,$\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MC}$,所以 II' 为 $\angle A$ 的平分线.

讨论 (1)若 I,O,I' 不同在一条直线上

①OM 不垂直于 II' 时,$OM>\frac{1}{2}IM$,有一解;$OM\leqslant\frac{1}{2}IM$,无解.②$OM\perp II'$ 时,无解.

(2)若 I,O,I' 同在一条直线上,且 $OM>\frac{1}{2}IM$ 时,所作的是等边三角形.

(3)若 I 与 O 重合时,所作的是正三角形.

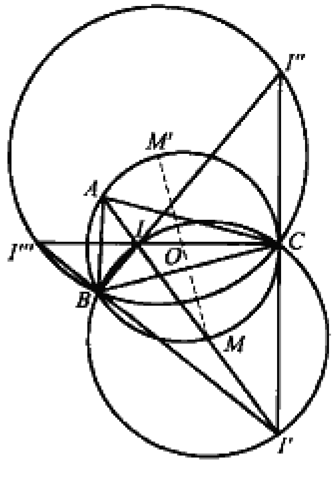


图1

❖余弦式

3. 设 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta, y+\frac{1}{y}=2\cos\psi$,求证:

(1) $x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\theta$.

(2) $x^my^n+\frac{1}{x^my^n}=2\cos(m\theta+n\psi)$.

(提出人:大连 张世宽)

解 (1) $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$,即 $x^2-2x\cos\theta+1=\theta$.由此得

$$x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

于是

$$x^m=\cos m\theta\pm i\sin m\theta, x^{-m}=\cos m\theta\mp i\sin m\theta$$

所以 $x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\theta$.

(2) 和上面同样

$$y^n=\cos n\psi\pm i\sin n\psi, y^{-n}=\cos n\psi\mp i\sin n\psi$$

因此

$$x^my^n=(\cos m\theta\pm i\sin m\theta)(\cos n\psi\pm i\sin n\psi)=\cos(m\theta+n\psi)\pm i\sin(m\theta+n\psi)$$

$$x^{-m}y^{-n}=(\cos m\theta\mp i\sin m\theta)(\cos n\psi\mp i\sin n\psi)=\cos(m\theta+n\psi)\mp i\sin(m\theta+n\psi)$$

所以 $x^my^n+\frac{1}{x^my^n}=2\cos(m\theta+n\psi)$.

❖三角函数的级数

4. 若 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 成等差级数,那么 $\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$ 及 $\cos A\cot\frac{A}{2},\cos B\cot\frac{B}{2},\cos C\cot\frac{C}{2}$ 都成等差级数.求证:若 a,b,c 成调和级数,那么 $\sin^2\frac{A}{2},\sin^2\frac{B}{2},\sin^2\frac{C}{2}$ 亦成调和级数.(提出人:南京雷宗焕及上海孙格)

解 (1) 因为 $a-b=b-c$,应用三角公式得

$$2R\sin A-2R\sin B=2R\sin B-2R\sin C$$

即

$$\sin A-\sin B=\sin B-\sin C$$

即

$$2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

已知 $A+B+C=\pi$,得

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{\pi-C}{2}=\sin\frac{C}{2},\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$$

所以上式变为

$$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

即 $\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

但 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\neq 0$,于是

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

即

$$\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}$$

所以 $\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$ 成等差级数.

(2) 因为 $2b=a+c$,应用三角公式得 $4R\sin B=2R\sin A+2R\sin C$,即

$$2\sin B=\sin A+\sin C$$

但 $\sin\frac{A}{2}\neq 0,\sin\frac{B}{2}\neq 0,\sin\frac{C}{2}\neq 0$,于是

$$\frac{4\sin^2\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

即

$$2\sin^2\frac{B}{2}\cot\frac{B}{2}=\sin^2\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\cot\frac{C}{2}$$

即

$$\frac{2(1-\cos B)}{2}\cot\frac{B}{2}=\frac{1-\cos A}{2}\cot\frac{A}{2}+\frac{1-\cos C}{2}\cot\frac{C}{2}$$

即 $2\cot\frac{B}{2}-2\cos B\cot\frac{B}{2}=\left(\cot\frac{A}{2}-\cos A\cot\frac{A}{2}\right)+\left(\cot\frac{C}{2}-\cos C\cot\frac{C}{2}\right)$

由前已知 $2\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}$,于是

$$2\cos B\cot\frac{B}{2}=\cos A\cot\frac{A}{2}+\cos C\cot\frac{C}{2}$$

所以 $\cos A\cot\frac{B}{2}$,$\cos B\cot\frac{B}{2}$,$\cos C\cot\frac{C}{2}$ 成等差级数.

(3) 因为 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$,即

$$\frac{2s}{b}=\frac{s}{a}=\frac{s}{c}\left(式中\ s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

即
$$\frac{2s}{b}-2=\frac{s}{a}-1+\frac{s}{c}-1$$

即
$$\frac{2s-2b}{b}=\frac{s-a}{a}+\frac{s-c}{c}$$

但 $\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}\neq 0$,于是

$$\frac{2(s-b)}{b}\cdot\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{s-a}{a}\cdot\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}+\frac{s-c}{c}\cdot\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

即

$$\frac{2ac}{(s-a)(s-c)}=\frac{bc}{(s-b)(s-c)}+\frac{ab}{(s-a)(s-b)}$$

即 $\frac{2}{\sin^2B}=\frac{1}{\sin^2A}+\frac{1}{\sin^2C}$,所以 $\sin^2A$,$\sin^2B$,$\sin^2C$ 成调和级数.

❖三角多项式

5. 求证:(1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin k\alpha=\frac{\sin\alpha+\sin n\alpha-\sin(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$,式中 $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin k\alpha=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha$.

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\alpha=\frac{1-\cos\alpha+\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$,式中 $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\alpha=1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha$.

解 (1) 因为 $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$,于是

$2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\cdots+2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=$

$\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}+\cos\frac{5\alpha}{2}-\cos\frac{7\alpha}{2}+\cdots+$

$\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}$

因得

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha = \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\sin k\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$$

(2) $2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cdots +$
$2\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} +$
$\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{7\alpha}{2} - \sin\frac{5\alpha}{2} + \cdots +$
$\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}$

因得

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha = \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$$

1958年3月号问题征解解答者名单

解答1,2,3,4,5题者:周晨,黄茂堂,沈繁,方妖森,方妖烽,时永嘉,上海延安中学高三(3)力学竞赛小组,上海徐汇中学高三(3)数学小组,上海向明中学高二(6)数学小组,温鹏翔,上海中学高三(3)数学小组,朱永作,陈明亨,水乃翔,郑懋荣,江世鑫,周国銮,上海日晖中学高三(4)数学小组,王祖权,杨厚生,茹仲贤,丁呈机,赵启中,刘有年,广东台山端芬中学尤拉数学小组,柴承尧,武汉十四中高三四祖暅数学小组,武汉十四中高三(一)GS数理小组,上海新建中学王顾程,上海成都北路同寿坊第二数理小组,张启锡,戴守濂,郑国鑫,何泰来,安徽全椒县式化壹中家,李相贤,马惠生,上海北虹中学高三(1)数学小组,龚乃杰,江西吉安高中数学小组,长沙五中高二十二班数学爱好者,杜韵秋,戴世杰,吴荫会,丁启贤,截静安,刘根洪,傅烨,高赛佚,谢毓祥,上海翔殷路小学M.J.R.,李懋行,夏永绵,游一中,范秉椿,陆菊生,武汉十四中高三(二)鸭子数学小组,朱伟清,黄小云,陈钟锜,上海吴淞路616弄3号数理爱好者,李太林,刘广祥,田野,杨浩生,广州广雅中学高二已数学组,张海祥,李师正,赵长安,陈成昊,上海同济中学高三(3)$a+bi$数学小组,河南汲县一中高三(4)祖冲之数学小组,王普,柳重堪,上海五十八中高三(二)数学小组,上海南郊中学高三数学兴趣小组,上海向群中学高三(2)数学兴趣小组,上海文建中学高三(3)数学小组,江苏如皋中学高二(二)1620数学爱好者,扬州中学高三(八)五人小组,许炽雄,虞鑫钜,苗永温,施伯赛.

解答第1,2,3,4题者:朱襄生,上海向明中学高一数学小组,高思,丁金泉,吴伟贤,朱彦成.

解答第1,2,3,5题者:楼诗风,上海七宝中学高二(1)吴林数学小组,江苏师院数学系Tricly数学小组,徐政武,赣州溏溪路67号,上海同济中学高三(3)321542.

解答第1,2,4,5题者:邵伟达,上海市东中学高二(6)sin(π/2)数学研究小组,杨世钦,史树中,刘宝珠.

解答第1,3,4,5题者:崔剑敏,丁育胜,仇福庭,陆忠明,思仲,思修,王掌发,马国欢,462658,朱报佑,陈兴昭,杜志毅,张筱琴,吴声震,吕哲明,吕时明,安徽全椒县西格玛数学小组,陈叔良,姚良华,南京十一中高三(2)数学小组,内蒙古呼和浩特二中(十)蓓蕾小组,蹇人宜,林正名,武汉三十三中高二(1)高斯数学小组,徐桂根,巴汉杰,薛水生,陆培荣,邵贻仁,邹志鸿,喻家斌,陈启浩,

胡敦友，叶文陵，吴元鸿，安徽全椒$\sum\pi\int$数学小组，郝长城，齐东旭，徐文周，上海东昌中学高三(1)$\sum\pi$数学小组，上海徐汇中学高二数学小组，吴遵宪，刘树仁，刘福恒，张禄度，姜忠生，陈忠颉，汤南人，吴勤勤，钱顺南，上海复兴中路239弄27号数学爱好者，上海时代中学高三(4)爱因斯坦物理小组，福建角尾农业中学数学组，福州四中高三(1)αβγ数学小组，南京师院Tartaglia数学小组，何绍基，周知立，杨春益，上海敬业中学高三(4)数学小组，江西泰和中学高三(一)π数学小组.

解答第2,3,4,5题者：李大甲，钱未末，广州十七中高三(乙)数学爱好者，王政存，马纪良，罗维崑，韩念国，杨桂臣，关志仁，郭达民，陈非非，张敦琄，雷英果，周维鹏，胡久稔，张运筹，上海五四中学高三(6)12人红专小组，潘福钟，陈鹤鸣，陈振威，王泽涵，郭中海，陆明时，许树珊，上海冈极人，谢雨路，李鸿昌，陈传华，曹重光，康玉祥，黄海元，许传根，盛沛根，盛沛栋，盛沛梁，谢宰东，姜世昌，蒲乙高，潘以德，张传福，幻国荫，李石，北京二十六中高二(4)班，朱川，魏柏良，方文德，方正域，余成，常州三中高二乙璧，江西赣州十二中高三数学研究组，南京三中高三甲爱因斯坦数理小组，汤瑞士，陈章维，司徒英颐，解答第三个题者：吉林九中高二(1)31号，上海嵩山中学高二(3)数学报编辑部，天津三中高三(1)C.D.E.数学组，江苏兴化中学π数学小组，湖北孝感高中三(5)A.P.数学小组，朱庆余，南通海门常乐四社新农民，章功远，九江二中数学爱好者，李艺等一百三十七件，姓名从略.解答第二个题者：曹丽芳，武汉一中高二(1)张衡数学小组，向大江，湖南邵阳二中高24班数学组，江苏吴县中学高二(2)笛卡儿数学小组，安徽歙县中学高二(1)金星数学小组，玉兰，玉蓉，亢瑾，广西柳州兴仁西路122-1号，沈鹤初，何元卿，丁雍序，福建晋江二中高二(4)数学爱好者，石家庄师院W学生，四川三台中学，天津十九中高三居里数学小组，黑龙江双城兆麟中学(19)xy数学小组，江苏常州二中高三(1)朝阳数学小组，四川邛崃中学叶时爽数学爱好者，任奉祥等一百四十三件，姓名从略.解答一个题者：沈阳三十五中高十一班二同学，无锡一中高三甲跃进数学小组，辽宁闾山数学研究小组，长沙师院附中，沈阳北关民办学校3/4数学小组，上海复兴中学高一(5)毕达哥拉斯数学小组，辽宁锦州工农速中高中2，徐森耀，武昌实验中学高一(4)读者，常州三中祖暅数学小组，江西吉安高中跃进志高数学小组，湘西第二民族师范，长春十二高中二年六班四人小组，上海控江中学勾股弦数学小组，苏保根，山西大同一中高十五班祖冲之数学小组，余秉彬，管长河，崇婷，江苏高邮中学55213，辽宁省实验中学，喻畯，建南安国光中学求知数学小组，李芳莉等一百一十三姓名从略.

1958 年 3 月号小知识问题答案

❖祖暅公理

1. 什么叫做“祖暅公理”，“祖暅开立圆”？（提出人：武汉市鲜于方圣）

答 “祖暅公理”是：夹在两个平行平面间的两个几何体，如果被平行于这两个平面的任何平面所截得的两个截面的面积都相等．那么，这两个几何体的体积相等．

例如在图 1(a) 中的两个体，如果被平行于平面 M 的任何平面截得的两个截面的面积都相等，即五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的面积 $=\triangle P_1Q_1R_1$ 的面积，五边形 $A_2B_2C_2D_2E_2$ 的面积 $=\triangle P_2Q_2R_2$ 的面积，等．那么这两个体的体积都相等．

这个定理是我国古代数学家祖暅（六世纪人）发现的．他把它当作公理来使用，直到十七世纪意大利数学家卡瓦雷利（1598—1647）才提出这个定理，已较祖暅迟了一千多年．卡氏并没有加以证明．

“祖暅开立圆”，就是用“开立方”法．由已知球的体积以求直径的法子．李淳风注九章算术少广章“开立圆”，说道：“祖暅开立圆术，是以 21 乘球的体积，用 21 去除，再开立方，即得出球径”．设 $V=$ 球的体积，$D=$ 球的直径．因为 $V=\frac{\pi}{6}D^3$，以 $\pi=\frac{22}{7}$ 代入，得 $V=\frac{11}{21}D^3$．所以 $D=\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$．

祖暅求球的体积，已应用了一个公理：“某一个立体的体积，可由无穷小量求和的方法求得”．他的求积方法如下：取一个正立方体，如图 1(b) $OYBXADCZ$．

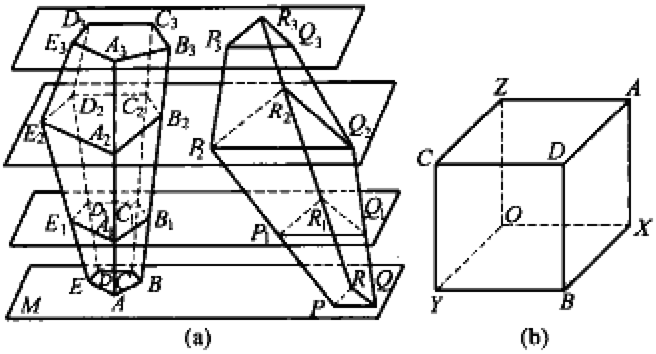


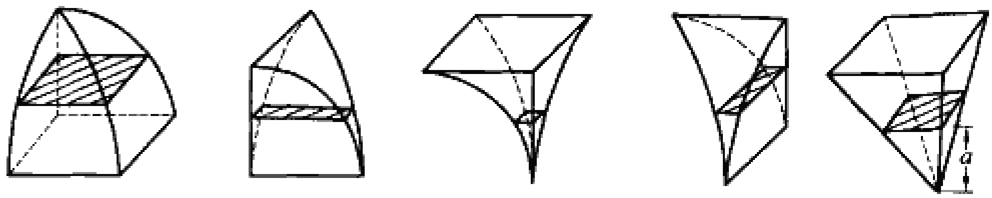
图 1

古法把立方体定位,称 O 左后下,Y 左前下,Z 左后上,C 左前上,D 右前上,B 右前下,A 右后上,X 右后下,然后以 OY 为轴,正立方体的边为半径作一个纵的圆柱面,把正立方体分为两部分.

这两部分再合起来.又以 OX 为轴,正立方体的边为半径,同样作一个横的圆柱面.于是这正立方体分成四部分:一个叫内棋(在纵剖圆柱面和横剖圆柱面之内).三个叫外棋(在纵剖圆柱面和横剖圆柱面之外).

把这四个棋又并拢来成为原来的正立方体,然后以一平行平面横断,得余高 $= a$,内棋断上方的一边 $= b$,本方之数(即正立方体的边) $= r$,由图知 $a^2 + b^2 = r^2$,余高自乘 $= a \times a = a^2$,本方之幂 $= r^2$,即 $b^2 = r^2 - a^2$(b^2 即为图2(a)的横截面).

外四棋的横断面之总和是:(a)(b)(c)(d) 四个横断面的总和等于 r^2.



(a) (b) (c) (d) (e)

图 2

由上面知道,(a) 的横断面 $= b^2$,(a)(b)(c)(d) 横断面的和 $= r^2$,$r^2 - b^2 = a^2$(余高自乘),即(b)(c)(d) 各横断面的和等于 a^2,在 O 到 r 之间不论 a 为何值,上述关系都能成立.

其次,如果取一个高和底边相等的阳马(就是方锥)倒立起来,横截去上,和上述的外三棋来比较它们的等高处横断面的面积,如高为 a,得横断面的面积为 a^2,如图(e).

"缘幂势既同":

(1) 势同　指界于二平行平面之间的两个立体,被任一平行于这二平行平面的平面相截.

(2) 幂同　若两截面面积恒相等,则"积不容异".那么两个立体的体积必相等.

因此上面(b)(c)(d) 的横断面 = (e) 的横断面.

势同又幂同,故三个外棋的体积 = 阳马的体积.

阳马的体积 $= \frac{1}{3}r^3$(与正立方锥体积公式同),也就是三个外棋的体积 $\frac{1}{3}r^3$,正立方体的体积 $= r^2$.所以一个内棋的体积 $= r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$.

八个内棋拼起来叫“合盖”(拼法是将内棋相同的面合起来,形状像一个合盖).

合盖的体积 $= 8 \times \frac{2}{3}r^3 = \frac{2}{3}(2r)^3$.

现在知道:合盖的体积 : 圆球的体积 = 方幂率 : 圆幂率 $= 4 : \pi$.

所以圆球体积 $= \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3}(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

❖人造卫星上看地面

2.问人造卫星要飞离地面多高,才可以看到地球表面积的六分之一?(提出人:四川邛崃 叶时爽)

答 设 O 为地心,ADB 为地面,P 为卫星,$OA = OD = R$(地球半径),$DC = h$,$PD = H$(卫星距地面的高).由图3,$PA \perp OA$,$PO \perp AB$,球带 $ADBC$ 的面积 $= 2\pi Rh$,地球面积 $= 4\pi R^2$,依题意 $2\pi Rh = \frac{4\pi R^2}{6}$,所以 $h = \frac{R}{3}$.因为 $\triangle PAO \backsim \triangle ACO$ 得 $\frac{PO}{AO} = \frac{AO}{CO}$,即 $\frac{R+H}{R} = \frac{R}{\frac{2R}{3}}$.解这式得

$$H = \frac{R}{2} \quad ①$$

如要求出具体的数值,可如下计算.

因为地球的平均直径:$R = 6\ 371.2$ km,得

$$H = 3\ 185.6 \text{ km} \quad ②$$

地球的表面积 $= 4\pi R^2 = 4\pi(6\ 371.2)^2(\text{km}^2) = 510\ 000\ 000(\text{km}^2)$

所以

$$\text{球带 } ADB \text{ 的面积} = 2\pi Rh = \frac{2\pi}{3}R^2 = \frac{1}{6} \times \text{地球面积} = 85\ 020\ 000\ (\text{km}^2) \quad ③$$

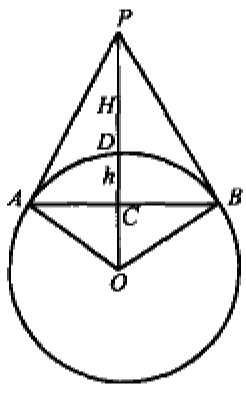


图3

又 $\cos\angle AOC = \frac{2}{3}$,查表得 $\angle AOC = 48.2°$.应用这个数值,求得 AD 弧长 $= \frac{1}{180}(48.2\pi)6\ 371.2 \text{ km} = 5\ 360 \text{ km}$.

所以 $$ADB \text{ 弧长} = 2(AD \text{ 弧长}) = 10\ 720 \text{ km} \quad ④$$

综合①②③④的结果,我们可以说:要使人造卫星能够看到地球表面积的六分之一,它的高度应等于地球半径的一半,也就是距离地面为 3 185.6 km.卫

星在那里所看到的地面面积是85 020 000 km^2;所看到的地面弧度是10 720 km.

但在实际上,因为地球表面的周围包裹有大气层.由于大气对于光线有折射作用,所以卫星能够看到地面的六分之一,它飞离地面的高度,可比地球半径一半的数值为低.

❖十个数码相乘

3.把十个数码0,1,2,3,…,8,9组成三个数,使第一个与第二个相乘的积等于第三数.问各数是多少?(提出人:山东诸暨 章国屏)

答 这样的数具有下列几个性质:(1)每个数字恰只使用一次.(2)0不在数目的前面.(3)从"九余数"来考察,知道"被乘数的九余数"与"乘数的九余数"相乘,等于"乘积的九余数".

因为0+1+2+3+…+9=45,这里45是9的倍数,即它的九余数为0.所以乘数,被乘数,乘积三者的"九余数",它们的分配情况只有下列情况:

(乘数,被乘数,乘积)=(1,4,4);(4,1,4);(3,6,0);(6,3,0);
(7,7,4);(0,0,0) ①

把十个数码组成三个数,它的"乘积"一定是五位数.而"乘数"与"被乘数"可能有两种情况:

(1)乘数是一位数,被乘数是四位数.由①,知道这时的乘数只能是1,3,4,6,7,9.但当乘数为1时,乘积要等被乘数.显然不合于条件.如果乘数为其他数值时,根据九余数的性质来试验,得到合于题意的解答有下列十三组:

(1)3×5 694 = 17 082　　(2)3×6 819 = 20 457
(3)3×6 918 = 20 754　　(4)3×8 169 = 24 507
(5)3×9 168 = 27 504　　(6)4×3 907 = 15 628
(7)4×7 039 = 28 156　　(8)4×9 127 = 36 508
(9)6×5 817 = 34 902　　(10)7×3 094 = 21 658
(11)7×4 093 = 28 651　　(12)7×9 304 = 65 128
(13)7×9 403 = 65 821

(2)乘数是二位数,被乘数是三位数,这时的乘数只能是下列各数:

10,19,91,28,82,37,73,46,64;30,12,21,39,93,48,84,57,75;

40,13,31,49,94,58,85,67,76;60,15,51,24,42,69,96,78,87;

70,16,61,25,52,34,43,79,97;90,18,81,27,72,36,63,45,54.

从这表可以看出,当乘数为10,30,40,60,70,90,91,21,31,51,61,81诸数时,乘

积的个位数要等于被乘数的个位数，显然不合于条件，如果乘数为其他数值时，经过计算，得到合于题意的解答有下列九组：

(1)27 × 594 = 16 038　　(2)36 × 495 = 17 820

(3)39 × 402 = 15 678　　(4)45 × 396 = 17 820

(5)46 × 715 = 32 890　　(6)52 × 367 = 19 084

(7)54 × 297 = 16 038　　(8)63 × 927 = 58 401

(9)78 × 345 = 26 910

综合上面两种情况，所以得到合于题意的解答各数共有二十二组.

注　本题在刘守身“算算凑凑”书中，缺少了三组答案.

❖圆的度数

4. 圆为什么分做360°？是否有理论的根据？(提出人：山东荷泽夏晨)

答　书经尧典载道：“基三百有六旬六日，以闰月定四时成岁.”这话是说我国在尧时(公元前2330年顷)知道一年有366日. 这个日数若举其成数来说，无妨说它是360较为快捷. 我们说一年经过360日而寒暑循环，也就等于说太阳是天周上行走360度而完成了一个大圈. 并且360这个数值还有一些好处，它是可以用2,3,4,5,6,8,10等数整除. 至于寻常以十进位的数，却不具有这个优点. 例如10,100等数，那就都不能用3或6整除了.

巴比伦人于公元前两千年的时候，规定以360日为一年. 古代埃及人也是以360日为一年. 康托(Cantor)和其他许多学者对于这事的解释说道：“因为他们古时以360日为一年，由此分圆周为360°. 每度是表示太阳绕地的假定年周一日所行的数值.”又用半径在圆内作弦，恰好是六次，每次所对的弧是60°. 因此更产生了六十进位法，即每度再分为60′，每分再分为60″.

❖口大底小的升子

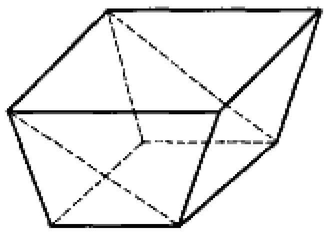


图 4

5. 如图4，有一只口大底小的升子，盛满了酒. 底面是边长为 a 的正方形，口面也是正方形. 口面为底面的4倍，每个侧面各为底面的2倍. 今将酒倾出一些，(1) 使恰可看到底的一边，(2) 使恰可看到底的一角. 问升内还各剩有酒多少？(提出人：山西大同 石国球)

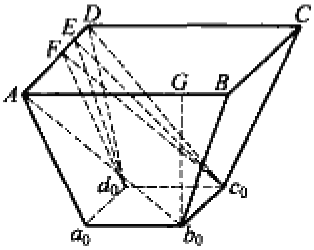


图 5

答 1 (1) 如图 5,令 V_1 = 看到底一边的剩酒体积.过 c_0d_0 作平面 Fd_0c_0 // 平面 Aa_0b_0,分 V_1 为两部分:

V' = 斜棱柱 $Aa_0b_0c_0d_0F$ 及 V'' =

三棱锥 $c_0 - DFd_0$

过 c_0d_0 作截面 $Ed_0c_0 \perp AD$.

因为 $\square a_0b_0c_0d_0 = a^2$, $\square ABCD = AD^2 = 4a^2$,所以 $AD = 2a$.又 a_0b_0BA 为等腰梯形,由圆内接四边形的性质(托勒密 Ptolemy 定理)得

$$Ab_0^2 = a_0b_0 \cdot AB + a_0A \cdot b_0B = 2a^2 + b_0B^2 \quad ①$$

因为梯形 $c_0b_0BA = 2\square a_0b_0c_0b_0 = 2a^2$,作 $b_0G \perp AB$,得

$$梯形\ a_0b_0BA = \frac{1}{2}b_0G(a + 2a) = \frac{3a}{2}b_0G$$

于是 $2a^2 = \frac{3a}{2}b_0G$,所以

$$b_0G = \frac{4}{3}a = Ed_0 \quad ②$$

再 Fc_0 // Ab_0,得 $AF \mathrel{\underline{\parallel}} b_0c_0$.于是 $FD = 2a - a = a$.

又 $c_0E \perp FD$,得 $ED = \frac{a}{2} = GB$.于是

$$b_0B^2 = GB^2 + Gb_0^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{4}{3}a)^2 = \frac{73}{36}a^2$$

代入式①,$Ab_0^2 = 2a^2 + \frac{73}{36}a^2 = \frac{145}{36}a^2 = Dc_0^2$.于是

$$c_0E = \sqrt{Dc_0^2 - ED^2} = \sqrt{\left(\frac{145}{36} - \frac{1}{4}\right)}\,a = \frac{\sqrt{34}}{3}a \quad ③$$

再

$$d_0c_0 = a \quad ④$$

由②③④,令 $p = \frac{Ed_0 + d_0c_0 + c_0E}{2} = \frac{2a}{3} + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{34}}{6} = \frac{7 + \sqrt{34}}{6}a$,得

$$\triangle Ed_0c_0 = \sqrt{p(p - Ed_0)(p - d_0c_0)(p - c_0E)} = \frac{\sqrt{55}}{12}a^2$$

于是

$$V' = AF \cdot \triangle Ed_0c_0 = \frac{\sqrt{15}}{12}a^3$$

$$V'' = 3(棱锥\ D - Ed_0c_0) = 2\left(\frac{1}{3}ED \cdot \triangle Ed_0c_0\right) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{55}}{12}a^2\right) = \frac{\sqrt{55}}{36}a^3$$

所以

$$V_1 = V' + V'' = \left(\frac{\sqrt{55}}{12} + \frac{\sqrt{55}}{36}\right)a^3 = \frac{\sqrt{55}}{9}a^3 = 0.824\ 02a^3$$

(2) 如图 6,令 V_2 = 看到底一角的剩酒体积.分 V_2 为两部分:

V' = 棱锥 $a_0 - b_0\beta\delta d_0$ 及 V'' = 楔形 $Cc_0b_0\beta\delta d_0$

所以 $ABCD$ 为□,得 $DB = \sqrt{2}DA = 2\sqrt{2}a$.联上下两面的中心 OM,得 $OM \perp$ 平面 $a_0b_0c_0d_0$,即 OM 为棱锥 $a_0 - b_0\beta\delta d_0$ 的高.又 b_0BAa_0 为等腰梯形.作 $Hd_0 \perp DB$,得

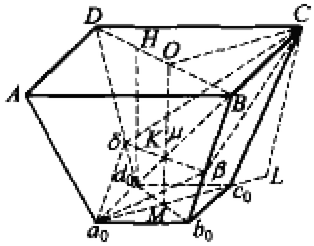


图 6

$$DH = \frac{1}{2}(DB - d_0b_0) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}a - \sqrt{2}a) = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

且

$$Hd_0^2 = Dd_0^2 - DH^2 = \frac{73}{36}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{55}{36}a^2$$

再 $Hd_0 = OM = CL$(CL 是由 C 作垂直于 a_0c_0 延长线的直线),即 $CL = Hd_0 = \frac{\sqrt{55}}{6}a$.又 $Cc_0 = Dd_0$,于是 $\mathrm{Rt}\triangle d_0HD \cong \mathrm{Rt}\triangle CLc_0$,所以

$$Lc_0 = DH = \frac{\sqrt{2}}{2}a, a_0L = a_0c_0 + Lc_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

由 $\triangle a_0M\mu \backsim \triangle a_0LC$,得

$$\mu M = \frac{CL \cdot a_0M}{a_0L} = \left(\frac{\sqrt{55}}{6}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\Big/\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{55}}{18}a$$

依题意 $\delta\beta \parallel d_0b_0 \parallel DB$,$\mathrm{Rt}\triangle d_0K\delta \backsim \mathrm{Rt}\triangle d_0HD$,得

$$\delta K = \frac{DH \cdot Kd_0}{Hd_0} = \frac{DH \cdot \mu M}{Hd_0} = \frac{\sqrt{2}}{6}a$$

在等腰梯形 $b_0\beta\delta d_0$ 中,得

$$\delta\beta = d_0b_0 + 2\delta K = \sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}}{3}a = \frac{4\sqrt{2}}{3}a$$

于是梯形

$$b_0\beta\delta d_0 = \frac{1}{2}\mu M(\delta\beta + d_0b_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{55}}{18}a\left(\sqrt{2}a + \frac{4\sqrt{2}}{3}a\right) = \frac{7\sqrt{110}}{108}a^2$$

因得

$$V' = \frac{1}{3}a_0M(b_0\beta\delta d_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{7\sqrt{110}}{108}a^2 = \frac{7\sqrt{55}}{324}a^3$$

又 $O\mu = OM - \mu M = \frac{\sqrt{55}}{6}a - \frac{\sqrt{55}}{18}a = \frac{\sqrt{55}}{9}a$,所以

$$\text{梯形 } \beta BD\delta = \frac{1}{2}O\mu(DB + \delta\beta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{55}}{9}a\left(2\sqrt{2}a + \frac{4\sqrt{2}}{3}a\right) = \frac{5\sqrt{110}}{27}a^2$$

于是

$$\text{棱锥 } C - \beta BD\delta = \frac{1}{3}CO(\beta BD\delta) = \frac{1}{3}(\sqrt{2}a)\left(\frac{5\sqrt{110}}{27}a^2\right) = \frac{10\sqrt{55}}{81}a^3$$

设 V 为这个升子的体积,得

$$V = \frac{1}{3}OM(\square ABCD + \square a_0b_0c_0d_0 + \sqrt{\square ABCD \cdot \square a_0b_0c_0d_0}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{55}}{6}a(4a^2 + a^2 + 2a^2) = \frac{7\sqrt{55}}{18}a^3$$

设 W 为棱台 b_0c_0dBCD 的体积,得 $W = \frac{V}{2} = \frac{7\sqrt{55}}{36}a^3$.因得

$$V'' = W - (\text{棱锥 } C - \beta BD\delta) = \frac{7\sqrt{55}}{36}a^3 - \frac{10\sqrt{55}}{81}a^3 = \frac{23\sqrt{55}}{324}a^3$$

所以

$$V_2 = V' + V'' = \frac{7\sqrt{55}}{324}a^3 + \frac{23\sqrt{55}}{324}a^3 = \frac{5\sqrt{55}}{54}a^3 = 0.686\ 69a^3$$

注　本题 V 为升子的体积,V_1 为看到底一边的剩酒体积,V_2 为看到底一角的剩酒体积,这三者体积之比为:$V : V_1 : V_2 = 21 : 6 : 5$.

答2　(1) 如图 7,设 $ABCD - a_0b_0c_0d_0$ 为升子. $a_0b_0 = a, AB = 2a, AB^2 = 4a^2$.过 A 作 $AE \perp EG$,交 c_0a_0 的延长线于 E.过 A 作 $AH \perp Hb_0$,交 b_0a_0 的延长线于 H.联 EH. $Ha_0 = \frac{AB - c_0b_0}{2} = \frac{a}{2}$.过 E 作 $EG \parallel a_0b_0$ 交 d_0a_0, c_0b_0 的延长线于 F, G.联 AF, AG.过 a_0 作 $a_0K \perp a_0b_0$,这 OK 是 AB 与 a_0b_0 间的距离.

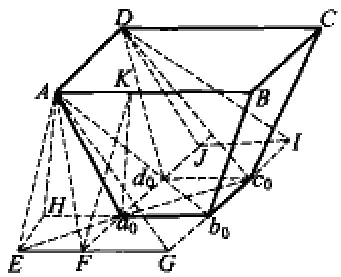


图 7

在 Dd_0c_0C 的那边也同样作法.这样就完成一个直三棱柱 AI.因为升子每个侧面的面积

$$\frac{a + 2a}{2}\cdot a_0K = 2a^2$$

所以

$$a_0K = \frac{4}{3}a$$

$$a_0F = a_0H = \frac{a}{2}, KF = \sqrt{a_0K^2 - a_0F^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{6}a$$

所以 V_{AI} 表示直三棱柱 AI 的体积，$V_{A-a_0b_0GF}$ 表示四角锥 $A-a_0b_0GF$ 的体积，V_1 表示“看到底一边的剩酒体积”.

$$V_{AI} = 2a\left(\frac{AE \cdot EG}{2} - \frac{AE \cdot EF}{2}\right) =$$

$$a \cdot AE(EG - EF) = a \cdot KF(2a - a) = \frac{\sqrt{55}}{6}a^3. V_{A-a_0b_0GF} =$$

$$\frac{1}{3}AE \cdot FG \cdot a_0F = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{55}}{6}a \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{55}}{36}a^3$$

所以

$$V_1 = V_{AI} - 2V_{A-a_0b_0GF} = \frac{\sqrt{55}}{6}a^3 - \frac{\sqrt{55}}{18}a^3 = \frac{\sqrt{55}}{9}a^3$$

(2) 如图 8，过底的中心 M 作 $M\mu \perp b_0a_0$，交 a_0C 于 μ. 过 μ 作 $\beta\delta \,//\, b_0d_0$，分别交 Bb_0, Dd_0 于 β, δ. 过 β, δ 作平面 $\alpha\beta\gamma\delta$ 平行于底面，得 $a_0\beta C\delta$ 为剩酒的水平面. 过 C 作 $CL \perp a_0c_0$，过 γ 作 $\gamma P \perp a_0c_0$.

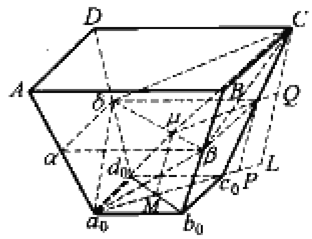


图 8

因为 $a_0M = Mc_0 = c_0L = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. 所以

$$a_0M : a_0L = 1 : 3, \mu M : CL = 1 : 3$$

即 $\mu M = \frac{\sqrt{55}}{18}a$.

$\gamma P : CL = c_0P : c_0L$，即 $\mu M : CL = c_0P : c_0L$，即 $\frac{\sqrt{55}}{18}a : \frac{\sqrt{55}}{6}a = c_0P : \frac{\sqrt{2}}{2}a$. 于是

$$c_0P = \frac{\sqrt{2}}{6}a$$

$$\mu\gamma = Mc_0 + c_0P = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{6}a = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$$

$$\beta\gamma = \sqrt{2}\mu\gamma = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{4}{3}a$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{16}{9}a^2$$

所以 $V_{a_0-\gamma}$ 表示棱台 $a_0-\gamma$ 的体积，$V_{C-\beta\gamma\delta}$ 表示角锥 $C-\beta\gamma\delta$ 的体积，$V_{a_0-\alpha\beta\delta}$ 表

示角锥 $a_0-\alpha\beta\delta$ 的体积，V_2 表示“看到底一角”的剩酒体积.

$$V_{a_0-\gamma}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{55}}{18}a\left(a^2+\frac{16}{9}a^2+a\cdot\frac{4}{3}a\right)=\frac{37\sqrt{55}}{486}a^3$$

$$V_{C-\beta\gamma\delta}=\frac{1}{3}\cdot CQ\cdot\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{2}=\frac{1}{3}(CL-QL)\cdot\frac{8}{9}a^2=$$

$$\frac{8}{27}a^2\left(\frac{\sqrt{55}}{6}a-\frac{\sqrt{55}}{18}\right)a=\frac{8\sqrt{55}}{243}a^3$$

$$V_{a_0-\alpha\beta\delta}=\frac{1}{3}\cdot\mu M\cdot\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{55}}{18}a\cdot\frac{8}{9}a^2=\frac{4\sqrt{55}}{243}a^3$$

所以

$$V_2=V_{a_0-\gamma}-V_{a_0-\alpha\beta\delta}+V_{c-\beta\gamma\delta}=$$

$$\frac{37\sqrt{55}}{486}a^3-\frac{4\sqrt{55}}{243}a^3+\frac{8\sqrt{55}}{243}a^3=$$

$$\frac{5\sqrt{55}}{54}a^3$$

1958年3月号小知识解答者名单

解答1,2题者:上海交通大学L.J.Y.,上海同济中学高三(3) $a+bi$ 数学小组,王普.

解答第2,3题者:安徽歙县中学飞马数学小组,何泰来.

解答第2,5题者:江西丰城中学数Ω理小组,杨厚生.

解答第1题者:汤彬如,雷琦,吴一心.

解答第2题者:王掌发,沈阳铁西区北四路小学,江西吉安高中跃进志高数学小组,福建晋江二中高二(4)数学爱好者,江苏武进一心数学小组,南京三中高三甲爱因斯坦物理小组等一百五十三件,姓名从略.

解答第5题者:彭祖仁,仲秀美,蔡连英.

1958 年第 3 期问题解答

1. 三角形内接圆，外接圆半径各为 r, R，两圆心之距离为 d，则 $\frac{r}{R-d}+\frac{r}{R+d}=1$（提出人：成都四川大学 田景黄）

证 在图 1 中，设 O 与 P 分别为 $\triangle ABC$ 的外心与内心（即外接圆与内切圆的圆心），联 CP 交外接圆于 D，又联 DO 交外接圆于 E. 引 $PF \perp BC$ 则

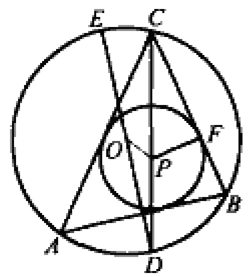


图 1

$$\angle ABD = \angle DCB, \angle PBA = \angle PBC$$

所以

$$\angle PBD = \angle PBA + \angle ABD = \angle PBC + PCB = \angle DPB$$

于是

$$DP = DB$$

又有直角相似三角形 $\triangle DEB \backsim \triangle PCF$，故有

$$DE : DB = CP : PF \quad ①$$

即

$$DE \cdot PF = PB \cdot PC = DP \cdot PC$$

因 $\triangle OCD$ 是等腰三角形，故有 $DP \cdot PC = OC^2 - OP^2$.

现注意到等式 ① 和题设，就得出

$$DE \cdot PF = OC^2 - OP^2 \text{ 即 } 2Rr = R^2 - d^2$$

因此

$$\frac{r}{R-d}+\frac{r}{R+d}=1$$

本题实际上就是察柏尔定理（或称欧拉公式）$d=\sqrt{R^2-2Rr}$ 的变形.

2. 在 $\triangle ABC$ 内有四个这样的圆，其中一个切于三角形三边，其余三个圆的每一个都切于 $\triangle ABC$ 的两边及第一个圆，若其余三圆的半径为 r_a, r_b, r_c 试确定第一圆的半径.（提出人：浙江师院 高天青）

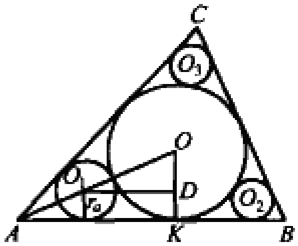


图 2

解 如图 2，设所求的第一个圆半径 $OK = r$，以及其他三圆 O_1, O_2, O_3 的半径分别为 r_a, r_b, r_c. 联 OA，这时 O_1 一定在 OA 上，作 $O_1D \perp OK$（图 2），则

$$DK = r_a, OD = r - r_a, \angle OO_1D = \frac{1}{2}\angle A$$

由此就有

$$\frac{r+r_a}{r-r_a}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\angle A}$$

或者

$$\frac{r}{r_a}=\frac{1+\sin\frac{1}{2}\angle A}{1-\sin\frac{1}{2}\angle A}=\frac{1+\cos(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A)}{1-\cos(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A)}=$$

$$\frac{2\cos^2(45^\circ-\frac{1}{4}\angle A)}{2\sin^2(45^\circ-\frac{1}{4}\angle A)}=\cot^2(45^\circ-\frac{1}{4}\angle A)$$

因此得到

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_a}}=\cot(45^\circ-\frac{1}{4}\angle A)$$

同理可得

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r_b}}=\cot(45^\circ-\frac{1}{4}\angle B),\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_c}}=\cot(45^\circ-\frac{1}{4}\angle C)$$

因为

$$(45^\circ-\frac{1}{4}\angle A)+(45^\circ-\frac{1}{4}\angle B)+$$

$$(45^\circ-\frac{1}{4}\angle C)-135^\circ-\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{4}=90^\circ$$

现在对于 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ 我们应用三角公式

$$\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$$

就得到

$$\frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{r_ar_br_c}}=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_a}}+\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_b}}+\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_c}}$$

也就是

$$r=\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a}$$

3. 试证 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 常为整数且可被 2^{n+1} 除尽.(提出人:浙江省宁波五中高三(2)陈传孟)

证 用归纳法来证.

当 $n=1$ 和 2 时,原式 $=20$ 和 152 的确是整数,且分别可按 2^2 和 2^3 整除,故命题成立.

假定当 $n = k-1$ 和 $n = k$ 时命题都成立,即

$S_{k-1} = (\sqrt{3}+1)^{2k-1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1}$ 为整数,且可被 2^k 整除.

$S_k = (\sqrt{3}+1)^{2k+1} - (\sqrt{3}-1)^{2k+1}$ 为整数,且可被 2^{k+1} 整除.

现在来考虑

$$\begin{aligned}8S_k - 4S_{k-1} = &[8(\sqrt{3}+1)^{2k+1} - 4(\sqrt{3}+1)^{2k-1}] - \\ &[8(\sqrt{3}-1)^{2k+1} - 4(\sqrt{3}-1)^{2k-1}] = \\ &(\sqrt{3}+1)^{2k-1}[8(\sqrt{3}+1)^2 - 4] - (\sqrt{3}-1)^{2k-1} \\ &[8(\sqrt{3}-1)^2 - 4]\end{aligned}$$

由于

$$8(\sqrt{3}+1)^2 - 4 = 32 + 16\sqrt{3} - 4 = 16 + 16\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 =$$
$$(4+2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}+1)^4$$
$$8(\sqrt{3}-1)^2 - 4 = (\sqrt{3}-1)^4$$

所以得到

$$8S_k - 4S_{k-1} = (\sqrt{3}+1)^{2k+3} - (\sqrt{3}-1)^{2k+3} = S_{k+1}$$

因为 $8S_k$ 和 $4S_{k-1}$ 都是整数,所以 S_{k+1} 也是整数;由于 S_k 能被 2^{k+1} 整除,因此 $8S_k$ 能被 2^{k+2} 整除,同样 $4S_{k-1}$ 也能被 2^{k+2} 整除,所以 S_{k+1} 可被 2^{k+2} 整除.也就是说当 $n = k+1$ 时命题成立.

按照归纳法原理,命题对于任意自然数 n 都成立.

4.假设 $x_1 = \sin\theta_1, x_2 = \cos\theta_1\sin\theta_2, x_3 = \cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3, \cdots, x_{n-1} = \cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, x_n = \cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}$.
试证:对于所有 $\theta i(i = 1,2,\cdots,n)$,不使 $x_k = 0(k = 1,2,\cdots,n)$ 时,有不等式 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} \geqslant n^2$.(提出人:江苏师院 元子皿郎)

证

$$x_{n-1}^2 + x_n^2 = \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\cdots\cos^2\theta_{n-1}(\sin^2\theta_{n-1} + \cos^2\theta_{n-1}) =$$
$$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\cdots\cos^2\theta_{n-2}$$
$$x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 = \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\cdots\cos^2\theta_{n-3}(\sin^2\theta_{n-2} + \cos^2\theta_{n-2}) =$$
$$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\cdots\cos^2\theta_{n-3}$$
$$\cdots$$

最后可得

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1 = 1 \quad ①$$

应用最后这个关系式 ① 代替我们所要证明的不等式左端的各分子,就有

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}=\left(1+\frac{x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{x_1^2}\right)+$$

$$\left(1+\frac{x_1^2+x_3^2+x_4^2+\cdots+x_n^2}{x_2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2}{x_n^2}+1\right)=$$

$$n+\left[\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}+\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)+\left(\frac{x_3^2}{x_1^2}+\frac{x_1^2}{x_3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_n^2}{x_1^2}+\frac{x_1^2}{x_n^2}\right)\right]+$$

$$\left[\left(\frac{x_3^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_3^2}\right)+\left(\frac{x_4^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_4^2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_n^2}{x_2^2}+\frac{x_2^2}{x_n^2}\right)\right]+\cdots+\left[\left(\frac{x_n^2}{x_{n-1}^2}+\frac{x_{n-1}^2}{x_n^2}\right)\right]$$

因为互为倒数的两个正数之和常不大于2,即若 a,b 同号,则

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$$

利用这一关系,上式就成为

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}\geqslant n+2[(n-1)+(n-2)+\cdots+1]=$$

$$n+2\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]=n+(n^2-n)=n^2$$

这就是所要证明的不等式.

5. 计算:$256\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\sin 70^\circ\sin 80^\circ\sin 90^\circ$.(提出人:上海控江中学高二(3) 吴尧)

解 原式 $=256\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\cdot$

$\sin 70^\circ\sin 80^\circ=64\sqrt{3}\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$,但是

$$\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{1}{2}\sin 70^\circ(\cos 40^\circ-\cos 60^\circ)=\frac{1}{2}\cos 40^\circ\sin 70^\circ-\frac{1}{4}\sin 70^\circ=$$

$$\frac{1}{4}\sin 110^\circ+\frac{1}{4}\sin 30^\circ-\frac{1}{4}\sin 70^\circ=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{8}$$

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{1}{2}\sin 80^\circ(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)=\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{4}\sin 80^\circ=$$

$$\frac{1}{4}\sin 100^\circ+\frac{1}{4}\sin 60^\circ-\frac{1}{4}\sin 80^\circ=\frac{1}{4}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

所以
$$\text{原式}=64\sqrt{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}=3$$

6. 试证:$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{2^n\tan\frac{\pi}{2^n}}$.(提出人:武汉市三十三中高二(三) 裴蜀数学小组)

证 因为 $\tan x-\cot x=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-2\cos 2x}{\sin 2x}=-2\cot 2x$,所以

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$$

由此

$$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\cot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\cot\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

把以上各式相加便得

$$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2^n\tan\frac{\pi}{2^n}}$$

7. 试解联立方程组：$\begin{cases}\dfrac{1-xy}{x+y} = 1\\ \dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)+4xy} = 2\end{cases}$.

（提出人：江苏昆山中学高二乙 χ,ψ,ω 数学小组）

解 令 $x+y=n, xy=m$，把原联立方程变为

(A) $$\begin{cases} n = 1-m & ① \\ \dfrac{n^2+(m-1)^2}{(m+1)^2-n^2+4m} = 2 & ② \end{cases}$$

把式 ① 代入式 ② 得到 $m^2 - 10m + 1 = 0$

因此方程组(A) 的解为 $\begin{cases} m = 5 \pm 2\sqrt{6} \\ n = -4 \mp 2\sqrt{6}\end{cases}$

代入原来的联立方程便得关于 x,y 的两方程组：

$$(\text{I})\begin{cases} x+y = -4-2\sqrt{6} \\ xy = 5+2\sqrt{6}\end{cases}, (\text{II})\begin{cases} x+y = 2\sqrt{6}-4 \\ xy = 5-2\sqrt{6}\end{cases}$$

在(Ⅰ)中前一式得 $x = -(y+4+2\sqrt{6})$，代入后一式即得

$$y^2 + 2(2+\sqrt{6})y + (5+2\sqrt{6}) = 0$$

所以

$$y = -2-\sqrt{6} \pm \sqrt{5+2\sqrt{6}} = -(2+\sqrt{6}) \pm (\sqrt{3}+\sqrt{2}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(-\sqrt{2}\pm 1)$$

于是

$$x = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(-2\sqrt{2}\mp 1)$$

这样便得到方程组(Ⅰ)的两组解，同样可得方程组(Ⅱ)的两组解

$$\begin{cases} x = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}\mp 1) \\ y = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}\pm 1) \end{cases}$$

所以原联立方程有四组解,即

$$\begin{cases} x_1 = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \\ y_1 = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \\ y_2 = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \\ y_3 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \end{cases}, \begin{cases} x_4 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) \\ y_4 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

8.如 $2(p+q+r)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$,且 $x^2+\alpha x-p=0$;$x^2+\beta x-q=0$ 的根各为 β,r;r,α,求以 α,β 为根的二次方程.(提出人:上海同济中学 陆忠明)

解 由题意及韦达定理知道

$$\alpha+r=-\beta,\beta r=-p,r\alpha=-q$$

由第一式得到

$$\alpha+\beta+r=0$$

故

$$0=(\alpha+\beta+r)^2=\alpha^2+\beta^2+r^2+2\alpha\beta+2\beta r+2r\alpha=$$
$$2(p+q+r)+2\alpha\beta-2p-2q$$

就是

$$2r+2\alpha\beta=0$$

所以

$$\alpha\beta=-r$$

又由第一式得到 $\alpha+\beta=-r$,故由韦达定理知所求的二次方程为

$$x^2+rx-r=0$$

1958年第3期问题解答者姓名

解出第1,2,3,4,5,6,7,8题者:许贤定,陈豪生,林武伸.

解出第1,2,3,5,6,7,8题者:上海同济中学高三(3)$a+bi$数学小组,黄水源.

解出第1,2,4,5,6,7,8题者:武汉市三十三中高三数学小组,武汉32中高三(三)裴蜀数学小组.

解出第1,3,4,5,6,7,8题者:林荣邦,江苏吴县中学高三(1)棣美弗数学爱好小组.

解出第1,2,3,5,6,8题者:陈忠候,汪贵行.

解出第1,2,5,6,7,8题者:涂光铎,郭谦恕,段世槐,欧可宏,威力数学小组.

解出第1,3,5,6,7,8题者:朱永作,钱贻策,任德祥,谢善孙,艾集周,江苏吴县中学高三(2)班Decartes数学小组.

解出第1,4,5,6,7,8题者:章福寿,章福荣.

解出第1,2,3,6,8题者:澳倍.

解出第1,2,5,6,7题者:王守志,上海敬业中学高三(x)Juren数学小组.

解出1,3,5,6,8题者:何鸿桐.

解出第1,5,6,7,8题者:刘德敏,刘德民,庞元生,徐中平,杨占衡,张德楠,雄廷,陈颙.

解出第3,5,6,7,8题者:武汉15中高三(2)02数学小组,陆忠明,姚明远.

解出第1,2,5,8题者:合肥三中高三(1)欧拉数学小组,程龙.

解出第1,3,5,6题者:蒋福敏,叶时爽.

解出第1,4,5,6题者:陈骥,杨桢因.

解出第1,5,6,7题者:黄汉生.

解出第1,5,6,8题者:唐富生,江苏昆山中学高三(2)班χ,ψ,ω数学小组.

解出第1,5,7,8题者:吴荫会,王渝华.

解出第3,5,6,8题者:蒋元林.

解出第3,5,7,8题者:上海陆行中学高三(1)高斯数学小组.

解出第4,5,7,8题者:范传福.

解出第1,5,6题者:李欣,赵祥山,谢宇清.

解出第1,5,7题者:谢溶华.

解出第1,5,8题者:徐州三中高三(2)居里数学小组,彭祖仁等.

解出第1,6,8题者:刘万生.

解出第3,5,7题者:贝治平,王宗礼.

解出第5,6,8题者:南京12中皮埃·居里数学小组.

解出第1,3题者:上海徐汇中学高三(4)董林数学小组,何越生,敬人.

解出第1,5题者:张彦仲,斯文宗,傅长贤,袁刚仁,李近茂,沈光远,孙大愚,方俊,高企范,梅钢清,熊松年,施清苑.

解出第1,6题者:杨进江,丁希泉.

解出第1,7题者:陆幼逊,吴嘉胜,徐开亚.

解出第3,7题者:陈国俊.

解出第5,6题者:李火继,吕连义,胡良知,张延诰.

解出第5,7题者:李念纯.

解出第5,8题者:沈顾泰.

解出第7,8题者:费成明,唐家龙.

解出第1题者:汪锡安,上海市61中学高二(2)奔流数学小组,张崇德,何绍书,周兴茂,俞蟠升,陈纪阳,郭廷,长春12高中三年6班 ∞ 数学小组.

解出第3题者:曲义栋,谢顺泰.

解出第5题者:张贵成,邱开祥,鲁桂生,南安国光中学求知数学小组,杨曼舟,倪国顺,成志凯,章德华,宋彭生,林国荣,王轶凡,李龙颜,李世才,上海市61中学$\sum$数学小组,梁从善,南安国光中学高二(3)"黄华"数学组,方文德,方正域.

解出第7题者:郑文学,余建心,黄罗弼,黄鑫煜,徐子江.

解出第8题者:龚杏生,任孝僖,林贻俊.

1958 年 3 月号问题

1.有四位数是 59 的倍数,它的整数近似平方根等于余数的 4 倍.求这数.

解 设所求的数为 x,其整数近似平方根为 n.则

$$x = n^2 + \frac{n}{4} = \frac{n(4n+1)}{4}$$

因为余数是整数,所以 n 应为 4 的倍数.

设 $n = 4m$,则 $x = m(16m+1)$.

设 $m = 59k$(因为 x 是 59 的倍数),则 $x = 59k(16 \cdot 59k + 1)$.

则当 $k = 1$ 时,$x > 10\,000$.

因为 $1\,000 < x < 10\,000$,所以

$$1\,000 < n^2 < 10\,000, 31 < n < 100, 7 < \frac{n}{4} < 25$$

所以

$$7 < m < 25$$
$$133 \leqslant 16m + 1 < 401$$

因为 $16m+1$ 为一奇数且为 59 的倍数.而这样的数在 113 与 401 之间的只有 177 与 295,但 295 不合题意,所以 $16m + 1 = 177$.

因此 $x = 1\,947$.

2.求和$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}$的整数部分是多少.

解 因为$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}]$,所以

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}} > \frac{3}{2}[(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}) + (\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{5^2} + \cdots +$$

$$\sqrt[3]{1\,000\,001^2} - \sqrt[3]{1\,000\,000^2})] = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{1\,000\,002\,000\,001} - \sqrt[3]{16}) >$$

$$\frac{3}{2} \cdot 10\,000 - \sqrt[3]{54} > 15\,000 - 4 = 14\,996$$

因为$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$,所以

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}<\frac{3}{2}[(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2})+$$
$$(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2})+\cdots+(\sqrt[3]{1\,000\,000^2}-\sqrt[3]{999\,999^2})]=$$
$$\frac{3}{2}(\sqrt[3]{1\,000\,000\,000\,000}-\sqrt[3]{9})<\frac{3}{2}(1\,000-2)=14\,997$$

所以$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}$的整数部分为 14 996.

3. 已知 $ABCDEF$ 为一正六边形,求证:一边与 BC 平行且内接于$ABCDEF$ 的三角形的面积不能大于 $ABCDEF$ 面积的$\frac{3}{8}$.

证 如图1,设$\triangle PQR$ 为内接于正六边形$ABCDEF$,且 $QR /\!/ BC$ 的面积最大的三角形. 显然 P 必在EF边上.

设 $ABCDEF$ 一边的长为 1, $BQ = CR = a$. 则

$$QR = BC + QM + NR = 1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=1+a$$

又 $PH = PK - KH = \sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}=(2-a)\frac{\sqrt{3}}{2}$.

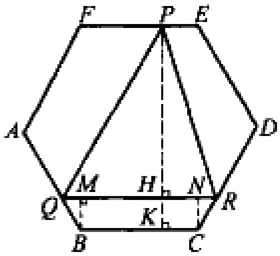


图 1

所以

$$\triangle PQR \text{ 的面积} = \frac{1}{2}(1+a)(2-a)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+a-a^2)=$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{9}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

因而$\triangle PQR$ 的面积若为最大,则必 $a-\frac{1}{2}=0$,即 $a=\frac{1}{2}$.

而此时$\triangle PQR$ 的面积为$\frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{9}{16}\sqrt{3}$,但 $ABCDEF$ 的面积为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

所以,当$\triangle PQR$ 的面积为最大时,应为 $ABCDEF$ 的面积的$\dfrac{\frac{9}{16}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}}=\frac{3}{8}$.

因而定理得证.

4. 如图 2,已知 $ABCD$ 为一四面体,分别以 $AB,AC,AD;BC,BD,BA;CD,CA,CB;DA,DB,DC$ 为相邻的棱作平行六面体AA',BB',CC',DD'. 若 $ABCD$ 的体积为 V,则四面体 $A'B'C'D'$ 的体积为何?为什么?

解 因为平行六面体 AA',BB',CC' 的面 DA',DB',DC' 与ABC 面平行且有公共点 D,所以 DA',DB',DC' 共一平面即$A'B'C'$ 面.

而四面体 $CDKL$ 与$ABCD$,因两面所夹二面角相等而相等,从而 A',K,L,B' 共线.

又平行六面体，AA' 等于$ABCD$ 的6倍，同理其平行六面体亦然.

所以四面体 $A'B'C'D'$ =（平行六面体AA' − 四面体 $ABCD$）×4 + 四面体 $ABCD$ ×7 = $5V\times 4+V\times 7=27V$.

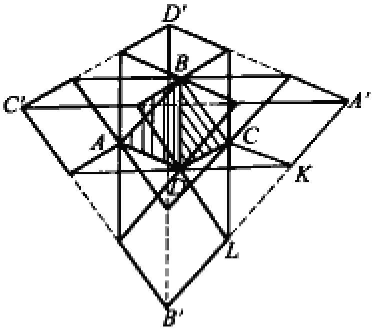


图2

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$，求证$\triangle ABC$必为一个含$120°$角的三角形.

证 在$\triangle ABC$内，因为

$$\begin{aligned}\cos3A+\cos3B+\cos3C &= 2\cos\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B)-\cos 3(A+B)=\\ &2\cos\frac{3}{2}(A+B)\cos\frac{3}{2}(A-B)-2\cos^2\frac{3}{2}(A+B)+1=\\ &2\cos\frac{3}{2}(A+B)\left[\cos\frac{3}{2}(A-B)-\cos\frac{3}{2}(A+B)\right]+1=\\ &4\cos\frac{3}{2}(A+B)\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{3}{2}B+1=\\ &1-4\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{3}{2}B\sin\frac{3}{2}C\end{aligned}$$

而 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$，所以

$$-4\sin\frac{3}{2}A\sin\frac{3}{2}B\sin\frac{3}{2}C=0$$

所以 $\sin\frac{3}{2}A=0$，或 $\sin\frac{3}{2}B=0$，或 $\sin\frac{3}{2}C=0$.

所以 $A=120°$ 或$B=120°$ 或$C=120°$，即$\triangle ABC$为一含$120°$角的三角形.

1958年3月号解答者名单

解出1,2,3,4,5者:张印增,黄述谷,黄灼芳,朱明章,吴国玢,陈理君,吕哲明,刘立川,赵源泉,郑桦,李师正,周晨,钱本,唐宗寿,山西阳高一中数学教研组,陈非非,王文求,姚玉珩,金长发,周永良,周惠德;武汉市十四中高三(二)鸭子数学小组,苏州第五中学数学教研组,四川邛崃中学数学爱好者.

解出1,3,2,5者:歙县中学高二飞马数学小组,张禄度,邛崃中学高三(二)班,游一中,高庆国,余成,湖南师院附中爱因斯坦数学小组,黎庆年.

解出1,2,3,4者:广州第八中学高斯数学小组.

解出1,2,3,5者:谢鸿才.

解出1,3,4,5者:范秉椿,张振鑫,周开论,张典瑞,邹中桂,过伯祥,叶解慰,俞嘉惠,沈继仁,林鹤轩,彭京鹏,蒋声,陈渣荒,孙普钧和陆仲宜,魏昌炽,李容奎,金桃生,王树勋和吴光本,胡祖乙和赵中兴,岳西平和张敦臣,高镇水,时旭丹,许伯年,郑志豪,叶杏元和包克振,洪毅,刘广祥,何泰来,北京101中学高三(四)班数学小组,扬州中学高三(八)五人小组,江西吉安高中数学小组,石家庄机电学校机201班R.

解出1,3,5者:邹志国,吴国新,伯昭新,陈心钜,陈绍刚,张长达,许予同,蒋永泰,高兆麟,马国欢,竺永新,张荣华,南京市十一中高三(二)数学小组,杨泽民,郭光林,杨琪,张万超,杨景芳,孙天补,杨品炎;张炎明,张慧剑,戴天成,何立石,王德洪,陈晨,余新,邵其方,陈守义,桂永和,朱成平,上海敬业中学高三(5)六人小组,虞玉敬,谢士凯,夏永绵,牟丙伦,胡汉贤,陈福麟,方根新,金启康,上海五四中学,IV_6红专数学小组.

解出1,4,5者:孙沅,马健敏.

解出1,2,5者:王福定,九江二中高三代数小组,刘战门,上海蓬莱中学高三(1)狄建华数学分子团.

解出1,2,3者:吕正声,北京师大附中高一(2)伽罗华数学小组,相德钦.

解出3,4,5者:福州四中高三(1)$\alpha\beta\gamma$数学小组,柴承尧,刘艺,上海同济中学高三(3)班$a+bi$数学小组,汪贵行,王天德,沈培湘,杨厚生,杨碗,李炯,张纪元,程锡令,张存谦,陈淡,伍哲文,广东台山端芬中学尤拉数学小组,严金仁,林兆铠.

解出2,3,5者:王荣昌,徐山泉,周维鹏,李纯文,常州第二中学高三(1)朝阳数学小组,华中师院附中趣味数学小组.

解出 1,3,4 者:刘再进,吴江舫.

解出 2,3,4 者:刘存操.

解出 1,2 者:段续年.

解出 1,3 者:李人科,谢元利和柯德修,杨振南,梁天骏,马炳钧,朱如会,张镖.

解出 2,3 者:谢嘉平,项正清.

解出 2,4 者:李国光.

解出 1,5 者:倪加誉,甘文照,林鸿禧和许维仁,苗根,胡敦友,梅林周,王陵生,王镒,李郁文,刘德序,杨崑源,上海同济中学高三 Shen Shan Dung 数学小组.

解出 2,5 者:万雨丝和靳福临和王金生,钱贻策,钱振南,李汉良,杨瑛生,余新河,王天寿,孙广润,唐文杰,邬天祥和段骏书,武汉 33 中高二(三) 裴蜀数学小组,上海新力中学高三(1) 罗骏森数学小组,广州 17 中高三(乙) 数学爱好者,刘赤侠.

解出 4,5 者:王文光,孙怀山,李可丰,张钜洲,金至良,温涌源,江西吉安高中黄徐数学互学小组,江西吉安高中高三(2) 志高,躍进数学小组.

解出 3,4 者:周世英和田岐和申明宇,上海市成都第二中学数理小组.

解出 3,5 者:寿幻麟,管仲范,杨介信,朱梧橙,腾权基,郭二平,田可,赵继臣,李鸿昌,宫野及王国风,上海敬业中学高二(4)$\alpha\beta\gamma=3$数学小组,宋秉炜,肖学铮,吴元鸿,姚良华,保林,欧阳光明,安徽造纸厂牛顿数学小组,贺士钊,彭宏熙,何元卿,王相贤,周先容,余春熔,朱极佑,陈鹤年,兰州女中高三二班三人小组,朱襄生,项思明,刘鼎元,霍日查,周传贤,张国盛,曹重光,范茂兰及陆风谦,张运筹,刘崇余,张长江,陆寅生及孙大香,徐以保,张肇山,王连孝及何云鹏,刘桂元,黄聪,王允中,袁天兴及庄萝蟾,李连文,石维钧,鲍爱华,方文德及方正域,东坡,邓天元及王令誉,张畛寰,沈苏,王普,陈龙玉,志回,陈杭介,马陶华,肖汤夷,苏玉田,胡绍文,惠州市"黄家塘五义数理小组",焦志,余景敬,南峰.

解出1者:刘勇忠,高清泉,北京八中自学数学爱好者 x,林镜清,王毅,陆培荣及谢逸圣及邵贻仁,王起风,武汉十二中高二 ABC 数学小组,张树芬,刘国冲,王正元,上海复旦中学高二(二)x 小组,上海中学高二七数学小组.

解出 2 者:何立石,衷儒堂,顾全林,范秉椿,张炬,任德祥及曹家敏,景学,张新国,雷平,刘占山,无名氏.

解出 3 者:熊大权,窦荣启,潘风儒,陈纪,戚宗信,吴训明,高元泉,王彬,黄瑞春,江苏省泰州中学高二(1)(2) 六人学习小组,林德劳,陶原忠,歙县中学高二(一) 金星数理小组,王倍,谈纪琨,袁秀君,陆公弼,徐供森,于涤麝,郑景胂,

天津41中爱因斯坦数理小组，欧先昭，郭谦恕，李霞轩，魏金伯，吴秀华，毛益国，刘懋均，崔利植，曲学增，周青华，王黎，刘鹏升，熊谟恭，上海市东中学高二(6)祖冲之数学小组，邵树伟，陈锡煌，赵风纪，陈燕仙，任允忠，高岳，陈昌友，蒋连伟.

解出4者：刘战门，赵源本，陈燕仙，李嵯秋，毛文杰，荣效清，王兆楷及张祖腾.

解出5者：黎观生，王树茂，黄世芬，潘传学，陈魁元，上海七宝中学高二(1)吴林数学小组，黄孝喜，封辅智，汤宝华，陈玉麟，陈锡煌和赵风妃和陈燕仙，姚志远，李文福，李永美，刘飞鸿，刘飞旗，吴佩骍，雷宗焕，朱育琨，曾权兴，芳志祥，蒋连伟，金昌熙，杨德意，李嘉贞，张立诚，王励耕，张兆鹤，李龙颜，冯志伟，林忠立，赵振泉，朱昌平，储希平，田茂岩，李春芳，刘振贤，濮里昂，余秉彬，汤淋如，何肖和流水，邓绍金，苏祥，顾鼎锡，孙敦载，张永泰，黄水源，沈阳市十一中牛顿小组，张广斌，陈振邦，王继岭，林绮敦，丁树荣，怀宁高河中学，黄锡中，王中方，吴炳香，李士凯，戴绍绪，彭钧监，杨正兴，冯根余，曹雨芳，楼季春，朱世杰，张国南，伏阜亭，唐同隆，大同一中高十五班数学小组，候钱明，赵国良，虞水章，胡明庆，王者天，欧阳贤，南河柱，顾育德，虞再发，谷安铭，徐德成，孙延长，马绍武，陈风元，丁川木，基国光，天津铁路中学高三(2)数学小组，周光明，志鸿道，武汉十二中高二(3)A.B.C.数学小组，张应谟，胡定生，牟光宇，叶智标，游美英，卞舜文，广西柳州铁中高八数学爱好者，ЧЪЦ，吴传仁，赵承章，张曹隐，余名震，蔡格仁，李孔富，毛光渝，曲国贞，舒昌乐，王宝辉，蓝士良，林吉通，高耀祖，刘国冲，贺祖蔚，唐家龙和费成明，黄宜昌，王建中，张镛德，湖南工业学校，于森祥，金韦，高柏范，刘维义，逆一，桂润铭，孝感A.P.数学小组，胡竞民，王茂柏，吴一心.

1958 年 4 月号征解问题答案

❖费马数

1.形式如 $1+2^{2^n}$ 的数叫做“费马数”,求证:所有的费马数必是俩俩互素(提出人:上海襄阳南路本刊读者)

证 任取两个费马数 $1+2^{2^m}$ 与 $1+2^{2^n}$.设其最大公约数为 P,只需证明 $P=1$ 就可.

设 $m>n$,并设 $m=n+k$(k 为某自然数).因 P 是 $1+2^{2^n}$ 的约数,故 $1+2^{2^n}\equiv 0(\bmod P)$,即 $2^{2^n}\equiv -1(\bmod P)$.于是 $(2^{2^n})^{2^k}\equiv(-1)^{2^k}(\bmod P)$,即

$$2^{2^{n+k}}\equiv 1(\bmod P),即\ 2^{2^m}\equiv 1(\bmod P) \qquad ①$$

另一方面,因 P 亦是 $1+2^{2^m}$ 的约数,故亦有 $1+2^{2^m}\equiv 0(\bmod P)$,即

$$2^{2^m}\equiv -1(\bmod P) \qquad ②$$

比较①,②,得 $1\equiv -1(\bmod P)$,即 $2\equiv 0(\bmod P)$.因此 P 只能为 2 或 1.但费马数都是奇数,不含有因子 2.所以 $P=1$,于是本题得证.

❖分角线

2.设有三角形的三边为 a,b,c.它的三条内分角线为 t_a,t_b,t_c,求证:$t_at_bt_c<abc$.(提出人:上海龚晨)

证法 1 作 $\triangle ABC$ 的外接圆.$AD=t_a$ 为 $\angle A$ 的平分线,延长交圆于 E.因为 $\triangle AEC\backsim\triangle ABD$,得 $AC\cdot AB=AD\cdot AE$.设 $AE=X$,得 $b_c=t_aX$.同样延长它角的平分线,与外接圆相交,又得两弦,令它们为 Y,Z,得 $ca=t_bY$,$ab=t_cZ$.于是 $bc\cdot ca\cdot ab=t_aX\cdot t_bY\cdot t_cZ$,即 $\frac{t_at_bt_c}{abc}=\frac{abc}{XYZ}$.在此我们知道,两数的几何平均值必介于

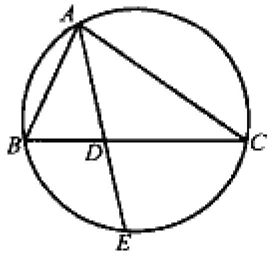


图 1

两数之间.由图 1,$X > t_a$,$Y > t_b$,$Z > t_c$,即 $XYZ > t_at_bt_c$,所以 $t_at_bt_c < abc < XYZ$,如题所云.

证法 2 如图 1,$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}$,即 $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}t_ac\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}t_ab\sin\frac{A}{2}$.由此得

$$t_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \quad ①$$

同样

$$t_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2} \quad ②$$

$$t_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2} \quad ③$$

①②③ 相乘得

$$t_at_bt_c = \frac{8a^2b^2c^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad ④$$

又 $\cos\frac{A}{2} < 1$,$\cos\frac{B}{2} < 1$,$\cos\frac{C}{2} < 1$,三式连乘得

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} < 1 \quad ⑤$$

但 $2\sqrt{ab} \leqslant a+b$,$2\sqrt{bc} \leqslant b+c$,$2\sqrt{ac} \leqslant a+c$ 三式连乘得

$$8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a) \quad ⑥$$

⑤ × ⑥ × abc 得

$$8a^2b^2c^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} < abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

已知 $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$,上式变为

$$\frac{8a^2b^2c^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)} < abc \quad ⑦$$

以 ④ 代入 ⑦,所以 $t_at_bt_c < abc$.

❖三元的等式

3.设 $x + y + z = xyz$.求证:

(1)$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-x^2)(1-z^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz$.

(2)$x(3-x^2)(1-3y^2)(1-3z^2) + y(3-y^2)(1-3x^2)(1-3z^2) + z(3-$

$z^2)(1-3x^2)(1-3y^2) = xyz(3-x^2)(3-y^2)(3-z^2)$.

(提出人:山西榆次沈传昌及陕西临潼吴仿宇)

证 (1) 设 $x=\tan\alpha, y=\tan\beta, z=\tan\gamma$. 因为 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$,得

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma &= \tan 2+\frac{\tan 2\beta+\tan 2\gamma}{1-\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma}(1-\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma)=\\ &\tan 2\alpha+\tan 2(\beta+\gamma)(1-\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma)=\\ &\tan 2\alpha-\tan[2\pi-2(\beta+\gamma)](1-\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma)=\\ &\tan 2\alpha-\tan 2\alpha(1-\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma)=\\ &\tan 2\alpha\cdot\tan 2\beta\cdot\tan 2\gamma\end{aligned}$$

又
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta},\tan 2\gamma=\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$$

于是
$$\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}=\frac{8\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}{(1-\tan^2\alpha)(1-\tan^2\beta)(1-\tan^2\gamma)}$$

即
$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

所以
$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$$

(2) 仿上面,$\tan 3\alpha+\tan 3\beta+\tan 3\gamma=\tan 3\alpha\cdot\tan 3\beta\cdot\tan 3\gamma$,即

$$\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}+\frac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^2\beta}+\frac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^2\gamma}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\cdot\frac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^2\beta}\cdot\frac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^2\gamma}$$

即
$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

所以
$$x(3-x^2)(1-3y^2)(1-3z^2)+y(3-y^2)(1-3x^2)(1-3z^2)+z(3-z^2)(1-3x^2)(1-3y^2)=xyz(3-x^2)(3-y^2)(3-z^2)$$

❖三角及代数式

4. 解方程组 $\begin{cases} x^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5+y^2}{k(k+1)}} = \left[2x\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^x \\ x^2\left(x-\dfrac{10y^2}{x}\right)+166 = 5(x^2-10y^2)+32x \end{cases}$

(提出人:广东潮州 陈纪绵)

解 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}=1,\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. 原第一方程变为 $x^{5+y^2}=x^x$,得

$$(5+y^2-x)\lg x=0$$

原第二方程变为 $x^3-10xy^2+166=5x^2-50y^2+32x$,即

$$x^2(x-5)-10y^2(x-5)-32(x-5)+6=0$$

于是原方程组变为两个方程组:

(Ⅰ) $\begin{cases}\lg x=0 \\ x^2(x-5)-10y^2(x-5)-32(x-5)+6=0\end{cases}$

解这方程组得 $x=1,y=\pm\dfrac{i\sqrt{13}}{2}$. 及

(Ⅱ) $\begin{cases}5+y^2-x=0 & ① \\ x^2(x-5)-10y^2(x-5)-32(x-5)+6=0 & ②\end{cases}$

由①,$y^2+5=x$,代入②得

$$y^2(y^4-7)+6=0$$

令 $y^2=t$,上式变为 $t^3-7t+6=0$. 解这式得

$$t=1,2,-3$$

于是 $y=\pm1,\pm2,\pm i\sqrt{3}$. 将 y 代入①,得(Ⅱ)的解为

$$x=6,y=\pm1;x=7,y=\pm\sqrt{2};x=2,y=\pm i\sqrt{3}$$

综合(Ⅰ)(Ⅱ)的解,得原方程组的解有下列八组:

$$\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{i\sqrt{13}}{2}\end{cases};\quad\begin{cases}x=1\\y=-\dfrac{i\sqrt{13}}{2}\end{cases};\quad\begin{cases}x=6\\y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=6\\y=-1\end{cases};\quad\begin{cases}x=7\\y=\sqrt{2}\end{cases};\quad\begin{cases}x=7\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\y=i\sqrt{3}\end{cases};\quad\begin{cases}x=2\\y=-i\sqrt{3}\end{cases}$$

❖三内角的正切

5.设 A,B,C 为锐角三角形的三内角,求证:$\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.(提出人:大连郭珠)

证 因为

$$0<A<\frac{\pi}{2},0<B<\frac{\pi}{2},0<C<\frac{\pi}{2},A+B+C=\pi$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A-\cos B}=\frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}=\frac{2\sin C}{-\cos C+\cos(A-B)}$$

当 C 为定角时,$\sin C,\cos C$ 都是定值.因此若 $\tan A+\tan B$ 取极小值,上式中的 $\cos(A-B)$ 应取极大值,即 $A=B$.这就是说,当 $A=B$,且 C 为定值时,$\tan A+\tan B$ 有极小值,所以

$$C=\pi-2A \quad ①$$

同样,当 $B=C$,且 A 为定值时,$\tan B+\tan C$ 有极小值,所以

$$A=\pi-2C \quad ②$$

由①,②得

$$A=C=\frac{\pi}{3}\text{ 及 }B=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

在此,当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时,$\tan A+\tan C$ 也有极小值.

但 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$,这式取极小值时,得

$$\tan A\tan B\tan C=\frac{\tan^3\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

一般地说,$\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$.

1958年4月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:范秉椿,游一中,余成群,陈龙昊,陈非非,王国华,陈宏汉.

解答第1,2,3,5题者:武汉十四中高三(二)鸭子数学小组,张禄度,朱襄生,陈绍刚,上海向明中学高二(6)萌芽数学小组,上海敬业中学高二(4)αβγ三刘丁数学小组,曹授伟,张仲文,陈传孟,杜志毅,张筱琴,陈纪添,吴声霞,周国銮,武汉十四中高三(一)CS数理小组,杨厚生,江苏常州三中高二乙璧,陆培荣,邵贻仁,陆菊生,上海陆行中学高二(1)高斯数学小组,曹邦伟,陈章维,黄文健,何泰来,汤南人,李太林,周维鹏,谢光潜,李虎城,江西吉安高中数学小组,广东饶平二中0数学小组.

解答第2,3,4,5题者:上海徐汇中学高Ⅲ(3)数学小组,上海翔殷路小学MJR,蔡璋,黄小云,江苏苏州师院Tricly数学小组,上海徐汇中学四人数学小组,徐自新,许炽雄,苗永温,虞鑫钜.

解答第1,2,3题者:上海中学高二(10)$\sum$小组,武汉十二中高二(3)HBC数学小组,严金仕,杨春益.

解答第1,2,5题者:杨义海,郭志刚,福州四中高三(1)αβγ数学小组.

解答第1,3,5题者:王泽涵,毛定良.

解答第2,3,5题者:上海中国中学高二(1)数学小组,许履珑,许履瑚,钱末末,丁育胜,仇福庭,武汉一中高二(七)L.L,朱遂生,王掌发,思仲,思修,许传根,广西柳州飞一路23号,朱振球,安徽全椒小桥$\sum$数学小组,洪利杰,天津十九中高三(7)居里小组,张华民,上海格致中学高三(3)数学小组,杨克,徐州三中高二(3)牛顿数学小组,崔剑敏,傅正生,南京十一中高三(二)数学小组,高思,魏柏良,张传忠,谷安铭,许贤定,王荣熙,盛沛根,盛沛栋,安徽全椒县$\sum\pi\int$数学小组,王国仁,王生洪,薛正中,傅烨,高册代,上海同济中学高三(3)$a+bi$数学小组,康玉祥,上海蓬莱中学高三(1)狄建华数学分子团,任德祥,严石高,安徽滁县一中一读者,吴荫会,丁启圣,清灵,倪国顺,吴训威,黄鹏程,南京三中高三甲爱因斯坦数理小组,温涌源,孙增柯,王庆诚,王章洪,王少生,程家荣,曹丽芳,马欢,武汉十四中高二(六)三人数理小组,华旭,安徽歙县中学高二飞马数学小组,邹海岳,徐世震,关志仁,上海文建中学高二四数学小组,商恒,陈寿世,蔡子超,卢元伟,长春十二高中二年六班∞数学小组,齐东旭,上海华东师大附中高二联数学小组,上海杨思中学高二(5)三人小组,陆忠

明，上海光明中学四人数学小组，王普，张方平，章正华，刘广祥，李汉祥，田野，施柏赛，黄水源，姜世昌，上海五十八中高三(2)数学小组，上海向明中学高二七咪咪咪数学小组，绍兴二中五星数学研究小组，上海育才中学高二数学小组，林齐盛，陈国新，陈兴昭.

解答2,4,5题者：上海延安中学高二(3)数学小组，戴世杰.

解答两个题目者：四川邛中曹永源泉叶时爽数理小组，方文德，方正域，广州豪贤路83号数学爱好者，上海陕北中学高二(二)萌芽数学小组，江苏泰州中学高二f(ψ)数学小组，江西丰城中学Ω数理小组，安徽芜湖一中高二(4)$P=mg$，江西鄱阳中学，彭晋明，扬州数学通讯读者，南京三中丁班爱因斯坦数理小组，江苏常州三中高二乙祖暅数学小组，广州四中高二数学小组，湖北孝感高中三五班A.P.数学小组，南京考棚小学周祖尧数理研究小组，江苏吴县中学高二(2)笛卡儿数学小组，安徽歙县中学金星数学小组，九江二中的一人，海门五浩乡五社新农民，北京师大附中高一(2)伽罗瓦数学爱好小组，武昌实验中学高二(3)数学爱好小组，上海市东中学高二(6)黎曼数学小组，上海卢湾中学高三(1)红旗数学乙组，广州广雅中学高二已数学小组，南京十二中高二(3)皮埃尔·居里数理小组，西安合作，武汉十二中高一(1)数理化小组，彭祖仁，仲秀美，曾焕文，刘业田，俞展犹，肖志芳，罗木克等一百五十六件，姓名从略.

解答一个题目者：骆志平，福州二中陈炳正数学小组，扬州曹隐巷数学爱好者，湖南澧县一中高十七班xya，徐州三中高二(2)居里小组，李倬，吉林省前郭旗蒙古族自治区Maxwell数理小组，杨传根，福建南安国光中学黄华数学组，浙江瑞安中学高二(4)$\sum x^2$，广东台城广茂盛数学小组，苏州江苏师院男二123，盛幼君，上海东昌中学高二(1)数学小组，上海延安中学高二(1)31号，福建晋江二中高二(4)数学爱好者，张杨富，扬州县中高二(2)52号，广东台山端芬中学尤拉数学小组，内蒙古扎兰屯中学，戴寿林，杨正新，陈其萃，李铭新，林盛光，刘焕森，冯希祥，曹家绪，封辅智，李艺等一百九十件，姓名从略.

1958年4月号小知识问题答案

❖嘉量

1."嘉量"是什么东西?有什么用途?(提出人:兰州 姚安琼)

答 我国度量衡的标准器具,叫做"嘉量".这器最初的记载见于周礼.古代嘉量遗传于世上的有"新莽嘉量".也就是刘歆所造的嘉量.现在有一具保存于北京故宫博物院,完整如故.自这器出现后,在中国度量衡史上,实有极大的价值.古代度量衡有好多事实都可由这器予以证明.因此学者们惊为"旷世奇宝"呢!

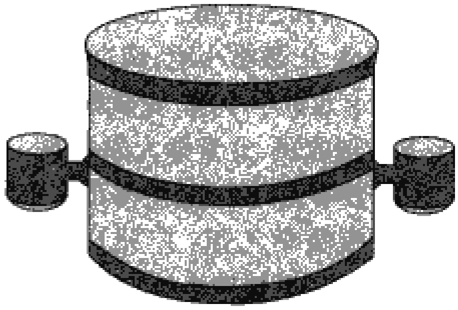


图1

刘歆嘉量是用铜质做成的.正中是一个圆柱体,近下端处有一个横隔层,层上是"斛"量,恰容一斛,口面向上;层下是"斗"量,恰容一斗,口面向下;左耳是一个小圆柱体,底在下,口向上,是"升"量,恰容一升;右耳也是一个小圆柱体,中间有一个横隔层,上面是"合"量,恰容一合,下面是"龠"量,恰容一龠(图1).故汉志载道:"上三下二,参天两地".这是一个"斛斗升合龠"五量齐完的标准容量器.

嘉量上刻有铭文,载明五量的尺度,根据它可以推算新莽时代的尺度;嘉量重二钧,也就是六十斤,据此可以计算那时候的重量,再凭这器所发出的声音,正符合黄钟的宫声,也可由此器以审定乐律,总括说来,律度量衡四事,全可由这器一起地考究出来呢.

❖蜂房

2.问蜜蜂房有两种二面角,它们的角度是多少呢?(提出人:长沙管杏度)

答 在公元三世纪亚历山大数学家帕普斯(Pappus)曾经说道:六角柱状的蜂窝,是最经济的构造.因为它在同样的条件下,所做成的容积最大,所需要

的建筑材料也最少，帕氏这种见解，经过德国学者基普列给予证实.

蜂窝的底，呈现三角锥的形状，侧面是由大小彼此相等的六个长菱形蜡板制成，由于这种做法，在数学领域里获得了一个有趣的发现.在十八世纪初，法国学者马拉第(Maraldi)写过论文，由实验的测定，量得蜂窝体的二面角有两种，都是联结六个菱形面而成.菱面相交角的大小是同样的，钝角是109°28′，锐角是70°32′.雷奥米尔(Reaumur)猜测这样的构造，能够使里面容积最大，表面面积最小，同时所用材料也最节省.于是特请巴黎科学院院士克尼格(Koenig)去计算.结果克氏得出结论说，由三个菱形面构成的二面角，如果需用的材料最少，制成的容积最大时，应该是109°26′和70°34′.这个数值与实际测量的不过有2′的误差，这样更证实了理论与实践之间有很好的联系.

后来苏格兰数学家麦克劳林(Maclaurin,1698—1746)和瑞士数学家吕利埃(L'Huillier,1750—1840)又分别研究这个问题，重复计算，竟然证明蜂窝的构造，实与马拉第的实测数值相符合，而那2′的微小差误，并非由于蜜蜂的做法不对，而是由于克尼格的计算有错.

但像克尼格这样第一流数学家，怎样会有错误呢?主要的是因为他所用的对数表不正确.而这对数表的差错也是偶然被发现的.因为后来有一条船只遇难，这船的船长也是根据这个表来计算的.

❖五角星

3.在内接于直径为1尺的圆内，画一个五角星.试问:(1)$\angle MAN$，$\angle AMB$，$\angle AMC$各是多少度?(2)线段BA，BM，MP，PN，AP，PO，OQ各有多少长?(提出人:河南安阳 赵子显)

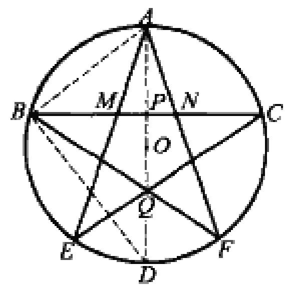


图2

答 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{CA}$

$$\angle MAN=\angle EAF=\frac{1}{5}\times\frac{360^\circ}{2}=36^\circ$$

$$\angle AMC=\angle E+\angle C=72^\circ$$

$$\angle AMB=180^\circ-\angle AMC=108^\circ$$

在$\triangle ABD$中，$\angle ABD=90^\circ$，$\angle ADB=36^\circ$，得

$$BA=AD\cdot\sin\angle ADB=1\cdot\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}=0.587\ 785\ 25(\text{尺})$$

在$\triangle APB$中，$\angle APB=90^\circ$，$\angle ABP=36^\circ$，得

$$AP = BA \cdot \sin\angle ABP = BA \cdot \sin 36^\circ = \frac{5-\sqrt{5}}{8} = 0.345\,491\,50(\text{尺})$$

$$BP^2 = BA^2 - AP^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} - \frac{15-5\sqrt{5}}{32} = \frac{5+\sqrt{5}}{32} = 0.226\,127\,124$$

$$BP = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} = 0.475\,528\,258$$

$$BM = AM = \frac{AP}{\sin\angle AMP} = \frac{AP}{\sin 72^\circ} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \Big/ \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2} = 0.363\,271\,264(\text{尺})$$

$$MP = PN = BP - BM = 0.475\,528\,258 - 0.363\,271\,264 = 0.112\,256\,99(\text{尺})$$

$$PO = AO - AP = \frac{\sqrt{5}-1}{8} = 0.154\,508\,50(\text{尺})$$

又由 $\triangle APB \cong \triangle QPB$，得

$$AP = QP, OQ = QP - PO = AP - PO = \frac{3-\sqrt{5}}{4} = 0.190\,983\,01(\text{尺})$$

注 本题算法，由于先得到 $\sqrt{5} = 2.236\,067\,977\,499\,789\,696\,408\,9$.

所以上面所列诸数值，都精确到尺的小数点后第八位.

❖首末位数字

4. 问 $2^{10\,000}$ 及 $3^{10\,000}$ 各是多少位的数？又它们的首位与末位数字各是什么？(提出人：浙江余姚一中数学小组)

答1 要解答这个题目，需有七位以上的对数表之帮助，不然答数就不可能得到正确.

(1) 令 $x = 2^{10\,000}$，检查十位对数表，得 $\lg x = 10\,000, \lg 2 = 3\,010.299\,957$.

由这式右边的整数部分，知 x 的位数是 $3\,010 + 1 = 3\,011$. 由小数部分，再检查对数表，知 x 的首五位数是 19 950.

又 2^m(m 为任意正整数) 的个位数，当 m 依次取 $1,2,3,4,\cdots$ 时，是由四个数 2,4,8,6 循环地出现. 本题 $m = 10\,000$ 是 4 的倍数，故 x 的末位数是 6.

(2) 令 $y = 3^{10\,000}$，检查十位对数表，得 $\lg y = 10\,000, \lg 3 = 4\,771.212\,547$.

由这式右边的整数部分，知 y 的位数是 $4\,771 + 1 = 4\,772$. 由小数部分，再检查对数表，知 y 的首五位数是 16 313.

又 3^n 的个位数，当 n 依次取 $1,2,3,4,\cdots$ 时，是由四个数 3,9,7,1 循环地出

现.本题 $n=10\ 000$ 是4的倍数,故 y 的末位数是1.

综合上面的(1)(2),得到结论:$2^{10\ 000}$ 是一个3 011位的数,它的首位数是1,末位数是6;$3^{10\ 000}$ 是一个4 772位的数,它的首位数是1,末位数是1.

注 (1) 当 $m=1,2,3,4,\cdots,120,\cdots$ 时,2^m 诸数的末三位数如表1.

表1

2	4	8	16	32	64	128	256	512	024	048	096	192	384	768	536	072	144	288	576
152	304	608	216	432	864	728	456	912	824	648	296	592	184	368	736	472	944	888	776
552	104	208	416	832	664	328	656	312	624	248	496	992	984	968	986	872	744	488	976
952	904	808	616	232	464	928	856	712	424	848	696	392	784	568	136	272	544	088	176
352	704	408	816	632	264	528	056	112	224	448	896	792	584	168	336	672	344	688	376
752	504	008	016	032	064	128	256	512	024	048	096	192	384	768	336	472	144	288	576
152	304																		

从表1可以看出 2^m 诸数的末位数是由四个数2,4,8,6循环地出现,末两位数是从 2^{21} 起每二十个数循环地出现.末三位数是从 2^{21} 起每一百个数循环地出现.故 $2^{10\ 000}$ 的末三位数是376.

(2) 当 $n=1,2,3,4,\cdots,100,\cdots$ 时,2^n 诸数的末三位数如表2.

表2

3	9	27	81	243	729	187	661	683	049	147	441	323	969	907	721	163	489	467	101
203	609	827	481	443	329	987	961	883	649	947	841	523	569	707	121	363	089	267	801
403	209	627	881	643	929	787	361	083	249	747	241	723	169	507	521	563	689	067	201
603	809	427	281	843	529	587	761	283	849	547	641	923	769	307	921	763	289	867	601
803	409	227	681	043	129	387	161	483	449	347	041	123	369	107	321	963	889	667	001

从表2可以看出,3^n 诸数的末位数是由四个数3,9,7,11循环地出现.末两位数是从 3^1 起每二十个数循环地出现.末三位数是从 3^1 起每一百个数循环地出现.故 $3^{10\ 000}$ 的末三位数是001.

(3) 解答本题,若用十位的常用对数表,并写出上面的两个表,那么不仅可以求出 $2^{10\ 000}$ 与 $3^{10\ 000}$ 的首位数和末位数,并且可以求出它们的首五位数和末三位数.

答2 这个问题可以用对数来解.

所以

$$\lg 2^{10\ 000}=10\ 000\lg 2\doteq 10\ 000\times 0.301\ 030\ 0=3\ 010.300 \qquad ①$$

由①的整数部,得 $2^{10\ 000}$ 的位数 $=3\ 010+1=3\ 011$.

由 ① 的小数部，得 $0 < 0.300 < 0.3010$. 在此知道，当对数为 0.301 0 时，其真数为 2；当时数为 0.300 时，其真数必小于 2，所以 2^{10000} 的首位数是 1.

又因为

$$\lg 3^{10000} = 10000 \lg 3 = 10000 \times 0.4771213 = 4771.213 \qquad ②$$

由 ② 的整数部，得 3^{10000} 的位数 $= 4771 + 1 = 4772$.

由 ② 的小数部，得 $0 < 0.213 < 0.3010$. 在此知道，当对数为 0.301 0 时，其真数为 2；当对数为 0.123 时，其真数必小于 2，所以 3^{10000} 的首位数是 1.

再由 $2^{10000} = (2^4)^{2500} = (16)^{2500}$，我们在此知道：任何一个正整数，当其个位数为 6 时，其任何正整数方幂的末位数一定是 6，所以 2^{10000} 的末位数是 6.

用同样方法，由 $3^{10000} = (3^4)^{2500} = (81)^{2500}$，得到 3^{10000} 的末位数是 1.

❖六个菱形

5. 把十三个数码 1,2,3,…,13 填入相连的六个四边形各个角上，使每个四边形数字之和都相等，问该怎样填法？(提出人：上海方积棋)

答　图 3 上有相连的六个菱形. 中心数字 M 用过六次，各 a 字用过两次. 各 a 字写法的顺序，从 a_1 起，逆着时针运行的方向. a_1 为诸 a 中的最小者，$a_1 < a_2$，这两个 a 字写定后，其余的字可接着写下去. 各 b 字写法的顺序，从 b_1 起，亦仿上法.

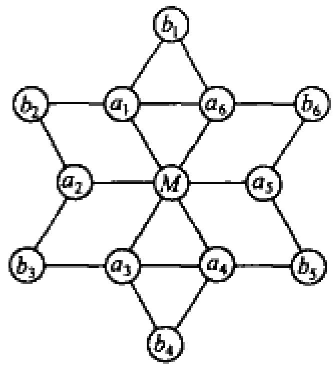


图 3

令 A 为六个 a 字之和，B 为六个 b 字之和，N 为每个菱形四数之和. 依题意

$$M + A + B = 1 + 2 + 3 + \cdots + 13 = 91$$

设 $M = 1$，得

$$A + B = 90 \text{ 及 } 6N = 6M + 2A + B$$

这时 A 与 B 都需为 6 的倍数. 如 A 取最小的六个数：2,3,4,5,6,10(这个数不能为 7，因为六个数之和必须是 6 的倍数). 得

$$A = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 = 30$$

$$B = 90 - 30 = 60, N = \frac{126}{6} = 21$$

在此当 $N = 21$ 时，A 与 B 的取值如表 3.

表 3

A	2	3	4	5	6	10	2	3	4	5	7	9	2	3	4	6	7	8	3	4	5	6	7	11
B	7	8	9	11	12	13	6	8	10	11	12	13	5	9	10	11	12	13	2	8	9	10	12	13

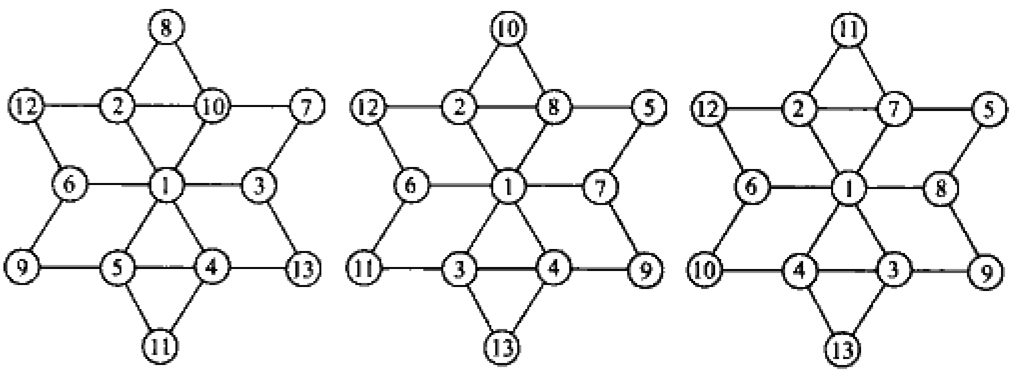
将 A 与 B 配合作成表 4.

表 4

M			1																										
B			13		12		11		9		8		7		*B*			13		12		11		10		8		6	
N − *B*			7		8		9		11		12		13		*N* − *B*			7		8		9		10		12		14	
A			3	4	2	6	4	5	5	6	2	10	3	10	*A*			2	5	3	5	2	7	3	7	3	9	5	9
2	3	4			3	5	3	6							2	3	4	3	4			4	5			5	7		
5	6	10													5	7	9												
B			13		12		11		10		9		5		*B*			13		12		10		9		8		2	
N − *B*			7		8		9		10		11		15		*N* − *B*			7		8		10		11		12		18	
A			3	4	2	6	3	6	2	8	4	7	7	8	*A*			3	4	3	5	3	7	4	7	5	7	7	11
2	3	4					2	7	3	7	3	8			3	4	5					4	6	5	6				
6	7	8							4	6					6	7	11												

从表 4 看来,当 A 取 2,3,4,5,6,10 时,可作出图 4(a).

当 A 取 2,3,4,6,7,8 时,可作出图 4 中的(b) 与(c).但当 A 取 2,3,4,5,7,9 或 3,4,5,6,7,11 时,却不能作图.



(a)　　(b)　　(c)

图 4

当 $M=1$ 时,A 的六个数之和可等于 30,36,42,48,54,60 诸值. A 值既定后,相应的再求 B 的诸值,因而作出图形.

同样,设 $M=2,3,4,\cdots,13$,也可作出一些图形来,如表 5.

表 5

M	1						2						3							4						
A	30	36	42	48	54	60	31	37	43	49	55	61	26	32	38	44	50	56	62	27	33	39	45	51	57	63
B	60	54	48	42	36	30	58	52	46	40	34	28	62	56	50	44	38	32	26	60	54	48	42	36	30	24
N	21	22	23	24	25	26	22	23	24	25	26	27	22	23	24	25	26	27	28	23	24	25	26	27	28	29

M	5						6							7							8						
A	28	34	40	46	52	58	23	29	35	41	47	53	59	24	30	36	42	48	54	60	25	31	37	43	49	55	61
B	58	52	46	40	34	28	62	56	50	44	38	32	26	60	54	48	42	36	30	24	58	52	46	40	34	28	22
N	24	25	26	27	28	29	24	25	26	27	28	29	30	25	26	27	28	29	30	31	26	27	28	29	30	31	32

M	9						10							11							12					
A	26	32	38	44	50	56	21	27	33	39	45	51	57	22	28	34	40	46	52	58	23	29	35	41	47	53
B	56	50	44	38	32	26	60	54	48	42	36	30	24	58	52	46	40	34	28	22	56	50	44	38	32	26
N	27	28	29	30	31	32	27	28	29	30	31	32	33	28	29	30	31	32	33	34	29	30	31	32	33	34

M	13				
24	30	36	42	48	54
54	48	42	36	30	24
30	31	32	33	34	35

在所作诸图形中，如取 $M=1$ 的图，将数码 1,2,3,…,13 逆序写为 13,12,11,…,1，就变为 $M=13$ 的图 4(c)．又原来 N 取最小值 2,3,4,5,6,10，也就变为取最大值 12,11,10,9,8,4，其他 $M=2,3,4,\cdots$ 都可同样办理．因此每一个图形都可以变成两个，前后两图的 N 之和总是 56．所以要作出全部图形，只需作出 $M=1,2,3,\cdots,7$ 的图形就够了．更有趣的取 $M=7$，$N=28$ 的图形，如将各数字逆序改写后，仍是原来的图形．

今写出一些图形的填写法如表 6(表中 M 从 1 到 13，N 从 21 到 35 都有)．

表 6

M	N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
1	21	2	6	3	4	7	8	10	12	11	13	9	5
		2	6	4	3	8	7	11	12	10	13	9	5
		2	6	5	4	3	10	8	12	9	11	13	7
	22	2	9	5	3	6	11	8	10	7	13	12	4
	23	2	7	12	4	8	9	11	13	3	6	10	5
		2	9	10	5	4	12	8	11	3	7	13	6
		4	5	6	7	12	8	10	13	11	9	3	2
	24	2	9	6	13	7	11	10	12	8	4	3	5
		3	7	11	10	9	8	12	13	5	2	4	6
		3	7	12	5	10	11	9	13	4	6	8	2
	26	5	12	11	10	9	13	7	8	2	4	6	3
		7	8	11	12	9	13	5	10	6	2	4	3
		7	8	13	9	11	12	6	10	4	3	5	2

续表 6

M	N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
2	22	1	6	3	5	7	9	10	13	11	12	8	4
	23	1	8	4	6	5	13	7	12	9	11	10	3
	24	1	9	6	13	4	10	11	12	7	3	5	8
		1	10	3	12	4	13	8	11	9	7	6	5
		1	10	9	6	4	13	8	11	3	7	12	5
	25	3	7	12	10	8	9	11	13	4	1	5	6
	26	4	11	10	13	5	12	8	9	3	1	6	7
3	22	1	5	2	6	4	8	10	13	12	11	9	7
		1	5	4	8	2	6	12	13	10	7	9	11
	23	1	7	9	5	2	8	11	12	4	6	13	10
		1	8	5	2	6	10	9	11	7	13	12	4
	24	1	9	4	5	6	13	7	11	8	12	10	2
	25	1	8	10	5	11	9	12	13	4	7	6	2
		2	7	6	11	10	8	12	13	9	5	1	4
		2	11	6	4	8	13	7	9	5	12	10	1
	26	1	10	7	11	8	13	9	12	6	5	4	2
		2	8	11	7	10	12	9	13	4	5	6	1
	28	7	10	9	12	11	13	5	8	6	4	2	1
		7	10	13	11	9	12	6	8	2	1	5	4
4	24	1	6	5	3	10	8	11	13	9	12	7	2
	26	1	8	12	7	6	11	10	13	2	3	9	5
		1	11	6	13	2	12	9	10	5	3	7	8
	27	5	6	8	13	9	11	7	12	9	2	1	3
	28	5	8	9	12	10	13	6	11	7	3	2	1
		5	8	10	13	9	12	7	11	6	1	2	3
		6	7	9	12	10	13	5	11	8	3	2	1
		6	7	12	9	13	10	8	11	5	3	2	1
	29	8	10	9	13	11	12	5	7	6	3	1	2
5	25	1	8	3	4	6	12	7	11	9	13	10	2
		2	6	3	4	9	10	8	12	11	13	7	1
	26	1	9	8	3	6	13	7	11	4	10	12	2
	27	1	8	12	6	9	10	11	13	2	4	7	3
	28	4	6	9	11	10	12	7	13	8	3	2	1
	29	4	11	12	10	8	13	7	9	1	2	6	3

续表 6

M	N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
6	24	1	4	2	5	3	8	9	13	12	11	10	7
	26	1	7	11	4	3	9	10	12	2	5	13	8
	28	2	8	13	5	10	9	11	12	1	4	7	3
	30	4	12	11	10	9	13	7	8	1	3	5	2
7	25	1	4	2	5	3	9	8	13	12	11	10	6
	26	1	5	3	4	9	8	10	13	11	12	6	2
	28	1	8	3	13	6	11	9	12	10	5	2	4
		1	9	2	13	5	12	8	11	10	6	3	4
		2	6	4	12	8	10	9	13	11	5	1	3
		3	5	4	11	9	10	8	13	12	6	1	2
	30	5	6	13	9	11	10	8	12	4	1	3	2
	31	5	11	9	12	10	13	6	8	4	3	2	1
8	26	1	5	4	3	2	10	7	12	9	11	13	6
	32	6	11	9	12	10	13	5	7	4	3	2	1
9	27	1	6	4	2	3	10	7	11	8	12	13	5
	31	2	8	10	11	6	13	7	12	4	1	5	3
10	27	1	3	2	6	4	5	11	13	12	9	7	8
	29	1	5	3	9	8	6	12	13	11	7	2	5
	32	4	6	13	8	9	11	7	12	3	1	5	2
11	28	1	3	5	2	7	4	12	13	9	10	8	6
	34	6	10	8	12	9	13	4	7	5	3	2	1
12	30	1	4	3	10	2	9	8	13	11	5	6	7
	33	1	9	8	10	6	13	7	11	4	3	5	2
	34	5	7	9	11	8	13	4	10	6	2	3	1
13	30	1	5	3	2	7	6	10	11	9	12	8	4
	35	4	11	10	9	8	12	6	7	1	3	5	2

1958 年 4 月号小知识解答者名单

解答第 2,4,5 题者:孙增柯,王庆诚,王章洪,朱道本,王少生,程家荣.

解答第 3,4,5 题者:库明,徐宽浩.

解答第 2,4 题者:任德祥.

解答第 3,4 题者:陆彭年,何泰来,陆忠明.

解答第 3,5 题者:徐德生,田长宏,张尧,陈寿福,杨义海,冯学潜.

解答第 4,5 题者:曹纯光,上海市东中学朱煕根,马中骥数学研究小组,王永吉,北京三中丁班爱因斯坦数理小组,上海陆行中学高二(1) 高斯数学小组,殷铁成,赵正萍,余志峰,姚平,孙宝珍,钱松田,倪国顺,吴训威,黄鹏程,毛连生,黄杰,胡汉林,黄炳贵,汤德祥,南京十二中高二(3) 皮埃尔居里数理小组.

解答第 3 题者:彭芬贞,曹授伟,周凤君,杨占衡,吴耀辉,郑谋宏,孙克纯,杨守纯,仇恒刚,程家永,王于纯,周星南,杨金锁.

解答第 4 题者:俞大莪,刘世岷,王荣熙,陈纪添,田树桢,梁文龙,蔡汝圻,孙丽卿,周志畅,清灵,程益敏,仇福庭,丁育胜,吴尧,王广生,郭志刚,杨厚生,上海东昌中学高二(1) 数学小组,俞展犹,熊松年,郭振榜,许炽雄,苗永温,虞鑫钜.

解答第 5 题者:刘玉兰,江苏常州一中,朱麟强,晏花香,李义魁,李茂炎,万义顺,刘三林,武汉十四中高一(二) 数学小组,钟爱,谷国传,王掌发,思仲,思修,陈开普,黄仁义,刘连陬,汤彬如,徐州三中高二(3) 牛顿数学小组,刘芳太,林昌,刘松铭,王子仁,内蒙古扎兰屯中学高一(一) 罗巴契夫斯基小组,王金成,江苏丰城中学 Ω 数理小组,徐元泉,唐曲文,卢良能,高景昌,张雷,傅爆,高册代,赵恭,贺永山,吴明浩,周雄谋,周克,李成威,梁平,苏飞飞,袁振生,朱中南,傅正生,傅正堂,严庆宏,鸿祥,张廉良,孙先驱,朱长寿,理明,张志华,林振汉,湖南澧县一中高 20 班 1,2,1,李栗,邹正平,邹海岳,上海卢湾中学高一(2) 海君数学小组,祝义生,向大江,邓维新,谢家树,江苏无锡五中高二数学爱好者,健康者,志鸿道,上海杨思中学高二(5) 三人小组,赵延光,张金铭,安徽歙县中学数学小组,张世正,王成三.

1958年5月号征解问题答案

❖绝对值的方程

1. 解方程：$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.（提出人：福建漳州 唐文骞）

解 要解有关绝对值的方程，关键问题是怎样去掉绝对值的符号．那就是要问到那绝对值中未知数应取在什么范围或特殊值时，才能使方程中各绝对值符号内的代数式值为零，大于零，或小于零，这一来，便可根据绝对值的定义，去掉绝对值符号，变成方程，来解方程了．

我们把未知数 x，在正负数的自然数系的数轴上，分为可能取的范围有四个，特殊值有三个，即共有七种情况（图 1）．在各种情况中，去掉式中的绝对值符号以解方程．

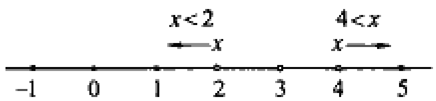


图 1

(1) 当 $x<2$ 时，$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=-(x-2)-(x-3)-(2x-6)=-4x+13$，得 $-4x+13=9$，即 $x=1$．所以 $x<2$ 时，方程有一解 $x=1$．

(2) 当 $x=2$ 时，$0+1+4=5\neq 9$．所以 $x=2$ 不是原方程的根．

(3) 当 $2<x<3$ 时，$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=x-2-(x-3)-(2x-8)=-2x+9$，得 $-2x+9=9$，即 $x=0$，以这值代入原方程，不适合．所以 $2<x<3$ 时，方程没有解．

(4) 当 $x=3$ 时，$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=1+0+2=3$．以这值代入原方程，不适合．所以 $x=3$ 不是原方程的根．

(5) 当 $3<x<4$ 时，$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=x-2+x-3-(2x-8)=3$．以这值代入原方程，不适合．所以 $3<x<4$ 时，方程没有解．

(6) 当 $x=4$ 时，$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=2+1+0=3$．以这值代入原方程，不适合．所以 $x=4$ 不是原方程的根．

(7) 当 $4<x$ 时，$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=x-2+x-3+2x-8=4x-13$，得 $4x-13=9$，即 $x=\frac{11}{2}$．所以 $4<x$ 时，方程有一解 $x=\frac{11}{2}$．

综合以上七种情况，得原方程的解有两个，即 $x=1$ 及 $x=\frac{11}{2}$．

❖含根号与指数的方程

2.解方程：

(1) $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n^2}x^n}}=b.$

(2) $ab\left(\sqrt[n]{\sqrt{m^2+1}-m}\right)^{\frac{x}{m}}+\left(\sqrt[n]{\sqrt{m^2+1}+m}\right)^{\frac{n}{m}}=a+b.$

（提出人：甘肃甘谷姚德辉和上海邹志鸿）

解 (1) 原式变为

$$\sqrt[n]{x^n+a^{\frac{n}{n+1}}x^{\frac{n^2}{n+1}}}+\sqrt[n]{a^n+a^{\frac{n^2}{n+1}}x^{\frac{n}{n+1}}}=b$$

即 $$\sqrt[n]{x^n(1+a^{\frac{n}{n+1}}x^{\frac{-n}{n+1}})}+\sqrt[n]{a^n(1+a^{\frac{-n}{n+1}}x^{\frac{n}{n+1}})}=b$$

即 $$\sqrt[n]{\frac{x^n}{x^{\frac{n}{n+1}}}(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})}+\sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{\frac{n}{n+1}}}(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})}=b$$

即 $$x^{\frac{n}{n+1}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}}+a^{\frac{n}{n+1}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}}}=b$$

即 $(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}})(a^{\frac{n}{n+1}}+x^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{1}{n}}=b$，即 $(x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}=b$

即 $x^{\frac{n}{n+1}}+a^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}$，即 $x^{\frac{n}{n+1}}=b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}$，所以 $x=(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}$

(2) 原式变为

$$ab\left(\sqrt[n]{\frac{m^2+1-m^2}{\sqrt{m^2+1}+m}}\right)^{\frac{x}{m}}+\left(\sqrt[n]{\sqrt{m^2+1}+m}\right)^{\frac{x}{m}}=a+b$$

即 $$ab\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}+m}\right)^{\frac{n}{mn}}+(\sqrt{m^2+1}+m)^{\frac{x}{mn}}=a+b$$

即 $$\frac{ab}{(\sqrt{m^2+1}+m)^{\frac{x}{mn}}}+(\sqrt{m^2+1}+m)^{\frac{x}{mn}}=a+b$$

令 $(\sqrt{m^2+1}+m)^{\frac{x}{mn}}=y$，得 $\frac{ab}{y}+y=a+b$，即 $y^2-(a+b)y+ab=0.$

解这式得 $y_1=a, y_2=b.$

所以

$$x_1=mn\lg_{\sqrt{m^2+1}+m}a,\ x_2=mn\lg_{\sqrt{m^2+1}+m}b$$

或 $$x_1=mn\frac{\lg a}{\lg(\sqrt{m^2+1}+m)},\ x_2=mn\frac{\lg b}{\lg(\sqrt{m^2+1}+m)}$$

或 $$x_1=\frac{mn\lg\frac{1}{a}}{\lg(\sqrt{m^2+1}-m)},x_2=\frac{mn\lg\frac{1}{b}}{\lg(\sqrt{m^2+1}-m)}$$

❖四棱锥

3. 正四棱锥被一个平面所截，得截面恰为正五边形. 求证：正四棱锥的侧棱与底面的交角成45°.（提出人：北京百零一中高中数学组）

证 如图2，设 $O-ABCD$ 是正四棱锥，截面 $EFGHI$ 是正五边形. 截面与棱 OA 相交于 P.

因为 $EF\ /\!/\ IG$，所以 $EF\ /\!/$ 平面 ODB. 又 EF 在平面 ABD 上，所以 $EF\ /\!/\ DB$. 因为 $DB\perp AC$，所以 $EF\perp AC$. 又 $EQ=QF$. 所以 $HQ\perp EF$.

$$\frac{QR}{HR}=\tan\angle QHR=\tan\frac{\angle IHG}{2}=\tan 54° \quad ①$$

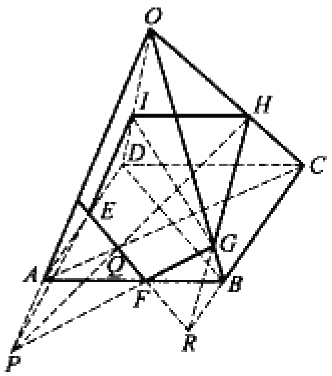


图 2

但 $\triangle RQC$ 是等腰直角三角形，$\angle QRC=\angle QCR=45°$，所以

$$QR=QC \quad ②$$

以 QC 代入 ① 中

$$\frac{QC}{HR}=\tan 54° \quad ③$$

然在 $\triangle HQC$ 中，$\frac{QC}{HQ}=\frac{\sin\angle QHC}{\sin\angle HCQ}$.

令 $\angle OCQ=\angle OAC=\alpha$，$\angle HQC=\beta$，那么 $\angle QHC=180°-(\alpha+\beta)$. 于是

$$\frac{QC}{HQ}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} \quad ④$$

由 ③ 得 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=54°$，即

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha}=\tan 54°$$

即

$$\cos\beta+\cot\alpha\sin\beta=\tan 54° \quad ⑤$$

又在 $\mathrm{Rt}\triangle EQP$ 中

$$\frac{EQ}{PQ}=\tan\angle EPQ=\tan 18° \quad ⑥$$

且 $\triangle EQA$ 是等腰直角三角形，所以 $EQ = AQ$，代入 ⑥ 得 $\frac{AQ}{PQ} = \tan 18°$. 然在 $\triangle APQ$ 中

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{\sin \angle APQ}{\sin \angle PAQ} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$$

于是 $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha} = \tan 18°$，即

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} = \tan 18°$$

即

$$\cos \beta - \cot \beta \sin \beta = \tan 18° \quad ⑦$$

由 ⑤⑦ 得

$$\cos \beta = \frac{1}{2}(\tan 54° + \tan 18°) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 54°}{\cos 54°} - \frac{\sin 18°}{\cos 18°}\right) = \frac{\sin(54° + 18°)}{2\cos 54° \cos 18°} = \frac{1}{2\cos 54°} \quad ⑧$$

及

$$\sin \beta = \frac{1}{2}(\tan 54° - \tan 18°)\tan \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 54°}{\cos 54°} - \frac{\sin 18°}{\cos 18°}\right)\tan \alpha = \frac{\sin(54° - 18°)}{2\cos 54° \cos 18°}\tan \alpha = \frac{\tan \alpha}{2\sin 18°} \quad ⑨$$

⑧⑨ 各自平方再相加

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos^2 54°} + \frac{\tan^2\alpha}{\cos^2 18°}\right) = 1$$

$$\cot^2\alpha = 4\cos^2 18° - \frac{\cos^2 18°}{\cos^2 54°} = 4\cos^2 18° - \frac{\sin^2 72°}{\cos^2 54°} =$$
$$4\cos^2 18° - \frac{4\sin^2 36° \cos^2 36°}{\sin^2 36°} 4\cos^2 18° - 4\cos^2 36° =$$
$$2(1 + \cos 36°) - 2(1 + \cos 72°) =$$
$$4\sin 54° \sin 18° = 4\cos 36° \sin 18°$$
$$\frac{4\cos 36° \sin 18° \cos 18°}{\cos 18°} = \frac{2\cos 36° \sin 36°}{\cos 18°} = \frac{\sin 72°}{\cos 18°} = 1$$

$\tan \alpha = 1$，在此因为 $\alpha < \frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha = 45°$，即侧棱与底面的交角是 $45°$.

❖实数范围

4. 设 $y=\dfrac{2x-m}{x^2-4x+3}$. 问 m 取如何的实数时，对于任意给 y 的实数，x 的值恒为实数?(提出人：安徽芜湖 徐礼维)

解 原式化为

$$yx^2-2(2y+1)x+(3y+m)=0$$

这式的判别式是

$$\Delta_1=(2y+1)^2-y(3y+m)=y^2+(4-m)y+1$$

当 y 取任意实数时，要使 x 恒为实数，它的充要条件是 $\Delta_1\geqslant 0$，即

$$y^3+(4-m)y+1>0 \text{ 或 } y^2+(4-m)y+1=0$$

再考虑 Δ_1 的判别式

$$\Delta_2=(4-m)^2-4=m^2-8m+12=(m-2)(m-6)$$

这式当 m 所取的值小于2或大于6，即 $-\infty<m<2,6<m<+\infty$ 时，要使 y 为实数，必须 $\Delta_2\leqslant 0$. 但若使 $\Delta_1\geqslant 0$，y 必须取介于方程 $\Delta_1=0$ 两根范围以外的值，x 才能为实数，这与 y 取任意实数时 x 恒为实数的要求不合. 所以 m 所取的值必须在2与6之间，即当 $2\leqslant m\leqslant 6$ 时，y 取任意的实数，x 才可恒为实数.

注 设取 $m=2,x=1$ 或 $m=6,x=3$ 时，原式变为无意义.

❖余弦等式

5. 设正整数 n 用7除，余数为1,3或4. 求证：

$$\cos\left(\frac{n\pi}{7}-\frac{13\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3n\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5n\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)=0$$

(提出人：长沙 刘光炎)

证 设 $n=7k+r$(k 为整数，r 为余数).

取 $\cos\left(\dfrac{mn\pi}{7}-a\right)$，其中 $m=1,3,5$；$a=\dfrac{13\pi}{14}$ 或 $\dfrac{3\pi}{14}$. 于是

$$\cos\left(\frac{mn\pi}{7}-a\right)=\cos\left[\frac{(7k+r)m\pi}{7}-a\right]=\cos\left(km\pi+\frac{rm\pi}{7}-a\right)=$$

$$(-1)^{km}\cos\left(\frac{rm\pi}{7}-a\right)$$

所以 m 是奇数,所以 $(-1)^{km}=(-1)^{k}$.因此要证原题,只需证明下式(当 $r=1$,3,4 时)

$$\cos\left(\frac{r\pi}{7}-\frac{13\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5r\pi}{7}-\frac{3\pi}{14}\right)=0$$

这式当 $r=1$ 时,变为

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{14}\right)+\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{2}=-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}=0$$

当 $r=3$ 时,变为

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{15\pi}{14}+\cos\frac{27\pi}{14}=0-\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}=0$$

当 $r=4$ 时,变为

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{37\pi}{14}=\cos\frac{5\pi}{14}+0+\cos\frac{9\pi}{14}=0$$

故本题得证.

1958年5月号问题征解解答者名单

解答第1,2,3,4,5题者:高思,江苏常州三中高二祖暅数学小组,上海同寿坊第一数理小组,王文才,顾亦祥,陈善琅,上海向明中学高二(6)萌芽数学小组.

解答第1,2,3,4题者:任德祥,郁惠良,龚复淼,庄善生,刘定华.

解答第1,2,3,5题者:钱末末,傅忠良,林庆昌,关志仁,上海翔殷路小组M.J.R.吴声震,盛沛根,盛沛栋,盛沛梁.

解答第1,2,4,5题者:沈繁,杜志毅,张筱琴,张一球,陈伟侯,王华杰,徐素霙,李倬,李达,上海德馨里40号数理爱好者,戴世杰,邓快帆,邓凯帆.

解答第1,3,4,5题者:张禄度,林为中,刘广祥,田野,缪金生,黄海元,徐子宏,卢鑫钜.

解答第1,2,4题者:朱逖生,小桥,小牛,老四,孙厚军,安徽全椒县$\sum\pi\int$数学小组,李太林,上海虹口教工子弟中学李斐自然科学小组.

解答第1,2,5题者:许贤宣,罗宝财,余成,南京十一中高三(2)数学小组,赖祖正,许传根,王松乔,江苏师院Tricly数学小组,戴大融,上海新闸路9205612数学小组,朱振球,李可丰,张运筹,范秉椿,游一中,上海同济中学高三(3)$a+bi$数学小组,过志雄,安徽歙县中学高二(1)飞马数学小组,姚德辉,李喜奎,汪郁文,张林意,上海延安中学SIL数学小组,陈龙昊,李汉祥,何泰来.

解答第1,3,5题者:李襄生,上海五十八中高三(2)数学小组,曹授伟,浦校忠,李敏浩,孙华富,秦安林,于宏,陈非非,上海蓬莱中学高三(1)狄建华数学分子团,陆忠明.

解答第1,4,5题者:谢羽路,沈元亨,俞展犹,钱贻策,陈汝琛,王生洪,江苏阜宁中学数学小组,茅一民,仲平,武汉一中高二(7)数学小组,广州豪贤路83号数学爱好者,邵贻仁,陆培荣,江西乐平中学数学教研组,汪永忠,李兆顺,上海嘉兴路58弄40号,上海58/40KashingRd.,广东台山端芬中学尤拉数学小组,陶骅,杨知南,王泽涵,绍兴二中高二(3)五星数学研究小组,刘定一.

解答第2,4,5题者:舒昌乐,钟丽婵.

解答第3,4,5题者:上海敬业中学高二(4)$\alpha\beta\gamma$数学小组,严金仕.

解答第1,2题者:朱报佑,上海成都路60弄xyz数学小组,崔剑敏,朱永作,陈东升,江西鹄潭中学高二数学小组,刘白,赣州高中高二$\sum f(\mathrm{i})$数学小组,吴荫曾,丁启圣,戴静安,蔡学道.

解答第1,3题者:黄万芳,王文新,向远馨,王治村,吴文德,陈荣根.

解答第1,4题者:许正严,钱炜昌,袁永昌,张思涛,上海新沪中学高三(1)数理爱好者,谷安铭,喜明德,刘幼松,吴顺林,江苏泰州中学高二 $f(\psi)$ 数学小组,钟文祥,李自强,浙江瑞安中学高三(1)高二(4)数学爱好者,罗武德,王洪礼,江苏吴县中学高二(2)笛卡儿数学小组,戴逸云,田孝友,陈颙,58154,黄炳贵.

解答第1,5题者:苏保根,徐州三中高二(2)居里小组,李华生,褚志仁,长弓,陈申江,吴宏生,江西丰城中学 Ω 数理小组,上海五四中学高三(2)数学爱好者,林贻俊,张炳生,范文彬,曲惠敏,赵久康,胡著智,周国銮,王绍雄,胡绍义,池体涛,广东普一中高二甲 $(\infty+\varepsilon)/2$ 数学小组,彭晋明,丁荣海,卢元伟,浙江奉化中学 θ 小组,王福定,凌启亮,雷英果,唐学悟,何金延,杨鸿汶,沈阳一中高二(戊己) $X^n+Y^n=Z^n$ 数学小组,竺宝元,江西吉安高级中学数学小组,李斐,李平,李雨声,顾莆舟,朱俊英,湖北孝感高中理想班牛顿数理组,武汉十二中高二(3)HKC数学小组,杨屺,雷金泉,邱仲英,曾昭中,北京一零一中高二(4)赵延光数理原子团,上海六十七中高二(1)数学爱好者,徐自新,安徽歙县中学托氏数学小组,卢甲骥,张钰,青春,上海大东门升吉里43号,施伯赛,上海杨思中学高二五班三人小组.

解答第1题者:汤彬如,吴孟齐,绍兴市一中初三(1)冰冰数学小组,武宝亭,福建晋江二中高二(4)数学爱好者,广西僮族自治区博白第二中学 log 数学小组,晏花香,南京孝棚小学周礼尧数理研究小组,谢正忠,陕西三原中学费马小组,无锡一中高二乙人造卫星小组,湖北恩施一中萌芽数学物理小组,无锡一中吴一心数学爱好者等一百二十件姓名从略.

解答第2题者:林贻俊.

解答第4题者:周锡章,陈元相,胡敏辉.

解答第5题者:薛水生,严庆宏,狄函,邬田良,王茂伯,唐广仁,黄文健,罗茂先,赵庚辰.

1958年5月号小知识问题答案

❖刻漏

1. 刻漏起源于何时?什么叫做“刻数”和“箭数”?(提出人:长春 姚璧)

答 刻漏是计算时刻的东西,用器盛水,其下穿有漏孔,器旁记有刻数,看水漏去的多少,以推算时刻的久暂,故称曰:“刻漏”.梁漏刻经载道:“刻漏法起源于轩辕(公元前265年顷)时代,到了夏(公元前2183年以后)商(公元前1751年以后)两代,更形发展,周礼载有挈壶氏是管理刻漏的官职.”

以刻漏计时,一昼夜分为多少“刻数”呢?因各时代而不相同.例如西汉建平二年(公元前五年)以一昼夜为120刻.梁天监六年(507)以一昼夜为96刻(现在钟表上所称的数与这相合).梁大同十年(544)以一昼夜为108刻.根据郑玄周礼注和隋书天文志的记载以一昼夜为100刻.即冬至昼漏40刻,夜昼60刻;夏至昼漏60刻,夜漏40刻;春秋二分夜各50刻.在冬至之后,昼渐长,每九日增加一刻;在夏至之后,昼渐短,每九日减少一刻.每增减“一刻”叫做相差“一箭”,所以“箭数”也就是“刻数”.

晋惠远作有“莲花漏”.宋沈括著有浮漏仪.元元佑三年(1316)铸造的漏刻,计分三部分,上面放置大中小三个铜壶,有龙头漏水,下面一个铜壶不漏水,竖着一把铜尺,刻着十二个时辰,另有一个软木的浮箭,临着水涨沿着铜尺慢慢地浮起,看箭头所指的地方,就知道是什么时刻.这副仪器保存于广州人民博物馆中,距今已有六百多年了.

❖等腰梯形

2. 已知等腰梯形的底和周界,应该怎样选择底角,使所得梯形面积是最大?(提出人:上海中国中学数学物理研究小组)

答 如图1,设等腰梯形为 $ABCD$,底边 $AB = a$,周长 $= AB + BC + CD + DA = l$,高 $DH = h$,面积 $S = \frac{(\text{上底}+\text{下底})\text{高}}{2}$,底角 $A = \alpha$.

令 $CD = x, AD = y, AH = z$,得

$$y = \frac{l-a-x}{2} \quad z = \frac{a-x}{2}$$

$$h=\sqrt{\left(\frac{l-a-x}{2}\right)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}$$

$$S=\frac{a+x}{2}\sqrt{\left(\frac{l-a-x}{2}\right)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}=\frac{a+x}{2}\sqrt{(l-2x)(l-2a)}$$

当 S 最大时，S^2 亦是最大.由上式得

$$S^2=\frac{(a+x)^2(l-2x)(l-2a)}{16}$$

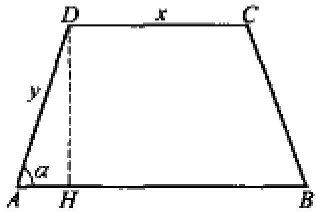


图 1

要这式为最大，只需 $(a+x)^2(l-2x)(l-2a)$ 为最大.

但 $(a+x)+(a+x)+(l-2x)+(l-2a)=2l=$ 定值.在此要使这四个因子的乘积最大，必须使各个因子相等，就是使 $a+x=l-2x$.

于是

$$x=\frac{l-a}{3},y=\frac{l-a-x}{2}=\frac{l-a}{3}=x,z=\frac{a-x}{2}=\frac{4a-l}{6}$$

$$\cos\alpha=\frac{z}{y}=\frac{4a-l}{6}\Big/\frac{l-a}{3}=\frac{4a-l}{2(l-a)}$$

所以

$$\alpha=\arccos\frac{4a-l}{2(l-a)}$$

这式当 $4a-l>0$ 时，α 是锐角；当 $4a-l=0$ 时，α 是直角；当 $4a-l<0$ 时，α 是钝角.

示例如下：若取 $a=10,l=22$.

当 $x=1$ 时，$y=5.5,h=3.162,S=17.393$；

当 $x=2$ 时，$y=5,h=3,S=18$；

当 $x=3$ 时，$y=4.5,h=2.282,S=18.385$；

当 $x=4$ 时，$y=4,h=2.646,S=18.521,\cos\alpha=\frac{3}{4}=0.75,\alpha=41°25'$；

当 $x=5$ 时，$y=3.5,h=2.449,S=18.371$；

当 $x=6$ 时，$y=1,h=1,S=10$；

当 $x=10$ 时，$y=0.7,h=0.632,S=6.640$.

若取 a,l 为其他数值时，亦可同样计算.今特列出表 1 以作实际的比较.

表 1

a	10							
l	22							
x	1	2	3	4	5	6	10	10.6
y	5.5	5	4.5	4	3.5	3	1	0.7

续表 1

h	3.162	3	2.828	2.646	2.449	2.236	1	0.632
S	17.393	18	18.385	18.521	18.371	17.889	10	6.640
α				41°25′				

a	10						
l	28						
x	2	4	6	8	10	12	13
y	8	7	6	5	4	3	2.5
h	6.928	6.325	5.657	4.899	4	2.828	2
S	41.569	42.272	45.254	44.090	40	31.112	23
α			70°32′				

a	10							
l	30							
x	2	4	6	6.667	8	10	12	14
y	9	8	7	6.667	6	5	4	3
h	8.062	7.416	6.708	6.455	5.916	5	3.873	2.226
S	48.374	51.913	53.666	53.798	53.244	50	42.602	26.832
α				75°31′				

a	10						
l	37						
x	1	3	5	7	9	11	13
y	13	12	11	10	9	8	7
h	12.196	11.478	10.712	9.887	8.987	7.987	6.986
S	67.080	74.608	80.341	84.038	85.373	83.835	72.372
α					86°49′		

a	10						
l	40						
x	2	4	6	8	10	12	14
y	14	13	12	11	10	9	8
h	13.416	12.649	11.832	10.954	10	8.944	7.746

续表 1

S	80.498	88.544	94.657	98.590	100	98.386	92.951
α					90°		
a	10						
l	43						
x	1	3	5	7	9	11	13
y	16	15	14	13	12	11	10
h	15.354	14.596	13.775	12.913	11.990	10.989	9.980
S	84.448	94.808	103.312	109.761	113.900	115.380	113.312
α						92°36′	
a	10						
l	46						
x	4	6	8	10	12	14	16
y	16	15	14	13	12	11	10
h	15.716	14.866	13.964	13	11.958	10.817	9.539
S	110.013	118.928	125.678	130	131.540	129.799	124.071
α					94°47′		
a	10						
l	70						
x	4	8	12	16	20	24	28
y	28	26	24	22	20	18	16
h	27.839	25.981	23.979	21.794	19.365	16.581	13.329
S	194.872	233.826	263.770	283.327	290.474	281.913	252.245
α					104°29′		

注 本题出自别尔曼摆线书中,青年出版社1956年译本第112面.在那里说道:"这个问题,千个中学生里也难找得出能解决的."这话是真的吗!请读者作一个正确的估价.

❖矩形和三角形

3.在一个正方形中，画有些横直线及斜线，如图2所示.问图中有多少个"矩形(包括正方形)"，"正方形"和"三角形"?(提出人：山东胶县 李钟义)

答1 设以▭$_4$表示矩形的个数，□$_4$表示正方形的个数，△$_4$表示三角形的个数.并令 $S_1=1,S_2=1+2,S_3=1+2+3,S_4=1+2+3+4$.

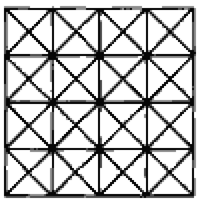


图2

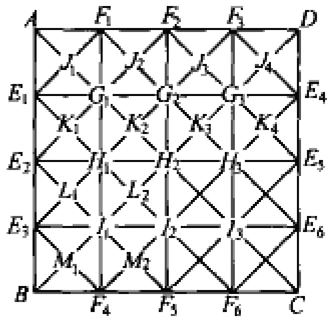


图3

由纵横线所构成的矩形个数是 $S_4^2=100$.由斜线构成的"最大方形"内所含的矩形个数，也是$S_4^2=100$.再由这个"斜最大方形"的凸出部分所能构成的矩形个数是$4\times 3S_3-S_3=11S_3=66$，其中正方形个数是$4S_2=12$.所以

$$▭_4=S_4^2+S_4^2+11S_3=266(\text{个})$$

又由纵横线所构成的方形个数是$1+2^2+3^2+4^2=30$，由斜线所构成的方形个数是12.所以□$_4=2\times 30+12=72$(个).

最后求三角形的个数.公式

$$△_4=\frac{12\times 4^3+18\times 4^2+4\times 4}{4}=192+72+4=268(\text{个})$$

答2 细看图3.

面积与 $AE_1G_1F_1$ 相等的矩形有16个.面积与 $AE_1G_2F_2$ 相等的矩形有24个.

面积与 $AE_1G_3F_3$ 相等的矩形有16个.面积与 $AE_1E_4D_4$ 相等的矩形有8个.

面积与 $AE_2H_2F_2$ 相等的矩形有9个.面积与 $AE_2H_3F_3$ 相等的矩形有12个.

面积与 AE_2E_5D 相等的矩形有6个.面积与 $AE_3I_3F_3$ 相等的矩形有4个.

面积与 AE_3E_6D 相等的矩形有4个.面积与 $ABCD$ 相等的矩形有1个.

面积与 $F_1J_1G_1J_2$ 相等的矩形有24个.面积与 $F_1E_1K_1J_2$ 相等的矩形有36个.

面积与 $F_2K_1H_1J_3$ 相等的矩形有24个.面积与 $F_2E_2L_1J_3$ 相等的矩形有

16个.

面积与 $F_3L_1I_1J_3$ 相等的矩形有8个. 面积与 $F_3E_3M_1J_4$ 相等的矩形有4个.

面积与 $F_1E_1H_1G_2$ 相等的矩形有 13 个. 面积与 $F_2K_1L_2G_3$ 相等的矩形有 16个.

面积与 $F_2E_2I_1G_3$ 相等的矩形有 10 个. 面积与 $F_3L_1M_2E_4$ 相等的矩形有 4个.

面积与 $F_3E_3F_4E_4$ 相等的矩形有2个. 面积与 $F_2K_1I_2K_4$ 相等的矩形有4个.

面积与 $F_2E_2M_2K_4$ 相等的矩形有 4 个. 面积与 $F_2E_2F_5E_5$ 相等的矩形有 1个.

所以矩形共有 266 个. 正方形(上列数字附有括号的) 共有 72 个.

面积与 AJ_1E_1 相等的三角形有64个. 面积与 AE_1F_1 相等的三角形有64个.

面积与 AG_1E_2 相等的三角形有48个. 面积与 AE_2F_2 相等的三角形有36个.

面积与 AK_2F_3 相等的三角形有24个. 面积与 AE_3F_3 相等的三角形有16个.

面积与 AH_2B 相等的三角形有 12 个. 面积与 ABD 相等的三角形有 4 个.

所以三角形共有 268 个.

❖某个自然数

4. 某个自然数与 13 之和是 5 的倍数,又它与 13 之差是 6 的倍数. 问这种自然数最小的三个是什么?(提出人:上海 林贻俊)

答 设某个自然数为 A,因 $A+13$ 是 5 的倍数,故 $A+13$ 的末位数不是 5,便是 0,即 A 的末位数不是 2,便是 7. 又 $A-13$(或 $13-A$) 是 6 的倍数,故 $A-13$ 必是偶数,即 A 的末位数只能是 7 而不是 2. 所以 7 是这样的一个自然数,并且是最小的一个.

既然这种自然数与 13 之和是 5 的倍数,与 13 之差是 6 的倍数,那么除了那个最小一个是7以外,以后的数必是7再加上5,6的最小公倍(即30)之整数倍,所以这种自然数的最小三个是:7,37,67.

❖立体图

5. 把数码 1,2,3,…,20 分别填在立方体的八个角顶及十二条棱的中点,如在图4的小圈处,使(1) 每面的八数之和相等;(2) 每面上四角的四数之和相等;(3) 每四条平行棱的中点四数之和亦相等. 你是个聪明会算的能手,请写出几种不同的图形来. (提出人:福建晋江 许贞松)

答1 设立方体八个角顶的数码为 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_8$. 每面四角之和为 a.

十二条棱中点的数码为 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_{12}$. 每四棱中点之和为 b. 如图 4 所示.

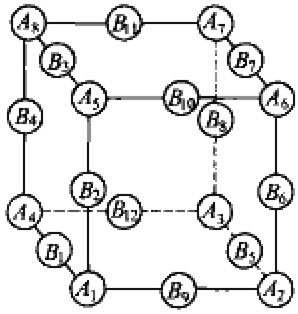


图 4

令

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_8$$
$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{12}$$

因为 $1 + 2 + 3 + \cdots + 20 = 210$. 当 A 取最小值时

$$A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = 36$$
$$B = 210 - 36 = 174$$

得

$$a = 36 \div 2 = 18, b = 174 \div 3 = 58, a + b = 76$$

当 A 取最大值时

$$A = 13 + 14 + 15 + \cdots + 20 = 132, B = 210 - 132 = 78$$

得 $a = 66, b = 26, a + b = 92$. 所以

$$36 \leqslant A \leqslant 132, 174 \geqslant B \geqslant 78$$

又 A 是分配于六个平面上,故 A 与 B 的增加或减少,必是以 6 为公差. 由此知道 a 与 b 的增加或减少,必是以 3 与 2 为公差. 所以

$$18 \leqslant a \leqslant 66, 58 \geqslant b \geqslant 26, 76 \leqslant a + b \leqslant 92$$

各个数码的一些填法如表 2.(立方体的六个面,每面八数之和为 $a + b$;立方体的六个面每面四角之和为 a;十二条棱组成九个面,每面四棱中点之和为 b. 因此每四条平行棱的中点四数之和为 b.)

表 2

$a+b$	A	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b	B
76	36	18	1	6	3	8	4	7	2	5	9	10	20	19	18	16	11	13	17	15	12	14	58	174
			1	6	3	8	4	7	2	5	9	17	13	19	16	12	20	10	15	14	11	18		
			1	7	2	8	4	6	3	5	9	10	20	19	18	16	11	13	17	15	12	14		
			1	7	2	8	4	6	3	5	9	12	20	17	15	19	14	10	16	11	13	18		
			1	7	2	8	6	4	5	3	9	13	19	17	14	18	16	10	15	12	11	20		
			1	7	2	8	6	4	5	3	9	16	18	15	12	14	19	13	17	11	10	20		
			1	7	2	8	6	4	5	3	9	19	12	18	20	11	17	10	13	15	14	16		
			1	8	2	7	4	5	3	6	9	19	20	10	18	13	11	16	14	12	15	17		
			1	8	2	7	6	3	5	4	9	14	18	17	20	12	11	15	19	13	16	10		
			1	8	3	6	7	2	5	4	9	17	12	20	18	11	19	10	16	14	13	15		

续表 2

$a+b$	A	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b	B
77	42	21	1	4	5	11	6	10	2	3	7	12	20	17	15	19	14	8	16	9	13	18	56	168
			1	4	6	10	7	9	2	3	5	13	20	18	15	14	16	11	17	12	8	19		
			1	4	9	7	11	5	3	2	6	13	20	17	16	18	14	8	15	10	12	19		
			1	5	9	6	12	3	4	2	7	14	20	15	19	11	10	16	13	18	8	17		
			1	7	3	10	8	5	6	2	4	16	19	17	20	11	13	12	14	15	9	18		
			1	8	2	10	7	5	6	3	4	16	19	17	18	11	15	12	14	13	9	20		
78	48	24	1	4	12	7	13	6	2	3	5	18	15	16	20	9	14	11	10	17	8	19	54	162
			1	4	12	7	14	5	3	2	6	9	20	19	13	16	15	10	18	11	8	17		
			1	4	13	6	14	5	2	3	7	12	20	15	10	16	17	11	18	8	9	19		
			1	6	10	7	14	3	5	2	4	11	20	19	17	16	13	8	18	9	12	15		
			1	7	2	14	4	12	3	5	6	10	20	18	19	11	9	15	16	17	8	13		
79	54	27	1	4	14	8	15	7	2	3	5	11	20	16	18	19	9	6	12	10	13	17	52	156
			1	4	15	7	16	6	2	3	5	8	20	19	18	14	9	11	17	13	10	12		
			1	4	16	6	17	5	2	3	7	10	20	15	13	19	12	8	14	9	11	18		
			2	8	5	12	7	10	4	6	1	16	15	20	19	13	17	3	14	9	11	18		
80	60	30	1	4	19	6	20	5	2	3	7	18	18	17	16	14	9	11	15	13	10	12	50	150
			1	6	3	20	4	19	2	5	7	15	11	17	14	10	18	8	13	12	9	16		
			1	13	4	12	9	7	6	8	2	10	20	18	17	19	11	3	16	5	14	15		
			4	7	8	11	9	10	5	6	1	18	19	12	16	17	14	3	13	2	15	20		
81	66	33	1	4	19	9	20	8	2	3	5	10	18	15	13	17	12	6	14	7	11	16	48	144
			1	10	2	20	5	17	4	7	3	15	11	19	18	8	16	6	13	12	9	14		
82	72	36	1	4	19	12	20	11	2	3	5	10	18	13	8	14	15	9	16	6	7	17	46	138
			1	8	7	20	10	17	4	5	2	9	16	19	15	12	13	6	18	3	14	11		
			4	13	5	14	7	12	6	11	1	19	18	8	10	3	17	16	15	9	2	20		
83	78	39	1	4	19	15	20	14	2	3	5	8	18	13	11	17	10	6	12	7	9	16	44	132
			1	15	3	20	12	11	10	6	2	8	16	18	19	5	7	13	14	17	4	9		

续表 2

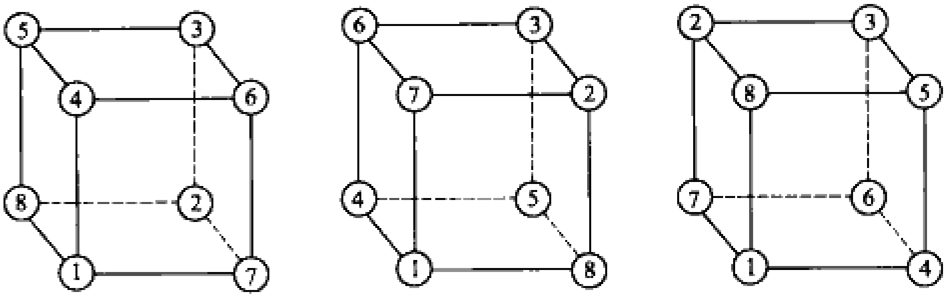
a + b	A	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b	B
84	84	42	1	4	19	18	20	17	2	3	5	6	16	15	14	12	7	9	13	11	8	10	42	126
			1	13	8	20	12	10	11	9	2	4	17	19	16	5	7	14	18	15	3	6		
			1	13	8	20	12	10	11	9	2	19	17	4	16	14	7	5	6	3	15	18		
			1	13	8	20	12	10	11	9	3	5	19	15	18	6	2	16	14	17	4	7		
			1	14	7	20	9	18	3	12	2	15	19	6	16	4	5	17	13	10	8	11		
			1	16	5	20	18	7	14	3	2	15	8	17	19	4	13	6	11	12	9	10		
			1	18	3	20	4	19	2	17	5	13	9	15	12	8	16	6	11	10	7	14		
			1	18	3	20	14	9	12	7	2	11	16	13	19	8	5	10	6	17	4	15		
			1	18	3	20	16	7	14	5	2	6	15	19	13	8	12	9	17	11	4	10		
			1	18	3	20	17	5	16	4	2	7	19	14	13	11	8	10	15	9	6	12		
			1	19	2	20	4	18	3	17	5	6	16	15	14	12	7	9	13	11	8	10		
			1	19	2	20	4	18	3	17	5	9	12	16	10	11	15	6	13	7	8	14		
			1	19	2	20	12	10	11	9	3	5	16	18	8	13	15	6	17	7	4	14		
			1	19	2	20	18	4	17	3	5	9	15	13	16	8	6	12	11	14	7	10		
			1	19	2	20	18	4	17	3	5	14	8	15	16	6	13	7	10	12	9	11		
			1	19	2	20	18	4	17	3	5	15	8	14	16	7	13	6	9	11	10	12		
			1	19	2	20	18	4	17	3	5	15	16	6	14	9	7	12	10	8	11	13		
			2	15	6	19	8	17	4	13	1	5	16	20	14	7	11	10	18	12	3	9		
			2	17	4	19	15	8	13	6	1	9	14	18	16	3	11	12	20	10	7	5		
			2	17	4	19	15	8	13	6	1	16	7	18	20	3	14	5	11	12	9	10		
			2	18	3	19	17	5	16	4	1	14	8	15	20	6	13	7	10	12	9	11		
			4	15	7	16	14	9	11	8	1	2	19	20	10	17	12	3	18	5	6	13		
			4	16	5	17	15	7	14	6	1	20	18	3	13	11	10	8	9	2	12	19		
			4	16	7	15	14	8	9	11	1	20	19	2	10	3	12	7	13	6	5	18		
			5	9	12	16	13	15	6	8	1	18	4	19	17	3	20	2	10	11	7	14		
			5	13	7	17	8	16	6	12	1	19	20	2	18	10	3	11	9	4	15	14		
			5	14	7	16	15	8	13	6	1	18	4	19	10	2	17	3	10	12	9	11		
			5	15	6	16	14	8	13	7	1	19	4	18	20	3	17	2	9	11	10	12		
			7	12	9	14	10	13	8	11	1	5	16	20	6	15	19	2	18	4	3	17		
			7	13	8	14	10	12	9	11	1	5	19	17	20	4	2	16	18	3	6	15		
			7	13	8	14	12	10	11	9	1	3	18	20	17	4	6	15	19	16	2	5		
			7	13	8	14	12	10	11	9	1	5	19	17	20	4	2	16	15	18	3	6		
85	90	45	1	7	19	18	20	17	2	6	3	8	16	13	11	15	10	4	12	5	9	14	40	120
			1	18	6	20	17	9	12	7	2	8	19	11	15	5	4	16	13	14	3	10		
86	96	48	1	10	19	18	20	17	2	9	3	8	16	11	6	12	13	7	14	4	5	15	38	114
			3	18	7	20	15	12	11	10	1	2	16	19	17	9	4	8	14	13	5	6		

续表 2

$a+b$	A	a	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b	B
87	102	51	1	13	19	18	20	17	2	12	3	6	16	11	9	15	8	4	10	5	7	14	36	108
			3	17	11	20	12	19	4	16	1	7	15	13	18	6	2	10	9	14	5	8		
88	108	54	1	16	19	18	20	17	2	15	3	4	14	13	12	10	5	7	11	9	6	8	34	102
			1	18	15	20	16	19	2	17	3	11	7	13	10	6	14	4	9	8	5	12		
			2	19	13	20	15	18	4	17	1	7	14	12	8	5	11	10	16	6	3	9		
			10	15	12	17	13	16	11	14	1	9	20	4	7	2	6	19	18	5	3	8		
89	114	57	4	16	19	18	20	17	5	15	1	6	14	11	9	13	8	2	10	3	7	12	32	96
			5	15	19	18	20	17	6	14	1	2	16	13	12	10	3	7	11	9	4	8		
			6	14	19	18	20	17	7	13	1	5	16	10	12	15	3	2	8	4	9	11		
			10	16	11	20	13	18	12	14	1	7	5	19	17	2	9	4	8	15	3	6		
90	120	60	7	16	18	19	20	17	9	14	1	2	15	12	6	11	8	5	13	4	3	10	30	90
			7	16	19	18	20	17	8	15	1	6	14	9	4	10	11	5	12	2	3	13		
			7	18	16	19	20	15	11	14	1	2	17	10	8	13	4	5	9	6	3	12		
			8	15	19	18	20	17	9	14	1	10	7	12	16	5	6	3	2	13	4	11		
			10	19	11	12	13	18	12	17	1	5	15	9	6	14	8	2	7	4	3	16		
91	126	63	9	18	17	19	20	16	12	15	1	6	14	7	11	5	2	10	13	4	8	3	28	84
			10	16	17	20	18	19	11	15	1	4	14	9	7	13	6	2	8	3	5	12		
			10	16	18	19	20	17	12	14	1	4	15	8	7	13	5	3	9	2	6	11		
			11	15	17	20	18	19	12	14	1	3	16	8	5	10	6	7	13	2	4	9		
			11	18	14	20	19	15	16	13	1	7	17	3	8	6	2	12	10	5	4	9		
			11	19	13	20	18	15	16	14	1	3	17	7	8	12	2	6	9	4	5	10		
92	132	66	13	16	17	20	18	19	14	15	1	2	12	11	10	8	3	5	9	7	4	6	26	78
			13	16	17	20	18	19	14	15	1	11	12	2	10	5	3	8	6	4	7	9		
			13	16	19	18	20	17	14	15	1	2	12	11	10	8	3	5	9	7	4	6		
			13	18	15	20	16	19	14	17	1	3	10	12	9	4	6	7	11	8	2	5		
			13	18	15	20	16	19	14	17	1	5	11	9	12	4	2	8	7	10	3	6		
			13	18	15	20	16	19	14	17	1	9	5	11	8	4	12	2	7	6	3	10		
			13	18	15	20	19	16	17	14	1	3	12	10	11	6	2	7	9	8	4	5		
			13	18	15	20	19	16	17	14	1	10	12	3	11	7	2	6	5	4	8	9		
			13	19	14	20	16	18	15	17	1	7	10	8	4	5	11	6	12	2	3	9		
			13	19	14	20	16	18	15	17	1	8	10	7	4	6	11	5	9	3	2	12		
			13	19	14	20	18	16	17	15	1	2	12	11	7	9	6	4	10	5	3	8		
			13	19	14	20	18	16	17	15	1	4	12	9	7	11	6	2	8	3	5	10		
			13	19	14	20	18	16	17	15	1	9	12	4	7	2	6	11	10	5	3	8		
			13	19	14	20	18	16	17	15	1	11	4	10	12	3	9	2	5	7	6	8		

答2　用数码1,2,3,…,8填写在立方体的八个角上,使每面四角之和都相等,如图5甲$_1$.在这图上写有数码1的角顶有三条棱,因此图5甲$_1$可以改写成图

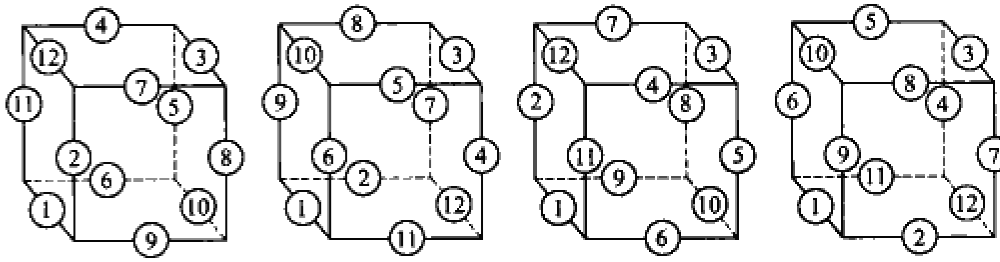
5 甲$'_1$ 及图 5 甲$''_1$. 这三个图是完全相同的.



甲$_1$　　甲$'_1$　　甲$''_1$

图 5

又用数码 1,2,3,…,12 填写立方体的八条棱的中点,使每面四棱中点之和都相等,如图 6 乙$_1$. 在这图上写有数码 1 的棱边有两个. 因此在图 6 乙$_1$ 中,将两数码 2,11 对换,其他各数码亦须合于题意,就会变成图 6 乙$_2$. 又图 6 乙$'_1$ 完全相同于图 6 乙$_1$,图 6 乙$'_2$ 完全相同于图 6 乙$_2$.

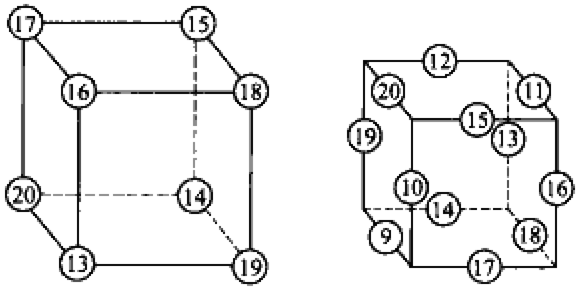


乙$_1$　　乙$'_1$　　乙$_2$　　乙$'_2$

图 6

图 5 甲$_1$,图 6 乙$_1$,乙$_2$ 可以作为基础图. 今将一些基础图甲$_1$,甲$_2$,甲$_3$,甲$_4$,甲$_5$,甲$_6$,乙$_1$,乙$_2$,乙$_3$,…… 列表如表 3.(表中 $a_1,a_2,a_3,\cdots,b_1,b_2,b_3\cdots$ 的位置,如前图所示. 除这表外,还有很多其他基础图.)

仅就表 3 来说,若以图 5 甲$_1$ 为基础,与图乙$_1$ 配(表中每个甲图有三图是完全相同的,每个乙图有两图是完全相同的),也就是以图 5 甲$_1$ 与图 7 乙$^\circ_1$ 配(图 7 乙$^\circ_1$ 是由图 6 乙$_1$ 的数码各加以 8 作成). 先在图 5 甲$_1$ 的 8,1 之间写 9,在 5,4 之间写 20;或在 8,1 之间写 9,在 5,4 之间写 18. 这样就做成了图 8 的(a) 与(b). 同样在 8,1 之间也可写图 7 乙$^\circ_1$ 的 10,11,12,…,20. 所以图 5 甲$_1$ 与图 7 乙$^\circ_1$(即乙$_1$) 配,可以做成二十四图. 又图 5 甲$_1$ 也可与图乙$_2$,乙$_3$,乙$_4$,……,乙$_{14}$(如只取这十四个基础图) 配,各得二十四图. 所以由图甲$_1$ 就得 $14\times 24=336$ 图. 同样由图甲$_2$,甲$_3$,甲$_4$,甲$_5$,甲$_6$ 各与图乙配,这样在上面图甲乙的配合,可得 $6\times 336=2\ 016$(图).



甲$^{\circ}_1$　　乙$^{\circ}_1$

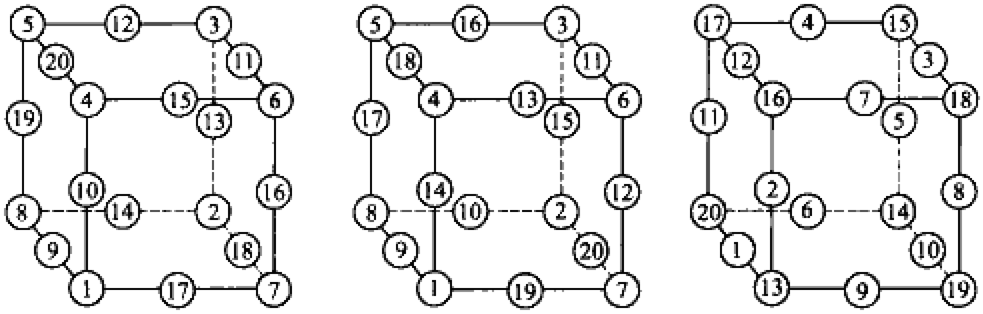
图 7

表 3

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
甲$_1$	1	7	2	8	4	6	3	5
甲$'_1$	1	8	5	4	7	2	3	6
甲$''_1$	1	4	6	7	8	5	3	2
甲$_2$	1	7	2	8	6	4	5	3
	1	8	3	6	7	2	5	4
	1	6	4	7	8	3	5	2
甲$_3$	1	8	2	7	4	5	3	6
	1	7	6	4	8	2	3	5
	1	4	5	8	7	6	3	2
甲$_4$	1	8	2	7	6	3	5	4
	1	7	4	6	8	2	5	3
	1	6	3	8	7	4	5	2
甲$_5$	1	6	3	8	4	7	2	5
	1	8	5	4	6	3	2	7
	1	4	7	6	8	5	2	3
甲$_6$	1	8	6	3	4	5	2	7
	1	6	7	4	8	3	2	5
	1	4	5	8	6	7	2	3

续表 3

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
乙$_1$	1	2	12	11	10	8	3	5	9	7	4	6
乙$'_1$	1	6	10	9	12	4	3	7	11	5	8	2
乙$_2$	1	11	12	2	10	5	3	8	6	4	7	9
	1	9	10	6	12	7	3	4	2	8	5	11
乙$_3$	1	3	12	10	11	6	2	7	9	8	4	5
	1	5	11	9	12	4	2	8	10	7	6	3
乙$_4$	1	10	12	3	11	7	2	6	5	4	8	9
	1	9	11	5	12	8	2	4	3	6	7	10
乙$_5$	1	4	12	9	7	11	6	2	8	3	5	10
	1	10	7	8	12	5	6	3	9	2	11	4
乙$_6$	1	9	12	4	7	2	6	11	10	5	3	8
	1	8	7	10	12	3	6	5	4	11	2	9
乙$_7$	1	5	12	8	4	7	9	6	11	3	2	10
	1	10	4	11	12	2	9	3	8	6	7	5
乙$_8$	1	8	12	5	4	6	9	7	10	2	3	11
	1	11	4	10	12	3	9	2	5	7	6	8
乙$_9$	1	5	11	9	12	4	2	8	7	10	3	6
	1	6	12	7	11	3	2	10	9	8	4	5
乙$_{10}$	1	9	11	5	12	8	2	4	6	3	10	7
	1	7	12	6	11	10	2	3	5	4	8	9
乙$_{11}$	1	6	11	8	4	5	10	7	12	3	2	9
	1	9	4	12	11	2	10	3	8	7	5	6
乙$_{12}$	1	8	11	6	4	7	10	5	9	2	3	12
	1	2	4	9	11	3	10	2	6	5	7	8
乙$_{13}$	1	7	10	8	4	5	11	6	12	2	3	9
	1	9	4	12	10	3	11	2	8	6	5	7
乙$_{14}$	1	8	10	7	4	6	11	5	9	3	2	12
	1	12	4	9	10	2	11	3	7	5	6	8



(a) (b) (c)

图 8

若以图乙$_1$ 为基础,与图甲$_1$ 配,也就是以图乙$_1$ 与图甲$°_1$ 配(图甲$°_1$ 是由图甲$_1$ 的数码各加以 12 作成),就做成了图 8(c).但因为在图甲$°_1$ 的每个角顶都有三条棱,所以图乙$_1$ 与图甲$°_1$(即甲$_1$) 配,若固定一个角顶 13,可以做成三图.八个角顶就有二十四图.同样图乙$_1$ 也可与图甲$_2$,甲$_3$,甲$_4$,甲$_5$,甲$_6$ 配,所以由图乙$_1$ 与甲$_1$,甲$_2$,甲$_3$,甲$_4$,甲$_5$,甲$_6$ 配有 $6 \times 24 = 144$ 图.再图乙$_1$,乙$_2$,乙$_3$,……,乙$_{14}$ 都可与甲$_1$,甲$_2$,甲$_3$,甲$_4$,甲$_5$,甲$_6$ 配,这样图甲,乙的配合,可得 $14 \times 144 = 2\,016$(图).

综合上面两者得图乙的配合共有 $2\,016 + 2\,016 = 4\,032$(图).

注 在每图作成后,如把数码 1,2,3,…,20 逆序写为 20,19,18,…,1,那么每一个图形都可以变成两图.

1958 年 5 月号小知识解答者名单

解答第 1,3,5 题者:符紫明.

解答第 2,3,5 题者:杨喜阳.

解答第 1,4 题者:内蒙古扎兰屯中学高一,一罗巴契夫斯基数学小组.

解答第 4,5 题者:程滋钧,唐崇明,曹纯光,北京百零一中高二(4) 赵延光数理原子团.

解答第 2 题者:王生洪.

解答第 3 题者:许维仁,林森.

解答第 4 题者:程同,汤彬如,曹纯光,蔡思义,张思涛,武汉三中 Sophists 数学兴趣组,程龙,上海五四中学高三(2) 数学爱好者,全志远,绍兴市一中初三(1) 冰冰数学小组,肖文毅,舒昌乐,许贤定,上海敬业中学高二(4) 刘德民数学分子团,王绍雄,郑崇敢,富杰,潘政奇,长沙五中学生印,卢元伟,李钧,曹授伟,喜明德,张一球,陈伟侯,陈恕中,王家堃,刘梦柯,广州豪贤路 83 号数学爱好者,高岳,邵贻仁,陆培荣,北京师大附中高一(2) 伽罗瓦数学小组,李倬,李达,唐广仁,姚德辉,曾昭中,赖永昌,王洪礼,罗武德,郭锡悌,陈颙,上海延安中学高二(3) 数理小组,陆忠明,王天春,陕西三原中学费马小组,虞鑫钜,无锡一中吴一心数学爱好者,彭祖仁,仲秀美.

解答第 5 题者:江西丰城中学 Ω 数理小组,吕恩广,张金铭,卢元伟,田长宏,林学斌,朱元生,刘贵福,潘政奇,章善康,高冬阳,温之一,罗荣富,上海杨思中学高二(5) 三人小组.

1958 年 5 月号问题

1. 设 a,b,c,d 都是大于 1 的数，且知 $\log_a(bcd)\leqslant 9$. 求证：

$$\log_b a+\log_d a+\log_c a\geqslant 1$$

证 由不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1,a_2,\cdots,a_n}\,(a_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n)$$

当 A,B,C 皆大于零时有

$$\frac{A+B+C}{3}\geqslant\sqrt[3]{ABC},\frac{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{C}}=\frac{1}{\sqrt[3]{ABC}}$$

即

$$\sqrt[3]{ABC}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}$$

所以

$$\frac{A+B+C}{3}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}},\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\geqslant\frac{9}{A+B+C}$$

因 $\log_a b,\log_a c,\log_a d$ 皆大于零，故有

$$\log_b a+\log_c a+\log_d a=\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_a c}+\frac{1}{\log_a d}\geqslant$$

$$\frac{9}{\log_a b+\log_a c+\log_a d}=$$

$$\frac{9}{\log_a(bcd)}\geqslant\frac{9}{9}=1$$

2. 将正十二边形分割为六块，然后将这六块拼凑成一个正方形.

解

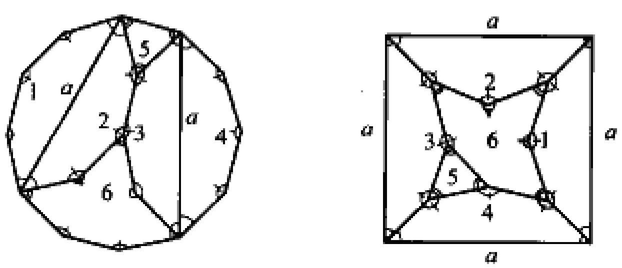


图 1

在图 1 中，标数相同的多边形全等；标有 ∠，∠，∠，∠ 的角为 45°，60°，150°，210°. 标有 a 的诸线段等长，其他诸较短线段等长（还可有其他拼法）.

3. 已知十个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 适合 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{10}$. 另有五个未知实

数 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 适合 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_5$. 且知每一 a_i 皆为二个 $x_j,x_k(j\neq k)$ 之和,求用诸 a 表示诸 x.

解 诸 a 为 $x_1+x_2,x_1+x_3,x_1+x_4,x_1+x_5,x_2+x_3,x_2+x_4,x_2+x_5,x_3+x_4,x_3+x_5,x_4+x_5$. 由题设中关于 x_i 的不等式得

$$x_1+x_2\leqslant x_1+x_3\leqslant\cdots\leqslant x_3+x_5\leqslant x_4+x_5$$

所以 $a_1=x_1+x_2,a_2=x_1+x_3,a_9=x_3+x_5,a_{10}=x_4+x_5$.

又
$$\sum_{i=1}^{10}a_i=4\sum_{i=1}^{5}x_i$$

故
$$\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}a_i$$

由
$$x_1+x_2+x_1+x_3+x_4+x_5=a_1+a_2+a_{10}$$

得
$$x_1+\sum_{i=1}^{5}x_i=a_1+a_2+a_{10}$$

即
$$x_1=a_1+a_2+a_{10}-\sum_{i=1}^{5}x_i=a_1+a_2+a_{10}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}a_i$$

$$x_2=a_1-x_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}a_i-a_2-a_{10}$$

$$x_3=a_2-x_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}a_i-a_1-a_{10}$$

$$x_4=a_{10}-x_5=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}a_i-a_1-a_9$$

$$x_5=a_9-x_3=a_1+a_9+a_{10}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}a_i$$

4. 以 a_1,b_1,c_1 及 r_1 顺次表 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边及内切圆半径,内切圆与三边之切点为 A_2,B_2,C_2. 以 a_2,b_2,c_2 及 r_2 顺次表 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三边及内切圆半径. $\triangle A_2B_2C_2$ 的三边的切点为 A_3,B_3,C_3,这样顺次继续下去,得 $a_n,b_n,c_n,r_n(r=1,2,3,\cdots)$. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{c_n}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

证 由图 2 不难看到

$$\frac{\overline{A_1C_2}}{r_1}=\cot\frac{1}{2}\angle A,\frac{\overline{C_2B_1}}{r_1}=\cot\frac{1}{2}\angle B_1$$

因之有
$$\frac{c_1}{r_1}=\frac{\overline{A_1C_2}}{r_1}+\frac{\overline{C_2B_1}}{r_1}=\cot\frac{1}{2}\angle A_1+\cot\frac{1}{2}\angle B_1$$

一般言,若用 $\angle A_n,\angle B_n,\angle C_n$ 表 $\triangle A_nB_nC_n$ 的三个内角,则有

$$\frac{c_n}{r_n}=\cot\frac{1}{2}\angle A_n+\cot\frac{1}{2}\angle B_n$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\angle A_n+\cot\frac{1}{2}\angle B_n}$$

现在我们来计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\angle A_n$. 由图 2 看出

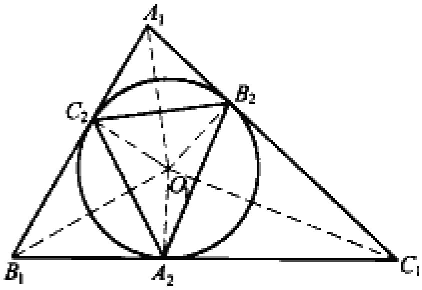


图 2

$$\angle A_2=\angle A_1O_1C_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle A_1$$

即 $$\angle A_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle A_1$$

同理

$$\angle A_3=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle A_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi+\frac{1}{4}\angle A_1$$

$$\angle A_4=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle A_3=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\pi-\frac{1}{8}\angle A_1$$

$$\cdots$$

$$\angle A_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle A_{n-1}=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}\right]\pi+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\angle A_1$$

$$\lim_{n\to\infty}\angle A_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}\right]\pi+\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\angle A_1=\frac{\pi}{3}$$

同理 $$\lim_{n\to\infty}\angle B_n=\lim_{n\to\infty}\angle C_n=\frac{\pi}{3}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\angle A_n+\cot\frac{1}{2}\angle B_n}=$$

$$\frac{1}{\cot\frac{\pi}{6}+\cot\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2\cot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

同理 $$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\angle C_n+\cot\frac{1}{2}\angle A_n}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\angle B_n+\cot\frac{1}{2}\angle C_n}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

1958年5月号问题解答者名单

解出1,2,3,4题者:沈维仁,李大全,陈亮玉.

解出1,2,3题者:广东广雅中学高二已数学小组.

解出1,2,4题者:陆仲宣,孙善钧.

解出1,3,4题者:王华琴,吴国城,吕哲明,孙沅,牟丙伦,唐宗寿,张印增,胡汉贤,苏州四中 $y=f(x)$ 小组,北京101中高三(四)数学小组.

解出1,2题者:宗秉玮,秦蔗,吴穷晓,南京11中高三(二)小组.

解出1,3题者:府猛宽,江西吉安高中数学小组.

解出1,4题者:杨振南,郭光林,朱襄生,甘金榜,刘启孝,李可丰,张禄度,叶解慰,吴希伦,陈涤心,范秉椿,戴静安,吴顺林.

解出2,4题者:李彝伦.

解出3,4题者:金应国,金实玉,李张范.

解出1题者:郭谦然,段世怀,安秉权,夏永斌,周凌云,梅林周,刘佑生,石友权,周元信,吴江舫,钱贻策,聂小岑,贾鸣,胡教友,喻英才,张寅,东坡,朱相年,井宝安,汪仁贵,张祖腾,梁天骏,温賽海,陈季海,张乃凡,薛志德,牛成明,唐家龙,贾凤鸣,吴远源,罗铭,严承章,朱辰,安徽歙中飞马小组,湖南师院附中爱因斯坦小组,沈阳一中 $X^n+Y^n=Z^n$ 小组,上海敬业中学刘丁小组,武汉33中裴蜀小组.

解出2题者:陈守范,陈守铎,林家村,何昭陵,曹相天,李鹏震,祁太平,徐秀山.

解出4题者:刘德序.

1958年6月号小知识问题答案

❖归除

1.什么叫做“归除”,“飞归”,“撞归”?(提出人:贵阳 安亭丽)

答 在珠算中,一位数的除法叫做“归”.例如以7除某数叫做“七归”.两位或多位除数的除法,叫做“归除”.求除数第一位的商用“归法”,以商数乘第二位以下各数为“减法”,即“除去”的意思.例如以84除某数叫做“八归四除”.归除口诀的记载最常见于宋杨辉乘除通变算宝(1274).

“飞归”亦名“死归”,杨辉又叫它为“穿除”.在运算时,把归与除两句口诀合成一句,也就是“归”与“除”同时并用.其优点在计算时比归除快速.但缺点在除数不同时,飞归的口诀也不同.因此要求熟记飞归口诀是一件不容易的事情.又“飞归”对于三位以上的除数不适用.

“撞归”是指归除法,当除数首位与被除数首位相同,除数第二位大于被除数第二位时,商数不能马上决定,须先进行试商的意思.元朱世杰在算学启蒙(1299)“九归除法”中,已有确定商数的方法,但没有明白写出运算的口诀.到后来贾亨算法全能集和丁巨算法(1355)更进一步,把这种估计商数的方法,编成了口诀.

❖画五角星

2.五角星的画法(包括近似作图法)有哪几种?请你说出三种不同的方法来!(提出人:北京 王文求)

答1 画五角星等于要做正五边形.因为正五边形作出后,五角星自然容易照画了.下列诸答案中无论取哪三个都是合于题意的.

如图1,以 O 为心,画单位为圆,使两径互相垂直,即 $OA \perp OP$.取半径 OA' 的中点 M,得

$$PM^2 = OP^2 + OM^2, PM = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

以 M 为心,MP 为半径,画弧,交 OA 于 Q,得

$$OQ = MQ - MO = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$

取 OQ 的中点 N,得

$$ON = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \cos 72^\circ$$

作 $NB \perp OA$,联结 OB,因 $OB = OA = 1$,所以 $\angle BON = 72^\circ$.联结 AB,因它是对 $\angle BON = \angle BOA$ 所张的弧,故 AB 为正五边形的一边,$ABCDE$ 为正五边形.

答 2 如图 2,在单位圆 O 中,$OA \perp PQ$.取半径 OP 的中点 M 为心,MA 为半径,画弧交 OQ 于 N.以 A 为心,AN 为半径,画弧交圆周于 B.那么 AB 就是正五边形的一边,$ABCDE$ 是正五边形.

答 3 如图 3,在单位圆内,作两半径 $OP \perp OQ$.把半径 OP 分为"内外比",得内分点为 N,其较长线段为 PN,在 OQ 上作半圆,联结圆心 M 与 P,交半圆于 R.以 P 为心,PR 为半径,画弧,交 OP 于 N,交单位圆于 A,B,得

$$PN = PA = PB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

那么 AB 就是正五边形的一边,$ABCDE$ 是正五边形.

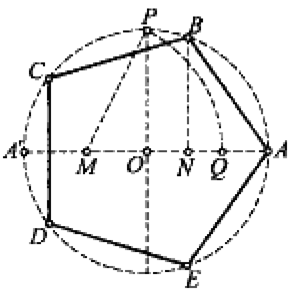


图 1

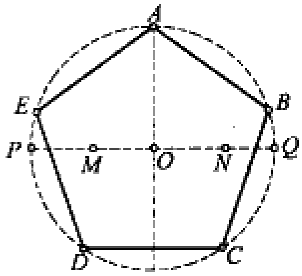


图 2

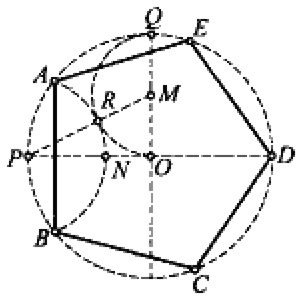


图 3

答 4 如图 4,将线段 AM 黄金分割(即内外比)于 P.以 P,M 各为心,$PA = PN = NM$ 为半径作平行四边形 $AMQN$.延长 BN 至 E,令 $NE = BM$.联结 AM,EQ 相交于 C.联结 AN,BQ 相交于 D.得 $ABCDE$ 是正五边形.

答 5 如图 5,过圆心 O 作直径 DP.以 P 为心,$OP = r$ 为半径,作弧交圆于 Q,R.由 R 取 $\overset{\frown}{RS} = \overset{\frown}{PQ}$.又作 $KO \perp DP$,平分 $\overset{\frown}{RS}$ 于 K.联结 QR,平分 OP 于 M.以 M 为心,MK 为半径,作弧交 DP 于 N.以 P 为心,RN 半径,作圆,交原圆于 A,B;交 DP 于 L.联结 AL,交原圆于 C;联结 BL,交原圆于 E.那么 $ABCDE$ 就是一个正五边形.

因为

$$MK = MN = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}r$$

$$PL = PN = PA = PB = MN - MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \text{正十边形的一边}$$

所以

$$\angle APB = \frac{(10-2)180^\circ}{2} = 144^\circ, \angle APL = \angle BPL = 72^\circ$$

$$\angle PAL = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ = \angle PBL$$

$$\angle DAC = \angle DBE = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$$

又 $\angle CAB = \angle EBA = 90^\circ - 18^\circ - 36^\circ = 36^\circ$,于是

$$\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB}$$

所以 $ABCDE$ 是正五边形.

答6 如图6,过圆心 O 作直径 PQ.以 P 为心,$OP = r$ 为半径,在圆上截取 $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PR} = \overset{\frown}{RS}$.作 $DO \perp PQ$,平分 $\overset{\frown}{RS}$ 于 D.联结 RB,平分 OP 于 M.以 M 为心,MD 为半径,作弧,交 PQ 于内外两点 N, L,以 D 为心,DN 为半径,作弧,交圆于 A.那么 $ABCDE$ 就是一个正五边形.

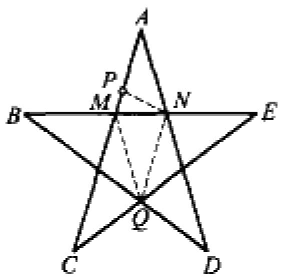


图4

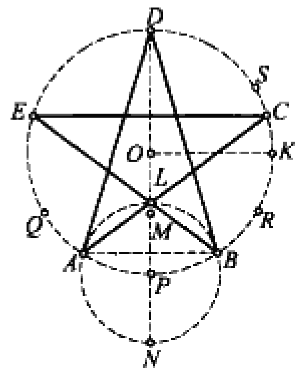


图5

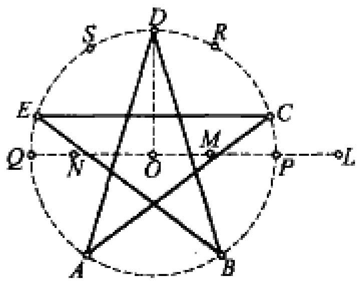


图6

因为

$$MD = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} r$$

$$ON = MD - OM = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r = \text{正十边形的边长}$$

$$DN = DE = DO = \sqrt{ON^2 + OD^2} = \sqrt{(\text{正十边形的边长})^2 + r^2} = \text{正五边形的边长}$$

又 $DL = DB = DA =$ 正五角星的边长(即正五边形的对角线长) $= \sqrt{(\text{正十角星的边长})^2 + r^2}$,所以

$$DB = DA = AC = CE = EB$$

答7 设圆的半径为 r,正五边形与十边形的边长分别为 a_5, a_{10}.五角星与十角星的边长分别为 n_5, n_{10}.由图9,直径

$$AF = 2r, DF = a_5, EF = a_{10}, AE = n_5, AD = n_{10}$$

$$AF^2 - EF^2 = AE^2, 即(2r)^2 - a_{10}^2 = n_5^2$$

又 $AF^2 - DF^2 = AD^2$，即$(2r)^2 - a_5^2 = n_{10}^2$. 根据定理，$a_5^2 = a_{10}^2 + r_1^2$，所以 $n_5^2 = n_{10}^2 + r^2$.

所以由十角星的边长及半径，五角星的边长是可以作出的.

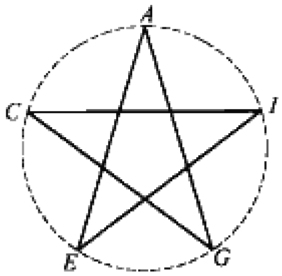


图 7　五角星的五边

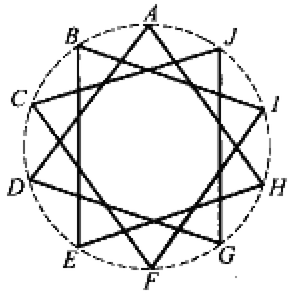


图 8　十角星的十边

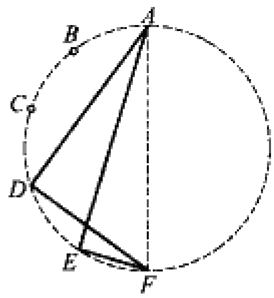


图 9

注　(1) $a_5 = \sqrt{a_{10}^2 + a_6^2} = \sqrt{a_{10}^2 + r^2}$.

(2) 正十边形的边长：$a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$. 正五边形的边长：$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

答 8　如图 10，在 AB 的端点 B，作垂线 $BA' = AB$. 作 AB 的中垂线 OM. 以 M 为心，MA' 为半径，作弧交 AB 的延长线于 P. 以 A 为心，AP 为半径，画弧；又以 B 为心，BA 为半径，画弧，交前弧于 C. 联结 BC，作它的中垂线 OQ，交 OM 于 O. 以 O 为心，OA 为半径，作圆. 联 BQ 交圆于 D. 又于圆上，截取 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB}$. 那么 $ABCDE$ 就是一个正五边形.

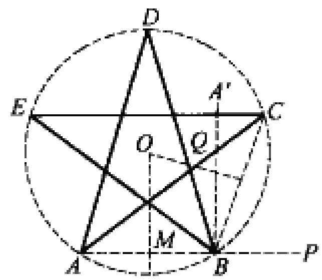


图 10

因为 QBC 为等腰三角形，$QB = QC$；BAC 也是等腰三角形，$AQ = AB$. 而 $\angle AQB = \angle QBC + \angle QCB = 2\angle QCB$，$\angle ABQ = \angle AQB = 2\angle QCB$. 于是

$$\angle ABC = 3\angle QCB$$

但 $\triangle ABC$ 三角之和是 $180°$. 所以 $\angle ABC = \frac{3}{5} \cdot 180° = 108°$.

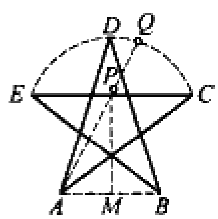


图 11

答 9　如图 11，取定长线段 AB，作它的中垂线 $PM \perp AB$，并使 $PM = AB$. 联结 AP，延长至 Q，使 $PQ = AM$，即 $PQ = \frac{AB}{2}$. 以 A 与 B 各为心，AQ 为半径，作 $\overset{\frown}{CD}$ 及 $\overset{\frown}{DE}$ 相交于 D. 以 D 为心，AB 为半径，作弧与 $\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DE}$ 分别相交于 C，E. 那么 $ABCDE$ 就是一个五角星.

用这样的作图法,如令 $AB = 1$,得

$$PM = 1, AM = \frac{1}{2}, AP = \frac{\sqrt{5}}{2}, AQ = AD = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\,034\,0$$

而正五边形的对角线 $EC = 2\cos DEC = 2\cos 36° = 1.618\,034\,0$.这两个数值是相同的.

答 10　仅用圆规作正五边形.如图 12,取定长 AB 为正五边形的一边,以 A 及 B 各为心,AB 为半径,作两圆相交于 P 及 Q.又以 P 为心,原长为半径,作圆,交 PQ 于 R,交原先两圆于 S,T.延长 SR 及 TR,再交圆于 C 及 E.以 C 及 E 为心,原长为半径,作弧相交于 D.那么 $ABCDE$ 就是一个正五边形.

不过这样所作的五边形,所得各角度的数值,若拿来和真正的正五边形相比较,略有差异,即 $\angle ABC = 108°20'$.正确正五边形的各角 $= 108°$.

答 11　仅用可量长度的直尺作五角星.

如图 13,设有正交两直线 AM,MP.延长 AM 至 B,令 $AM = MB$.在 MP 上取点 P,令 $MP = 3AM$.又延长 PA,PB,使 $AE = BC = AB$.令 AC 与 BE 的交点为 Q,MQ 与 CE 的交点为 R.在 QR 上,取 $RD = AQ$.那么 $ABCDE$ 是一个近似的五角星.

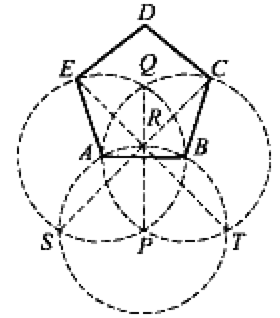


图 12

用这样的作图法,因为 $\tan MBP = 3$,查表知 $\angle MBP = 71°34'$,得到 $\angle ABC = 108°26'$.

答 12　如图 14,作线段 PQ 的垂直平分线 MA.截取 $MA = 3AP = 3AQ$.$\angle APB$ 与 $\angle AQE$ 的分角线 PO,QO,相交于 O.以 O 为心,OA 为半径,作圆 ABE,得 B,B 为圆上的切点.延长 PO,QO 分别交圆于 D,C.那么 $ABCDE$ 就是一个近似的五角星.

答 13　如图 15,设 $AC = 5$,作 AC 的垂直平分线 BP.令 $BM = 2$,$MP = 3$.过 P 作 $DB \perp BP$,并平分 DE 于 P,令 $DE = 3$.那么 $ABCDE$ 就是一个近似的正五边形.

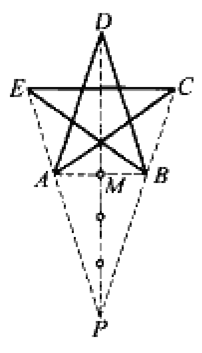


图 13

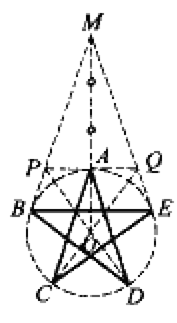


图 14

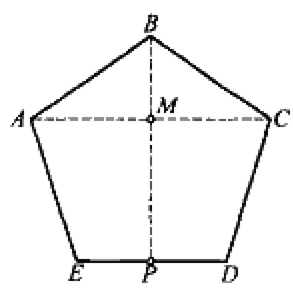


图 15

用这样的作图法,得

$DE=3, CD=\sqrt{10}=3.162\ 277\ 7, BC=\sqrt{10.25}=3.101\ 562\ 1$

答 14　如图 16,作直径 PQ.又作半径 AO 垂直平分 PQ.取 $PR=\frac{1}{5}PQ$.以 A 为圆心,AR 为半径,在圆上截取 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}$.那么 $ABCDE$ 就是一个近似的五角星.

这样作图法,如令半径为 r,得 $AB=\frac{r}{5}\sqrt{34}=1.660\ 190r$.但正确正五边形的边长是 $1.175\ 570\ 5r$.

答 15　如图 17,将直径 AA' 延长至 P,使 $AP=3AA'$.再将 AP 分成 5 等分,以每一分截取圆弧,得

$$AB=AE=\frac{1}{5}AP$$

就是近似正五边形的一边.

这样作图法,如令 $AA'=1$,得

$$AP=3, AB=\frac{3}{5}=0.6$$

但正五边形的一边是 0.587 785 3.

答 16　如图 18,设有线段 BP 平分于 M,再平分 MP 于 O.以 O 为心,OB 为半径,画圆.过 M 作 $AC\perp BP$,交圆于 A,C.联结 AP,交圆于 D;联结 CP,交圆于 E.那么 $ABCDE$ 就是一个近似的五角星.

这样所作的图形,如令半径为 r,得

$$AB=\frac{r}{3}\sqrt{12}=1.154\ 700\ 5r$$

但正确正五边形的边长是 $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}r}{2}=1.175\ 570\ 5r$.

答 17　如图 18,设 r 为半径.在圆上,从 B 起,截取 $BA=AE=BC=CD=\frac{19r}{16}$,就得 $ABCDE$ 是一个近似的正五边形.

这样作图法,得 $AB=1.187\ 5r$.但正确的 $AB=1.175\ 6r$.

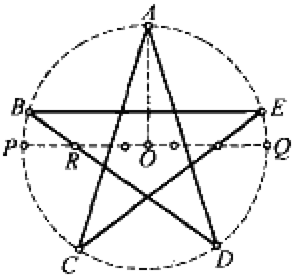


图 16

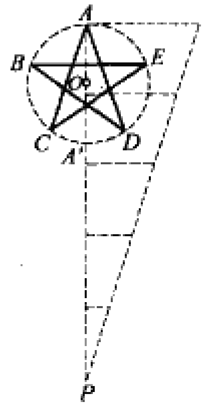


图 17

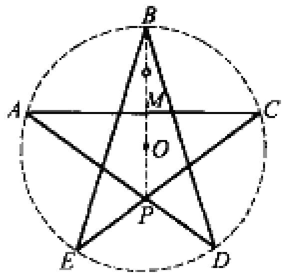


图 18

答 18　如图 19，以 AB 为边，作正三角形 PAB. 令 $OB = PM$. 以 O 为心，OB 为半径，作圆. 在圆上截取 $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB}$. 那么 $ABCDE$ 就是近似的五角星.

这样的作图，得 $\angle OBA = 35°16'$. 正确的五角星得 $\angle OBA = 36°$.

答 19　如图 20，把圆的直径 AA' 分为五等分. 作正三角形 PAA'，得 $AA' = AP = A'P$. 过点 Q，使 $AQ = \dfrac{2}{5}AA'$. 联结 PQ，与圆相交于 B. 那么 AB 就是近似五边形的一边.

这个作图法，如令半径为 r，得 $AB = 1.174\ 8r$.

答 20　如图 21，把直径 AA' 分为五等分，即 $AF = FG = GH = HI = IA'$. 以 A, A' 各为心，AA' 为半径，向上下作弧，分别相交于 P, Q. 联结 PG, PI, QG, QI，分别交圆于 B, C, E, D. 那么 $ABCDE$ 就是一个近似的正五边形.

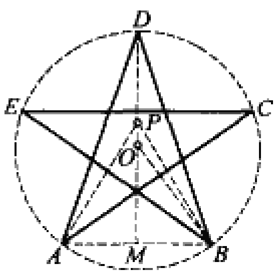


图 19

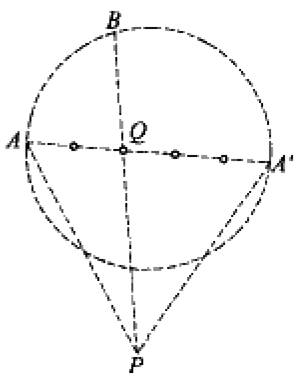


图 20

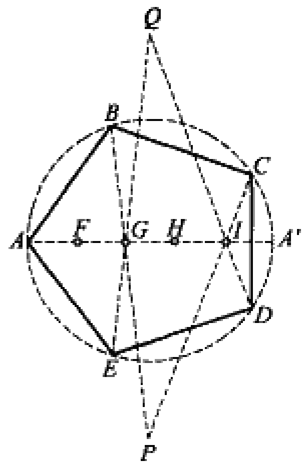


图 21

答 21　如图 22，作 AB，延长至 A'，令 $BA' = AB$.

作正三角形 PAA',使 $AA'=AP=A'P$.取点 Q,使 $A'Q=\frac{2}{5}AA'$.联结 PQ,并延长,交以 AA' 为直径的圆于 C.过 A,B,C 作圆.在这圆上顺次截取 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{BC}$.那么 $ABCDE$ 就是近似的五角星.

答22　如图23,以 O 为心,$OM=r$ 为半径画圆.取 $OP=\frac{4}{5}r$,再画同心圆.过 P 作内圆的切线 AB,交外圆于 A,B.再作内圆的切线 BC,CD,DE,EA,就是一个近似的正五边形.

这样作图法,是取 $OP=\frac{4}{5}r=0.8r$.但正确的正五边形 $OP=r\sin 54^\circ=0.809\ 017\ 0r$.

答23　如图24,以 O 为心,$OA=r$ 为半径画圆.取 $OP=\frac{3}{10}r$ 再画同心圆.过 P 作内圆的切线,交外圆于 B,E.同样再作内圆的切线 BD,DA,AC,CE 就成一个近似的五角星.

这样作图法,是取 $OP=\frac{3}{10}r$.但正确的五角星 $OP=0.309\ 017\ 0r$.

答24　如图24,设半径为 r.取 $OP=\frac{4r}{13}$,依照上法亦可作用近似的五角星.

这样的作图法,得 $OP=0.307\ 69r$.但正确的 $OP=0.309\ 0r$.

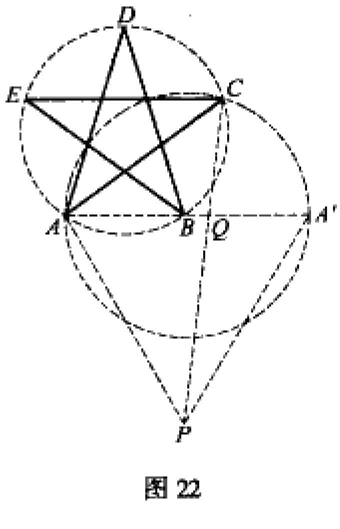


图22

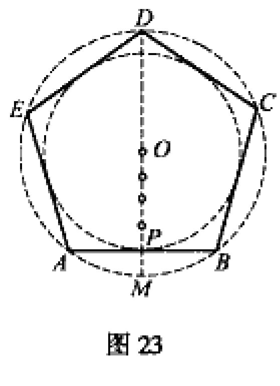


图23

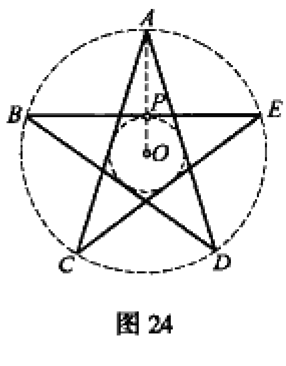


图24

❖找方向

3.某人于晴天外出,迷失了方向,幸而身边带有手表,问用什么方法可以找

出方向?并问用哪种方法,在什么时候可以有效?(提出人:济南 龚建光)

答 把手表的短针对着太阳,然后把短针与它对表面上“12”字之间所成的角平分为二,这条分角线就是指着南方.这是因为太阳的角速度(从地球看太阳所走的角速度)恰是短针在手表上所走角速度的一半.例如上午8点20分所示的方向如图25,下午3点48分所示的方向如图26.

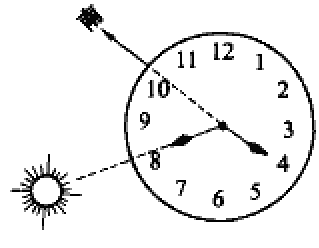


图25 上午8点20分

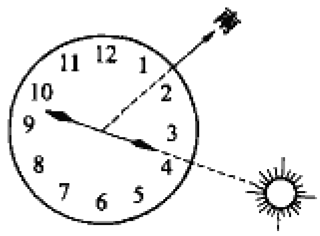


图26 下午3点48分

使用这个法子,要在晴天无云并有太阳出现的时候才有效.但须注意的,手表上所指示的时刻,通常是“标准时”,而由太阳方位所表示的时刻是“真太阳时”.如由真太阳时换的标准时,必须校正每日的“时差”,所以用这个法子所得的方向,只是一个大概的情况罢了.

但还须注意的,上述法则,只能用于地面上北回归线(北纬23°27′)以北的地区.若在南回归线(南纬23°27′)以南的地区,因为太阳的光线来自北方,每天太阳的方位,从朝至暮是由东北走向西北,它的视动是和表上时针运行的方向相反.因此要找出方向,须改用下面的法子:拿表上的短针对着太阳,把短针与它对于表上“12”字之间所成的角平分为二,得角度为θ,再在短针的另侧,取同样的θ作一条界线.那条界线就是指着北方.例如上午9点所示的方向如图27所示,下午4点所示的方向如图28所示.

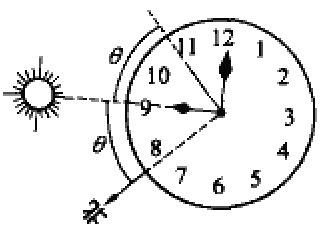


图27 上午9点

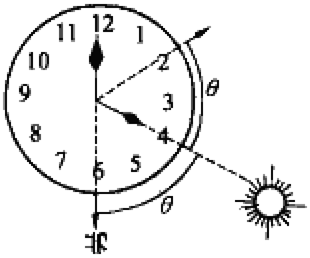


图28

在南北回归线之间的地区,有时太阳光线来自南方,有时来自北方.若要找出方向.到底需用上面哪个法子呢?那就跟随各个季节与地点而不相同了.

当太阳直射于南北回归线间某个纬度时,要找出方向,上述两个法子概归无效.不过在那种日子的上午,太阳总在天顶的东方,下午在天顶的西方,是很容易辨别东西的.

在北极处,除极点外,到处都是南方;在南极处,除极点外,到处都是北方.在那里的东西向无意义.

注 当天气晴朗的时候,要找出方向,在白天里可利用太阳,在夜间只要认识“北极星”,都好解决.若遇天阴将怎样办呢?我们知道指南针是一个测定方向的好工具,但不用指南针是不是就束手无策呢,在实际上,鉴定方向的方法很多,见景生情,随机应变,都是可以解决的,今特介绍几个辨别方向的优秀简便方法如下.

(1) 用月亮定方向，当上弦(即阴历每月初七，八日)时，月亮的明亮半面朝西，下午6时在南方，9时在西南，半夜在西方，当下弦(即阳历每月二十二、三日)时，月亮的明亮半面朝东，黑夜在东方，夜里3时在东南，早晨6时在南方．故根据月亮的时刻可以测定方向．由月亮时刻以定方向见表1．

表1　月亮时刻方位表

方位 时刻 阴历日期	下午 6时	下午 9时	半夜	上午 3时	上午 6时	上午 9时	正午	下午 3时
朔◍								
初三、四日朔☽	西南	西				东	东南	南
上弦朔◗	南	西南	西				东	东南
十一、二日朔○	东南	南	西南	西				东
望○	东	东南	南	西南	西			
十八、九日朔○		东	东南	南	西南	西		
下弦◖			东	东南	南	西南	西	
二十六、七日☾				东	东南	南	西南	西

(2) 用卷云定方向．“卷云”亦称“马尾云”．它的颜色是白的，形状像羽毛或拉开的丝棉一样，在中国内地，因为台风少到，它的高空飘浮的方向，通常是从西往东．故当卷云出现时，只要观察它的气流方向，就可以知道东西了．

(3) 用衙门祠庙定方向．从前的衙门祠堂庙宇，分布于各个大小城市以及乡村山地；至于小小的土地庙，更是到处都有．它们的前门总是朝南开的．这些建筑物，现在有些虽已改作别用，但在外形上还能辨别出来．这就使我们知道方向了．

(4) 由基碑定方向．野外坟墓的石碑上，载了“乾(西北)，坎(北)，艮(东北)，震(东)，异(东南)，离(南)，坤(西南)，兑(西)，甲(东偏北15°)，乙(东偏南15°)，丙(南偏东15°)，丁(南偏东15°)，庚(西偏南15°)，辛(西偏北15°)，壬(北偏西15°)，癸(北偏东15°)”等字样．可以用来辨别方向的．

(5) 看树枝定方向．在空旷地方孤立生长的大树，它的枝叶在朝南向阳方面往往长得茂盛些，而向阴方面稀疏些，故由树叶的稀密就可以决定方向了．(但在森林中的树木，很容易向自由发展的方面生长，又经常受有“定向风”的孤树，在下风头的树枝要长得密些．这些情形也须注意)．

(6) 看年轮定方向．被人砍伐的大树，若还存留树桩．我们在树桩上观察其年轮，在朝北方面的，因受阳光较少，排列得要紧密些；朝南方面的受阳光较多，排列得要稀疏些．

(7) 看苔藓定方向. 苔藓喜欢阴湿. 故在墙的四壁,或岩石的四周,总以朝北方面,苔藓的生长要多些.

(8) 看浆果定方向. 含浆汗很多的果实,如葡萄,樱桃等叫做"浆果". 其朝南方的成熟得要早些,故北方的可能还有青的.

(9) 由蚁冢定方向. 蚁冢经常是在靠近树木的南面. 故由它的位置,就可以辨别方向,又蚁冢的形式,在南北两面各不相同. 其南面是倾斜的,而北面却陡峭得多.

(10) 看树脂定方向. 在夏天,松树和杉树的树干上都会凸出树脂来. 其在南面树干上凸出的比北面上的大得多.

(11) 摸墙壁定方向. 在夏天,朝向西面的墙壁,因午后受强烈的日光,到晚上还是热的. 向东面的墙壁,因为只在上午受日光,到傍晚已经不热了. 所以在夜间用手去摸墙壁,其最热的一面必是朝西的.

(12) 看积雪定方向. 在冬季,向南山坡上的积雪要紧密些而成颗粒状,向北山坡上的要较松软些. 在秋季,向南山坡上的雪要比向北山坡上的融化得快些. 又朝向南面与朝向北面的屋顶,也有类似的情况.

❖四个数字

4. 四个"1"的最大数值为 11^{11}. 试问四个"2"的最大数值是不是 22^{22}?为什么?其他 3,4,5,6,7,8,9 又怎样呢?(提出人:长沙 禹步云)

答 1 四个"2"字的排法有下列八种:

$$2\,222,222^2,2^{2^{2^2}},22^{2^2},22^{22},2^{222},2^{22^2},2^{2^{22}}$$

$$2\,222<222^2=49\,282<2^{16},2^{2^{2^2}}=2^{16}=65\,536$$

$$22^{2^2}22^4=234\,256<262\,144=2^{18}<22^{22}$$

$$22^{22}<32^{22}=(2^5)^{22}=2^{110}<2^{222},2^{22^2}=2^{484}$$

$$2^{2^{22}}=2^{2^{20+2}}=2^{(2^{10\times 2}\times 2^2)}=2^{(1\,024)^2\times 4}\doteq 2^{10^6\times 4}=2^{4\,000\,000}>10^{1\,200\,000}$$

由此知道四个"2"字的排法以 $2^{2^{22}}$ 为最大,它是一个一百万位以上的数.

我们由 $2^{2^2}<2^{22}$ 得到 $2^{2^{2^2}}<2^{2^{22}}$. 同样由 $3^{3^3}>3^{33}$ 得到 $3^{3^{3^3}}>3^{3^{33}}$. 所以四个"3"字的排法以 $3^{3^{33}}$ 为最大.

但 $4^{4^4}>4^{44},5^{5^5}>5^{55},6^{6^6}>6^{66},7^{7^7}>7^{77},8^{8^8}>8^{88},9^{9^9}>9^{99}$. 即用四个"4"字,"5"字,……,"9"字的排法,与用四个"2"字或四个"3"字的排法不同.(在一般的情形中,设 a 为一个数字,且 $a\geqslant 4$ 时,总得 $a^{a^a}>a^{11a}$,这是因为要使 $a^a>11a$,这式两边用 a 除,即得 $a^{a-1}>11$,只有 $a\geqslant 4$ 才成立.)

因为

$$4^{4^{4^4}} = 4^{4^{256}} > 4^{4^{44}} > 4^{44^4},\ 5^{5^{5^5}} = 5^{5^{3\,125}} > 5^{5^{55}} > 5^{55^5}$$

$$6^{6^{6^6}} = 6^{6^{46\,656}} > 6^{6^{66}} > 6^{66^6},\ 7^{7^{7^7}} = 7^{7^{823\,543}} > 7^{7^{77}} > 7^{77^7}$$

$$8^{8^{8^8}} = 8^{8^{16\,777\,216}} > 8^{8^{88}} > 8^{88^8},\ 9^{9^{9^9}} = 9^{9^{387\,420\,489}} > 9^{9^{99}} > 9^{99^9}$$

这四个“4”字“5”字以至四个“9”字的排法以 $4^{4^{4^4}}, 5^{5^{5^5}}, 6^{6^{6^6}}, 7^{7^{7^7}}, 8^{8^{8^8}}, 9^{9^{9^9}}$ 为最大.

答 2 (1) 四个“2”字的排法有八种

$$2\,222 < 10\,000 < 222^2,\ 222^2 < 256^2 = (2^8)^2 = 2^{2^{2^2}}$$

$$2^{2^{2^2}} = 2^{16} = (2^4)^4 = (16)^4 < 22^4 = 22^{2^2},\ 22^{2^2} = 22^4 < 22^{22}$$

$$22^{22} < 32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110} < 2^{222}$$

$$2^{222} < 2^{484} = 2^{22^2},\ 2^{2^{22}} = 2^{2^{20+2}} = 2^{2^{10\times 2}} \cdot 2^2 = 2^{4\,194\,304}$$

所以四个“2”字的排法以 $2^{2^{22}}$ 为最大.

(2) 四个“3”字的排法也有八种

$$3\,333 < (300)^3 < 36\,926\,037 = 333^3$$

$$333^3 < 129\,146\,796\,9 = 33^6 < 33^{3^3},\ 33^{3^3} = 33^{27} < 33^{33}$$

$$33^{33} < (3^{10})^{33} = 3^{330} < 3^{333},\ 3^{333} > 3^{33^3}$$

$$3^{33^3} = 3^{35\,937} < 3^{59\,049} = 3^{3^{10}} < 3^{3^{3^3}},\ 3^{3^{3^3}} = 3^{3^{27}} < 3^{3^{33}}$$

所以四个“3”字的排法以 $3^{3^{33}}$ 为最大.

(3) 四个“4”的字排法也有八种

$$4\,444 < (400)^4 < 444^4,\ 444^4 = 38\,862\,602\,496 < (40)^{44} < 44^{44}$$

$$44^{44} < (4^3)^{44} = 4^{132} < 4^{444},\ 4^{444} < (4^2)^{256} < 44^{256} = 44^{4^4}$$

$$44^{4^4} < (4^3)^{4^4} = (4^3)^{256} = 4^{768} < 4^{3\,748\,096} = 4^{44^4}$$

$$4^{44^4} < 4^{16\,777\,216} = 4^{4^{12}} < 4^{4^{44}},\ 4^{4^{44}} < 4^{4^{4^4}}$$

所以四个“4”字的排法以 $4^{4^{4^4}}$ 为最大.

(4) 同样可证四个“5”字,“6字”,……,以至“9”字的排法是以 $5^{5^{5^5}}, 6^{6^{6^6}}, 7^{7^{7^7}}, 8^{8^{8^8}}, 9^{9^{9^9}}$ 为最大.

注 四个相同数目“a”的排法,当 $a \geqslant 4$ 时,其最大者总是 $a^{a^{a^a}}$.

❖六个圆

5. 如图29,有六个等圆两两相交,每个圆上有四个交点. 今要在这十二个交

点处填写数码 1,2,3,…,12,使各圆上数字之和都相等.问该怎样填法?并有填法多少种?(提出人:湖南邵阳一夫)

答 $1+2+3+\cdots+12=78$,每圆上四数之和 $=2\times78\div6=26$.

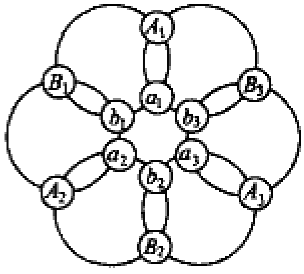


图 29

因为各圆上数字之和相等,所以

$$A_1+a_1=A_2+a_2=A_3+a_3 \qquad ①$$

$$B_1+b_1=B_2+b_2=B_3+b_3 \qquad ②$$

为了讨论方便起见,假定 $A_i+a_i<B_i+b_i$,$A_i<a_i$,$B_i<b_i(i=1,2,3)$,但六个最小数之和 $=1+2+3+4+5+6=21$,六个最大数之和 $=12+11+10+9+8+7=57$.由①②,得 $A_i+a_i\geqslant7$,$B_i+b_i\leqslant19$.列表 1.

在表 1 中,第(2)组数的 B_3,b_3 只能为 9,11,其和不是 18;第(3)组数的 B_2,b_2,B_3,b_3 只能为 4,9,10,11,任取其二之和都不是 17.因此用这两组数是不能填写图形的.所以剩下的只有五组数了.

表 1

组数	A_i+a_i	A_1	a_1	A_2	a_2	A_3	a_3	B_1	b_1	B_2	b_2	B_3	b_3	B_i+b_i
(1)	7	1	6	2	5	3	4	7	12	8	11	9	10	19
(2)	8	1	7	2	6	3	5	4	14	8	10			18
(3)	9	1	8	2	7	3	6	5	12					17
(4)	10	1	9	2	8	3	7	4	12	5	11	6	10	16
(5)	11	1	10	2	9	5	6	3	12	4	11	7	8	15
(6)	12	1	11	3	9	5	7	2	12	4	10	6	8	14
(7)	13	1	12	2	11	3	10	4	9	5	8	6	7	13

用第(1)组数来填图,A_i+a_i 的位置可以任意排列,A_i 与 a_i 可以互换,得出排法有 $2^3\cdot3!=48$(种).同样 B_i+b_i 也有排法 48 种.这样 A_i+a_i 与 B_i+a_i 的配合有排法 $48^2=2\ 304$(种).但 A_i+a_i 的位置还可以换为 B_i+b_i.所以由这组数的填写法有 $2\times2\ 364=4\ 608$(种).

同样用第(4),(5),(6)组数的填写法,亦各有 4 608 种.

用第(7)组数来填图,图中每两数字 A_i+a_i(或 B_i+b_i)的位置可以任意调换.A_i+a_i(或 B_i 与 b_i)也可以互换.所以由这组数的填写法有 $2^6\cdot6!=46\ 080$(种).

综合上面所说,共得填写法有 $4\times4\ 608+46\ 080=64\ 512$(种).

今画出几个图形如下(图 30).

若在原图上,加上一个圆,有时可使七个圆上数字之和都等于 26.如图 30(d)及(e).

若在原图上，加上两个同心圆，有时除原六圆上数字之和相等外，还可使两同心圆上数字之和亦相等. 如图 30(f) 至(i).

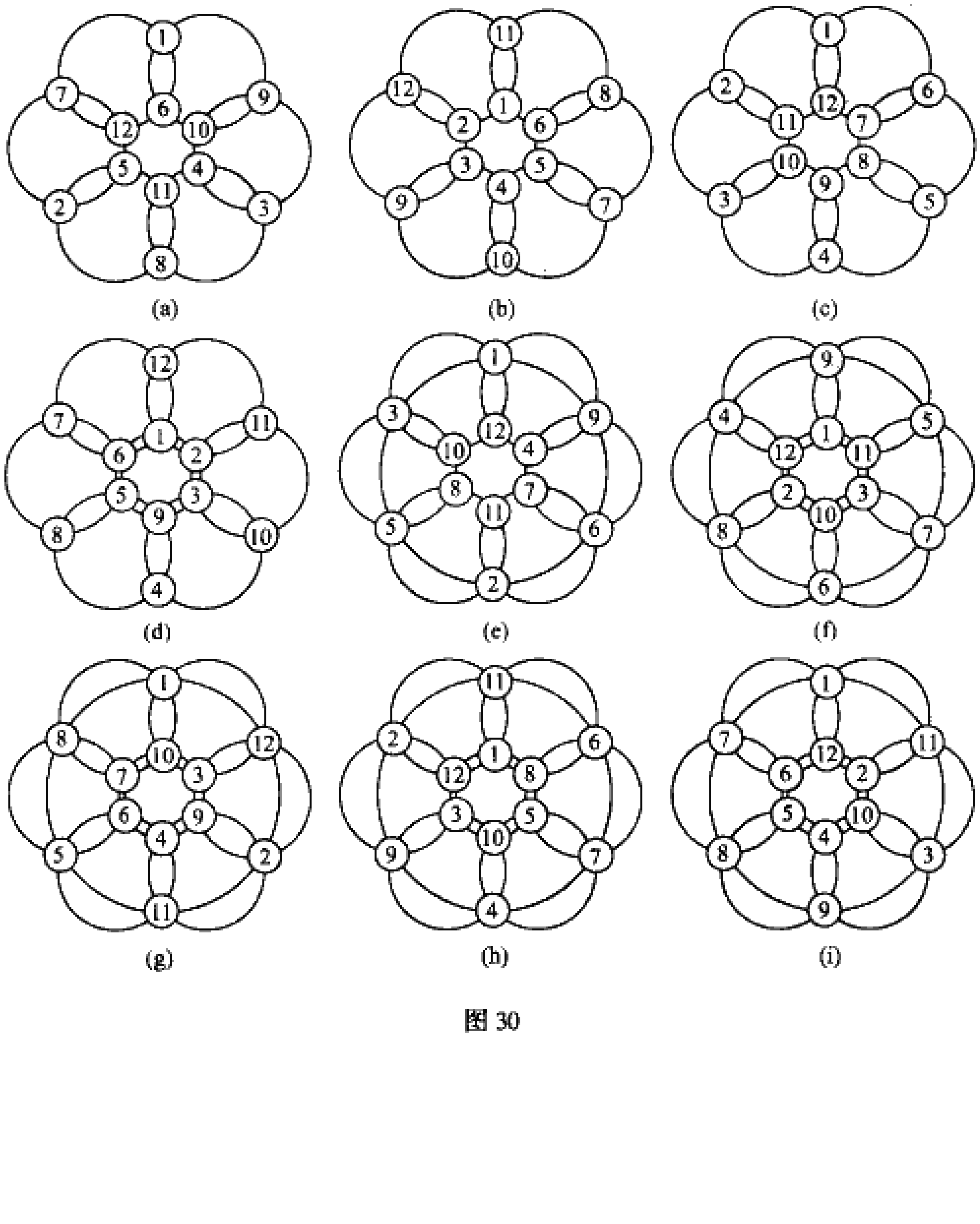


图 30

1958年6月号小知识解答者名单

解答第1,2,3题者:杨弦.

解答第1,2,4题者:任德祥,陆忠明.

解答第2,3,4题者:陈志浩,陆培荣,邵贻仁.

解答第1,2题者:四川江津石门区朱羊乡福农村校,杨康正,吴耀辉,上海延安中教高二(4)SIL数学小组.

解答第1,4题者:内蒙古扎兰屯中学罗巴契夫斯基数学小组.

解答第2,3,4题者:陕西三原中学飞马数学小组,候醇儒.

解答第2,4题者:鞠德奇,彭代好,袁玉风,陈颙,上海东昌中学高三(1)数理小组,蒙发兴,府猛宽,陈申江.

解答第3,4题者:孙志坚,刘德民,北京百零一中赵延光数理原子团.

解答第1题者:黄铸新,丁竞刚,李国文.

解答第2题者:俞大莪,于岗生,潘有发,董胜德,上海复兴中学高一(二)数学兴趣小组,张加飞,汤彬如,江苏吴县中学高二(1)Columbus数学爱好者小组,罗金生,周台文,池体涛,温日模,吴友能,胡友松,李道庆,南京四中高二(1)爱因斯坦数学小组,林擒,湔湜,曹纯光,杨固本,四川宜宾农校中学,福建南安国光中学黄华教学组,徐宽浩,安徽歙县中学金星数学小组,上海延安中学高二(3)数理小组,邹桃元,陶骅,包宗花,徐慧珍.

解答第3题者:姚珍奇,张继清,黎建东,苏征祚,王守儒,张丙军,青春,张斛西,许维仁,石根心.

解答第4题者:王寿鸿,耿旭彩,张天才,南京一中高一(5)数学小组,蔡俊杰,顾鸿勋,张洪兴,武良臣,姚平,彭祖仁,朱桂林,仲秀美,蔡连英,潘政奇.

1958 年 6 月号问题

1. 300!与 100^{300} 哪个数大?为什么?

解　设 n 个连续数为 $a,a+1,\cdots,a+n-1$;其中由左端起第 k 个数为 $a+k-1$;由右端起第 k 个数为 $a+n-k$.则

$$(a+k-1)(a+n-k)=a^2+an-a+(k-1)(n-k)\geqslant a^2+an-a=a(a+n-1)$$

所以 $$a(a+1)\cdots(a+n-1)\geqslant[a(a+n-1)]^{\frac{n}{2}}=[\sqrt{a(a+n-1)}]^n$$

其中仅当 $n=1$ 或 $n=2$ 时两端始相等.据此则

$$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot25>\sqrt{25^{25}}=5^{25}$$

$$26\cdot27\cdot28\cdot\cdots\cdot50>(\sqrt{26\cdot50})^{25}>35^{25}$$

$$51\cdot52\cdot53\cdot\cdots\cdot100>(\sqrt{51\cdot100})^{50}>70^{50}$$

$$101\cdot102\cdot103\cdot\cdots\cdot200>\sqrt{100^{100}}\sqrt{200^{100}}=10^{200}\cdot2^{50}$$

$$201\cdot202\cdot203\cdot\cdots\cdot300>\sqrt{200^{100}}\sqrt{300^{100}}=10^{200}\cdot2^{50}\cdot3^{50}$$

所以

$$300!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot300>5^{25}\cdot35^{25}\cdot70^{50}\cdot10^{400}\cdot2^{100}\cdot3^{50}=$$
$$5^{50}\cdot7^{25}\cdot5^{50}\cdot14^{50}\cdot10^{400}\cdot2^{100}\cdot3^{50}=10^{500}\cdot21^{25}\cdot42^{25}\cdot14^{25}>$$
$$10^{500}\cdot20^{25}\cdot40^{25}\cdot14^{25}=10^{550}\cdot2^{25}\cdot4^{25}\cdot14^{25}=$$
$$10^{550}\cdot112^{25}=10^{600}\times1.12^{25}>10^{600}=100^{300}$$

2. 求一四位整数,使它是一个完全平方数,并且前两位的数字相同,后两位的数字相同.

解　设 a 为前两位的数字,b 为后两位的数字.

则所求的数为

$$1\,000a+100a+10b+b=1\,100a+11b=11(100a+b)$$

因为所求的数为完全平方数,且由上式知它可被 11 整除,所以它可被 121 整除,所以 $100a+b$ 可被 11 整除.

但

$$100a+b=99a+(a+b)=11\cdot9a+(a+b)$$

所以 $a+b$ 可被 11 整除.

因为 a,b 都不能大于 9,且 a 不能为零,所以 $1\leqslant a+b\leqslant18$.因此 $a+b=11$.所以

$$100a+b=11\cdot9a+11=11(9a+1)$$

故得所求的数以 121 除之必得商 $9a+1$.

因为所求的数为完全平方数,121 也是完全平方数,所以 $9a+1$ 也应为完全

平方数.

但 a 只能是由 1 到 9 之间的一个整数.所以只能有 $9 \cdot 7 + 1 = 64$ 为一完全平方数.

因此所求的数为 $121 \cdot 64 = 88^2 = 7\ 744$.

3. 如图 1,已知 $ABCD$ 为一圆的内接四边形,对角线 AC, BD 交于 P 点. 求证:$\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ 的欧拉氏线交于一点或互相平行(欧拉氏线即三角形的外心、重心、垂心所同在的直线).

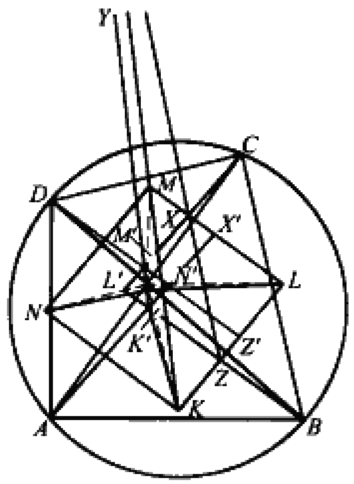


图 1

证 设 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ 的外心分别为 K, L, M, N, 而垂心分别为 K', L', M', N'.

则 KK', LL', MM', NN' 即各三角形的欧拉氏线.

因为

$$\angle APK = 90° - \angle ABP = 90° - \angle DCP = \angle CPM'$$

所以 KM' 通过 P.

同理 LN', MK' 也通过 P.

所以 LM 与 $N'K'$, MK 与 $K'M'$, KL 与 $M'N$ 的交点 X', Y, Z' 共线.

又

$$KL \parallel MN \parallel K'N' \parallel L'M'$$
$$KN \parallel LM \parallel K'L' \parallel M'N$$

设 LM 与 $L'M'$, KL 与 $K'L'$ 的交点为 X, Z, 则

$$\frac{\overline{XL'}}{\overline{XM'}} \cdot \frac{\overline{YM'}}{\overline{YK'}} \cdot \frac{\overline{ZK'}}{\overline{ZL'}} = \frac{\overline{X'K'}}{\overline{X'N'}} \cdot \frac{\overline{Z'N'}}{\overline{Z'M'}} \cdot \frac{\overline{YM'}}{\overline{YK'}} = 1$$

所以 X, Y, Z 共线.

所以 KK', LL', MM' 交于一点 O 或互相平行.

同理可证 NN' 也通过 O 或与前三线平行.

4. 在一正方体上求一点,使此点对正方体的一个定对角线两端所张的角为最小.

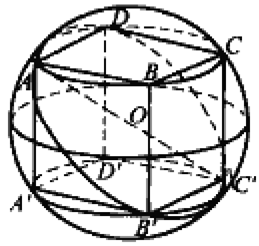


图 2

解 如图 2,设 $ABCD - A'B'C'D'$ 为一正方体,AC' 为定对角线.

作 $ABCD - A'B'C'D'$ 的外接球 O.

则在球 O 的表面上除 A, C' 外,所有各点对 A, C' 所张的角均为 $90°$ 角.

由于球 O 内部任何一点对 A, C' 所张的角均大于 $90°$ 角,而在 $ABCD - A'B'C'D'$ 的表面上除各顶点外,所有各点均为球 O 内部的点,所以除 A, C' 两点外,其余 6 个顶点即为所求的点.

5. 求证：若 $\sin(\pi\cot\theta)=\cos(\pi\tan\theta)$，则 $\csc 2\theta$ 或 $\cot 2\theta$ 必呈 $m+\frac{1}{4}$ 型（m 为零或正负整数）.

证 因为 $\sin(\pi\cot\theta)=\cos(\pi\tan\theta)$，所以 $\cos(\pi\tan\theta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\pi\cot\theta)$.

所以

$$\pi\tan\theta=2mn\pm(\frac{\pi}{2}-\pi\cot\theta)$$

其中 m 为零或正负整数.

若 $\pi\tan\theta=2m\pi+(\frac{\pi}{2}-\pi\cot\theta)$，则

$$\pi\tan\theta=(2m+\frac{1}{2})\pi-\pi\cot\theta$$

所以
$$\tan\theta+\cot\theta=2m+\frac{1}{2}$$

所以
$$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2m+\frac{1}{2}$$

所以
$$\frac{1}{\sin 2\theta}=m+\frac{1}{4}$$

所以
$$\csc 2\theta=m+\frac{1}{4}$$

若 $\pi\tan\theta=2m\pi-(\frac{\pi}{2}-\pi\cot\theta)$，则 $\cot\theta-\tan\theta=\frac{1}{2}-2m$.

所以
$$2\cot 2\theta=\frac{1}{2}-2m$$

所以
$$\cot 2\theta=\frac{1}{4}-m=-m+\frac{1}{4}$$

因而命题得证.

1958年6月号问题解答者名单

解出1者:福建南安国光中学求知数学小组,何立石,管玉华,刘家彬,吴培华,张景培,朱伯蔚,天津油校切201班,杨建昌,广州第一中学高二(2)班第二学习小组,杜淳,雷光夏.

解出2者:高学仁,高瑞,朱洪洲,周汝美,洪朝福,尚体仁,郑铁君,孙元龙,付行顺,丰收,天津一中S_{III}63几数学小组,肖平,李世荣,王家堃,北京一〇一中学高二(4)班赵延光数理原子团,郭尚林,张义洪,高德敏,涂光铎,湖北孝感高中理想班牛顿数理小组,龙清杰,蒙有骞,聂永康,陈宝林,李同荣,王国钧,龙志,朱咏堂,王殿学,寿祝三,赵文明,许竹荪,封辅智,高庆国,莫芳渔,李燮璋,张畛寰,董绍安,李光杰,黄瑞琳,高新生,戚宗信,程龙,洪邦甸,周渠,周长贵,郭赓松,黄棣光,王小来,陈教厚,郭宝池,姚康祥,张世明,喜明德,贾崑岺,裘大梅,姚祥斌,庄梦蟾,何养元,叶祖超,吴国民,莞中芬,欧有登,刘泽龙,李龙邦,凌新生,霍子丑,王文术,何冬柏,梅际唐,李宝金,吴小峰,宗福球,华大平,曹家绪,徐州三中高二(2)居里小组,上海同济中学58154.

解出4者:项恩明,陈守范,程玉琼,周汝忠,申启富.

解出5者:钱润,武汉十四中高二(5),过国铭,刘志才,黄锡中,桂润铭,戴静安,梁世亮,项登生,毛光渝,格朱欣,吴运寿,楼季春.

解出1,2者:陆风谦,梅林周,张坚,林宏图,项正清,陈国光,于汝强,钱贻策,段续年,马炳钧,沈阳市一中高二(戊已)$x^n+y^n=z^n$数学小组,四川威远五初中一同学,歙县中学高二(1)飞马数学小组.

解出1,5者:任德祥,舒昌乐,李太林,余春熔,湖南师院附中麦因斯坦数学小组.

解出2,3者:蒋镇瀛.

解出2,4者:徐宜秦,魏金伯,邱万铨,吴江舫,牟丙伦,高岳,朱襄生,董荣森,韩宗和,叶解慰.

解出1,4者:方文德,方正域.

解出2,5者:何坤厚,赵国英,王同卿,马一欢,肖世英,李宗堂,邹桃元,蔡招仁,李孔富,刘维义,苏志,蒋守义,辛德培,王国风,宫野,崔海,刘殿俊,九江一高中无名,上海同济中学,58154歙县中学托氏数学小组.

解出1,2,3,4,5者:梧州高中数学教研组,邓玉忠,上海向群中学高三(二)数学兴趣小组.

解出 1,3,4,5 者:赵源.

解出 1,2,4,5 者:王志中与王志学,郑志豪,时旭凡,包克振,许伯年,叶杏元,赵知松,陈淡,曾维信,郑桦,夏永绵,顾志远,韩念曾,金长发,李兆顺.

解出 1,2,4 者:北京师大附中高一(2) 伽罗瓦数学小组,李汉光,梁天骏,张祖腾,上海敬业中学高二(4) $\alpha\beta\gamma\equiv 3$ 数学小组,吴运寿.

解出 1,2,5 者:吕哲明,何照陵,孙沅,黄水源,晏鸣风,胡敦友,春荣,江西吉安高中普通一班数学小组,上海蓬莱中学高三(1) 狄建华数学分子团,福州第六中学号声级数学小组,汪庭龙与王积庆,张禄度,安秉权,吕希伦,丁怀成.

解出 2,4,5 者:金勤,赵鸿文,王子连,孙成裕,季永聚,刘德序,曾大雄,杨振南,贾风鸣,北京 101 中学高二(6) 数学小组.

解出 4,5 者:张延浩,杨鸣汶,朱根佑.

1958 年 7 月号问题

1. 设 AB 是已知圆的定弦. 过 AB 的中点作另一弦 CD, 又过 CD 的中点作另一弦 EF, 如此继续下去. 问所作弦的中点是否无限趋近于圆心? 为什么? (新加坡王振仲提)

解 从表面看来, 所作弦与圆心的距离越来越近, 似乎弦的中点应该无限趋近于圆心. 然而事实并不一定如此. 现在假定 AB 的中点 P 不与圆心 O 重合 (即 AB 不是已知圆的直径). 任取一小于 OP 之长的正数 $\delta\varepsilon$, 并以 O 为心作一半径等于 ε 的圆, 则 P 点显然在这所作圆之外. 过 P 作已知圆的弦 CD 使不与 $\odot O(\varepsilon)$ 有公共点, 那么 CD 的中点 Q 应在 $\odot O(\varepsilon)$ 的外部 (图 1). 又过 Q 作已知圆的弦 EF 仍使不与 $\odot O(\varepsilon)$ 有公共点, 这 EF 弦的中点还是在 $\odot O(\varepsilon)$ 的外部. 照这样继续做下去, 所得每个弦的中点将永远处在 $\odot O(\varepsilon)$ 的外部. 因而与圆心 O 的距离永远大于 ε. 由此可见, 这样作法的弦的中点虽然与圆心 O 的距离越来越近, 但并不是无限趋近于 O 点的.

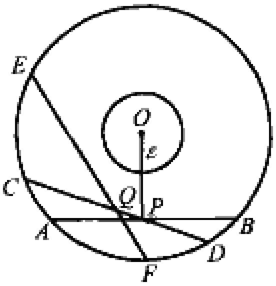


图 1

从刚才所说的 $\varepsilon(< OP)$ 是任意选定的这一点来看, 可以想见本题存在很大的不定性. 原因不是别的, 是在于每次通过某弦的中点都可以作出无穷多条另外的弦, 而题中并没有指明究竟要哪一条. 因此, 我们对本题不能作出任何确定的答案.

2. 设 θ 是任意角. 证明: 总存在任意小的, 可以用尺规作出的角 φ, 使 $\theta - \varphi$ 可以用尺规三等分.

证 令 $\varphi_n = \frac{\theta}{4^n}$, 那么 φ_n 可以用尺规作出, 并且只要 n 充分大, φ_n 可以任意小. 我们有

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \frac{\theta}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{\rho - \varphi_n}{3}$$

因此 $\frac{\theta - \varphi_n}{3}$ 可以用尺规作出, 即 $\theta - \varphi_n$, 可以用尺规三等分.

3. 证明: 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

证 因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以

$$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \cos\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha}{2} > 0$$

$$1 + \sin\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

因为

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} > 0$$

所以

$$\sqrt{1 + \sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \quad ①$$

又

$$1 - \sin\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

因为

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} > 0$$

所以

$$\sqrt{1 - \sin\alpha} = \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \quad ②$$

① - ② 得

$$\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

4.解方程：

$$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x + 2 = 0$$

解 令 $x = y - \frac{1}{y}$,那么

$$y^7 - \frac{1}{y^7} = x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$$

于是原方程化为

$$y^7 - \frac{1}{y^7} + 2 = 0$$

或

$$y^{14} + 2y^7 - 1 = 0$$

再令 $z = y^7$,我们得到

$$z^2 + 2z - 1 = 0$$

由此得

$$z_1 = -1 + \sqrt{2}, z_2 = -1 - \sqrt{2} = -\frac{1}{z_1}$$

令

$$A = \sqrt[7]{z_1}, B = \sqrt[7]{z_2} = \sqrt[7]{-\frac{1}{z_1}}$$

对于 A 的每一个值,有 B 的唯一的值满足关系 $AB = -1$. 于是原方程的根是 x,并且

$$x = A + B$$
$$AB = -1$$

令 A 有七个不同的值:它们是

$$A_i=\sqrt[7]{-1+\sqrt{2}}\omega^i,i=0,1,2,\cdots,6$$

此处$\sqrt[7]{-1+\sqrt{2}}$ 表示正实数 $-1+\sqrt{2}$ 的算术根,而

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}$$

令 B_i 是与 A_i 相当的 B 的值,满足关系 $A_iB_i=-1$,那么

$$B_i=-\frac{1}{A_i}=-\sqrt[7]{-1+\sqrt{2}}\omega^{7-i},i=0,1,\cdots,6$$

这样,所予方程的七个根是

$$x_i=A_i+B_i=\sqrt[7]{-1+\sqrt{2}}\omega^i-\sqrt[7]{-1+\sqrt{2}}\omega^{7-i},i=0,1,2,\cdots,6$$

5.(1) 求方程 $x+y\sqrt[3]{2}+x\sqrt[3]{4}=0$ 在有理数范围内的所有解.

(2) 设 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq0$,此处 a,b,c 是有理数.证明:$a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq0$.

证 (1) 显然 $x=y=z=0$ 是这个方程的一个解.

假定方程在有理数范围内还有非零解,即存在不全为零的有理数 a,b,c 使

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0 \quad ①$$

两边同乘以$\sqrt[3]{2}$,得

$$2c+a\sqrt[3]{2}+b\sqrt[3]{4}=0 \quad ②$$

以 b 乘 ① 减去 c 乘 ②,得

$$ab-2c^2+(b^2-ac)\sqrt[3]{2}=0$$

由于$\sqrt[3]{2}$ 是无理数,所以必须

$$ab-2c^2=0 \quad ③$$

$$b^2-ac=0 \quad ④$$

③ × c + ④ × b 得

$$b^3-2c^3=0$$

或

$$b^3=2c^3$$

若 $c\neq0$,则 $2=\left(\frac{b}{c}\right)^3$,即2是一个有理数的完全立方.这不可能.因此必须 $c=0$.因而由 ③ 及 ④,得 $a=0,b=0$,这与 a,b,c 不全为零的假定矛盾.

这样,所予方程在有理数范围内仅有一解,就是

$$x=y=z=0$$

(2) 我们知道

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

令 $x=a,y=b\sqrt[3]{2},z=c\sqrt[3]{4}$,则

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3+2b^3+4c^3-6abc$$

于是

$$a^3+2b^3+4c^3-6abc=(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})[(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}]$$

由于 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq 0$,因此,若 $a^3+2b^3+4c^3-6abc=0$,必须等式右边第二个因子等于零.由(1)必须

$$a^2-2bc=0,2c^2-ab=0,b^2-ac=0$$

和(1)一样,可以推出 $a=b=c=0$.因而

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$$

矛盾.

注 做这一道题的读者很多,但做对的很少.许多读者是这样证明(1)的:"因为$\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[3]{4}$都是无理数,而 y,z 是有理数,所以只要 y,z 不全为零,$y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$ 是无理数,因此它不能等于有理数 x",这种说法理由不充分,因为没有证明 $y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$ 是无理数.

1958年7月号问题解答者名单

解出1,2,3,5者:李志成.

解出2,3,4,5者:广西梧州高中数学教研组.

解出2,3,4者:时旭丹与郑志豪.

解出2,3,5者:赵源,牟丙伦.

解出1,3者:狄建华与浦校忠.

解出2,3者:胡友松,李鹏震与曹柱天,刘尧与朱如曾,雷子恕,刘国冲,刘耀东,孙利坤,邝耀东与何立石,曹成鸿等六人,孔飞羽,天津二中高二(2),府猛宽,李觉民,金温,孟福堃,达敏,陆培荣与邵贻仁,丁树荣等三人,上海陕北中学萌芽数学小组,陈昌楚,沈阳35中高十六班数学小组,广州三中王敏中,彭拱,e数学小组,方晓初,张令松,梁峻峰,贾效谊.

解出3,5者:杨振南.

解出2者:肖永,王达尊,朱永藩,钱辉.

解出3者:304人(姓名从略).

1958年8月号征解问题答案

多边形的对角线

1.问四边形,五边形,六边形以至凸 n 边形的对角线之和是多少条?(提出人:福建晋江 高淑镖)

解 设四边形,五边形,……,以至凸 n 边形的对角线之和为 S.

因为凸 n 边形的对角线之条数为$\frac{n(n-3)}{2}$.所以

$$S=\frac{4(4-3)}{2}+\frac{5(5-3)}{2}+\frac{6(6-3)}{2}+\cdots+\frac{n(n-3)}{2}=$$

$$\frac{(4^2+5^2+6^2+\cdots+n^2)-3(4+5+6+\cdots+n)}{2}=$$

$$\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(1^2+2^2+3^2)-3\cdot\frac{(4+n)(n-3)}{2}}{2}=$$

$$\frac{n^3-3n^2-4n+12}{6}=\frac{(n+2)(n-2)(n-3)}{6}$$

指数含对数的方程

2.解方程:$x^{(\lg x)^2+\lg x^3+3}=\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$.(提出人:湖南株洲刘晋)

解 变原方程

$$x\cdot x^{(\lg x)^2+\lg x^3+2}=\frac{3}{2}x$$

这式当 $x=0$ 时,不合原式,可从两边消去.于是 $x^{(\lg x)^2+3\lg x+2}=\frac{3}{2}$,即

$$(\lg x)^2+3\lg x+2=\log_x\frac{3}{2}=\frac{\lg 1.5}{\lg x}$$

即

$$(\lg x)^3+3(\lg x)^2+2\lg x-\lg 1.5=0$$

令 $\lg y-1=\lg x$，上式变为

$$(\lg y)^3-\lg y-\lg 1.5=0(\text{式中} \lg 1.5=0.176\,091\,3)$$

这是一个 $\lg y$ 的三次方程.试解这式，令

$$\cos\theta=\frac{\frac{\lg 1.5}{2}}{\frac{1}{9}\sqrt{3}}=\frac{0.088\,045\,6}{0.192\,450\,1}=0.457\,498\,3$$

查表得 $\theta=62°46'27''$.于是

$$\lg y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\theta}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos 20°55'29''=$$
$$1.154\,700\,5\times 0.934\,050\,5=1.078\,548\,6$$

$$\lg y_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}+120°\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos 140°55'29''=$$
$$-1.154\,700\,5\times 0.776\,319\,5=-0.896\,416\,6$$

$$\lg y_3=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}+240°\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos 260°55'29''=$$
$$-1.154\,700\,5\times 0.157\,732\,0=-0.182\,133\,2$$

由此得

$$\begin{cases}\lg x_1=0.078\,548\,6\\ \lg x_2=-1.896\,416\,6=\bar{2}.103\,583\,4\\ \lg x_3=-1.182\,133\,2=\bar{2}.817\,866\,8\end{cases}$$

查表得 x 的三解为

$$\begin{cases}x_1=1.198\,253\,2\\ x_2=0.012\,693\,6\\ x_3=0.065\,745\,6\end{cases}$$

❖线上找一点

3.在定直线 AB 之外，任意取两点 P,Q.试求在 AB 上找出一点 O，使下列关系式成立：$\frac{\angle POA}{2}=\angle QOB$.（提出人：上海 张炳生）

解 (1) 设 P,Q 在线 AB 外的同侧，试在 AB 上求出一点 O，使 $\frac{\angle POA}{2}=\angle QOB$.

作法 过 Q 作以 AB 为对称轴的对称点 Q'，得 $QQ'\perp AB$，QQ' 交 AB 于 C.以 Q' 为心，$Q'C$ 为半径，作圆.过 P 作 $\odot Q'$ 的切线 PD，交 AB 于 O，那么 O 就是所求的点(图 1).

证 因为 $Q'C \perp AB$，$\odot Q$ 的半径为 $Q'C$，$\odot Q'$ 与 AB 相切于 C。又 $\odot Q'$ 与线 POD 相切于 D，联 OQ'。因为 OC，OD 与 $\odot Q'$ 相切，OQ' 平分 $\angle COD$，得 $\angle COQ' = \dfrac{\angle BOD}{2}$。但 $\angle BOD = \angle POA$，所以

$$\angle COQ' = \angle COQ = \angle QOB = \frac{\angle POA}{2}$$

(2) 设 P，Q 在线 AB 外的异侧。

作法 过 Q 作 $QC \perp AB$，C 为垂足。以 Q 为心，QC 为半径，作圆。过 P 作 $\odot Q$ 的切线 PD，交 AB 于 O，那么 O 就是所求的点(图 2)。

证 联 QO 并延长，因为 PD 与 AB 都是 $\odot Q$ 的切线，QO 平分 $\angle COD$，所以 $\angle QOB = \dfrac{\angle POA}{2}$。

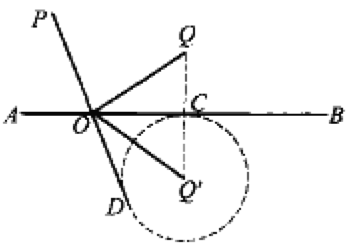


图 1

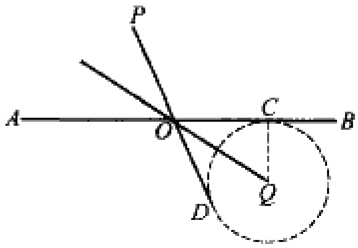


图 2

❖平行四边形的钝角

4. 如图 3，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$。求证平行四边形 $ABCD$ 的钝角是 $135°$。(提出人：福建平潭 林自福)

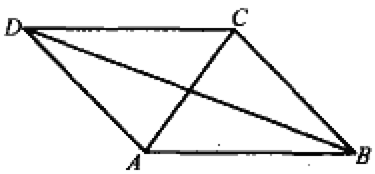


图 3

证 因为 $ABCD$ 为平行四边形，据中线定理：

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$

依题设 $AC^2 \cdot BD^2 = AB^4 + AD^4$，所以 AC^2，BD^2 为方程 $x^2 - 2(AB^2 + AD^2)x + (AB^4 + AD^4) = 0$ 的根。

所以

$$x = AB^2 + AC^2 \pm \sqrt{AB^4 + AD^4 - AB^4 - AD^4 + 2AB^2 \cdot AD^2} =$$
$$AB^2 + AD^2 \pm \sqrt{2}AB \cdot AD$$

设 A 为钝角，所以

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 + \sqrt{2}AB \cdot AD \qquad ①$$

又因为

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A \qquad ②$$

① - ② 得

$$\sqrt{2}AB \cdot AD + 2AB \cdot AC\cos A = 0$$

$$\cos A = \frac{-\sqrt{2}AB \cdot AD}{2AB \cdot AD} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $\angle A = 135°$.

❖正弦不等式

5.(1) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_k$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$之间,求证:

$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_k) \leqslant \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\cdots+\sin\alpha_k$

(2) $\frac{1}{2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k^2\pi} \leqslant \frac{\pi}{6}$.(提出人:哈尔滨 沈德安)

证 (1) 对 α_1,α_2 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$间有

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2) \leqslant |\sin(\alpha_1+\alpha_2)| = |\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_1| \leqslant$$
$$|\sin\alpha_1\cos\alpha_2|+|\sin\alpha_2\cos\alpha_1| \leqslant \sin\alpha_1+|\sin\alpha_2|$$

至此就有

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k) \leqslant \sin\alpha_1+|\sin(\alpha_2+\cdots+\alpha_k)| \leqslant$$
$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+|\sin(\alpha_3+\cdots+\alpha_k)| \leqslant \cdots \leqslant$$
$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_k$$

(2) 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k^2\pi} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi} = \frac{\pi}{6}$$(这个不等式的由来是利用 $\sin x \leqslant x$)

又

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k^2\pi} \geqslant \sum_{k=1}^{k}\sin\frac{1}{k^2\pi} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{k^2\pi}\right)$$(式中 k 是正整数)

这式的左端与 k 无关,故可令右端 k 趋向于 ∞,即得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k^2\pi} \geqslant \sin\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

合并上下两式,即得(2)的证明.

1958 年 8 月号问题征解解答者名单

解答第 1,3,4,5 题者:朱永作,陆培荣,邵贻仁,蒋重箭,张声国,刘业田,潘少武,徐海清.

解答第 1,3,4 题者:任德祥,谢善豫,林为中,扬州曹隐巷数学爱好者,许维仁,林森,戴静安,许正亚,钱炜昌,刘敦章,顾曼生,凌柏南,吕哲明,纪飞,武汉三十三中高三(3)xy.m 数学小组,上海徐汇中学高三(4) 董林数学小组,周公贤,顾肅舟,姚益民,张巳已,季鼎祥,孙久懿,武汉十五中高三(2)02 数学小组,林一星,许炽雄,苗永温,虞鑫钜,南京三中丁爱因斯坦数理小组.

解答第 1,3,5 题者:李琼瑶,袁玉风.

解答第 1,4,5 题者:仲平,盛沛根,盛沛栋,赖祖正,许贤定,谢阜东,陈霖,蒋乃功,雄廷,黄淑镖,北京师大附中高一(2) 伽罗瓦数学爱好群,成世拙.

解答第 3,4,5 题者:成城,陈宝琅,本溪高中三(5) 祖冲之数学小组.

解答第 1,3 题者:王宗礼,廖方安,洪守杰,侯秀成,谢树彬,黄仁义.

解答第 1,4 题者:杨传根,李百齐,陈涛年,朱报佑,张禄度,杨正新,陈其萃,唐学悟,朱振球,王掌发,思仲,思修,赵祥山,孙加明,叶金良,毛善国,徐州三中居里小组,武汉十二中蛋黄数学小组,钱贻策,绍兴一中高一(2) 冰冰数学小组,王希宾,樊冕,胡开平,揭草仙,蔡俊杰,朱湘南,章功远,蒋镇瀛,赵玉松,顾炎之,孙振江,舒昌乐,吴荫曾,谷安铭,江西乐平中学数学教研组,廖奕添,丁国梁,A.C.张,赵久康,江苏吴县中学高三(1) 数学爱好者,张明基,安徽全椒风台李太林红专跃进数学小组,章德,王志仁,倪加誉,夏本根,林炳生,毕其启,吴汝棉,李念纯,李岫云,王本禄,张长达,金辉余,北京百零一中高三(3) 赵延光数理原子团,李连文,刘维义,李景文,上海安亭师范 γ 数学小组,汪贵行,罗荣富,温之一,王普,池体寿,黄全生,施德宛,张福明,H.L.C,丁昰麟,吴心昌,厉石麟,詹顺邦,胡友松,上海陕北中学高三(2)19 号与 14 号,郑灼球,朱咏堂,李志砚,肖玖元,安徽歙县中学高三飞马数学小组,浙江奉化中学 θ 小组,王文才,顾亦祥,刘白,郑国鑫,许传根,申长江,苏逊泰,陈传麟.

解答第 3,4 题者:鲁桂生,陈丽黄,陈元相,孙世捷四川威远一中数学小组,刘永怀,梅定佳,沉木,广州豪贤路 83 号,洪玉兴,邹中桂,顾曼生,凌柏南,吴嘉雄,黄庆玉,张代荣,杨洪喜,福建龙岩一中高三数学兴趣小组,何福生,丁荣海,马益芳,王洪利,古兴邦,Kyan Zhyan,徐洪池,罗蜀生,杨益阶,陈友村,漏斗,张振鑫,肖慈雨,上海华纺麻纺及同寿坊数理小组,高光第,逢福玉,向红专,魏忠山,ЯН,广东普一中高三甲(∞ + ε)/2 数学小组,唐翘健,江苏吴县中学笛卡儿小组.

解答第 4,5 题者:蔡学遵,罗宝财,王生洪,严金仕,蒋福敏,蒋中云,胡良

知，陈叔良，潘政奇，陈龙昊，李敬章，陈淡．

解答第1题者：宋景，张宜松，刘明倡，王宗铫，张觉良，陆幼逊，吴嘉胜，江西吉安高普一数学小组，江苏台州中学高三(8)红专数学小组，管怀俊，高杰，陆福昆，左裕棠，沈定康，王慧方，邵质仁，上海东昌中学高三(1)数理小组，熊松年，陈志浩，武汉十二中高三(3)学习小组，董治中，陈一，程习芝，江崇国，黄福田，谢克俭．

解答第3题者：李艺，曹义，顾东林，张玉祥，陈绍华，王赋杰，蔡宏彬，孟善模，张志伟，宋大荣，徐钟秀，庄卫辉，朱代富，周兴茂，盛幼君，俞良中，韩长林，冯家庆，艾尊周，王仁健．

解答第4题者：朱欣，卢元伟，河南荥阳竹川民中，武汉三中 Sophists 数学兴趣组，章永孚，陈玉麟，武汉十四中高一(2)数学小组，张延荣，陈定生，程龙，杨乾一，陆幼逊，安徽合肥三中高二(1)爱因斯坦数理小组，李成瑞，石家庄师院W学生，鲁副杰，严庆宏，沈复初，薛大庆，倪志育，孙志华，江苏阜宁中学高三甲数学小组，杜宏，王宗礼，高德宏，刘德敏，许晓梅，孙芳润，汪贵生，刘传彝，文道武，刘昌元，杨昌吉，李恒茂，王顺惠，侯汉清，何越生，汤彬如，刘宝增，章国华，宋彭生，浙江瑞安机械厂红专学校 C.C.Z，王宗铣，浙江瑞安中学高三(4)-$\sum x^a$，王福定，马炳钧，福州二中高毕，闵建秋等150人姓名从略．

解答第5题者：云南大学叶时爽空气动力学组．

1958 年 8 月号小知识问题答案

❖汪莱在数学上的贡献

1. 汪莱在数学上有什么贡献?(提出人:徐州李钧)

答 汪莱(1768—1813)字孝婴,号衡斋,安徽歙县人,明历算,善测量.曾和焦循(1763—1820)、李治(1773—1834)辩论"立天元一"及"正负开方术";推广了"堆垛术";使三乘四乘以上的尖堆,都可由根以求积;纠正了梅珏成(1681—1763)的"勾股知识术";考定有通艺录磬氏倨句解一册,用算法以核定重心.1793 年著有乐律逢源一卷.1806 年夏季测量过黄河海口的高下,1809 年修成了天文时宪两志.他的儿子汪光恒,也是个数学家.

汪莱的主要著作有衡斋算学七卷.这部书在数学史上的地位是很高的,研究的对象是多方面的.对我国尤其是近代数学的发展起了相当的作用.他死后由其学生夏燮又替他校刻有衡斋遗书七种,凡九卷.

衡斋算学第一卷自序于 1797 年,内容有关三角方面知识和三角函数表的制法,确定了许多条目,如论弧三角形中"知不知条目".并且西方文化传入中国亦有很大的贡献.

第二卷成于 1798 年,内容是有关数学在日常生活的应用及数学在科学上的作用,如"参两算经",对于数学实践运用有极大的作用.

第三卷成于 1798 年秋季,由于他努力从事于研究工作,灵活运用当时所有的知识,解决了从前也没有人解决的问题.如在"平圆形"中,他就卓越地解决"有圆内若干度之通弦,求其度五分之一通弦"问题.

第四卷成于 1799 年,论弧三角中的问题,解决前人未发现的问题.确定了许多方法,总结出了许多条目(解决问题的必要条件及途径),如"有无定限条目";并且对级数有很大的研究.理论上论述级数的性质,结合数理知识,如在"递兼数理",论三角堆即形数,得出平三角堆,立三角堆,三乘三角堆,四乘三角堆等的求和方法.

平三角堆:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2!}$$

立三角堆:

$$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

三乘三角堆：

$$1+4+10+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

四乘三角堆：

$$1+5+15+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

r 乘三角堆：

$$1+(r+1)+\frac{(r+1)(r+2)}{2!}+\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+\overline{r-1})}{r!}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{(r+1)!}$$

第五卷成于 1801 年，主要是对方程论的贡献.说道：方程不仅仅有一正根，对每根之数有“知不知条目”.并且论方程解的符号，如“$x^2-bx-c=0$，可知；$x^2-bx+c=0$，不可知”.这里说“可知”就是有一正根，“不可知”就是有两正根.这个观点和笛卡儿的对根之符号研究有相同之处.又在第五卷中，校订了九章算术和戴氏订讹.

第六卷成于 1801 年，后来又续成第七卷.这两卷的主要内容是偏重于方程论.如在第七卷，说到方程可由因数配成，如“$x^3+3x^2-70x-144=(x-8)\cdot(x+2)(x+9)$”.并说“审有无”的条件，即是要求出方程的判别式.

❖纸量和开本

2.问纸量的数量，开本的大小是怎样计算的?(提出人：贵阳姚焕英)

答　纸的数量，以边长为 80 cm 及 112 cm 的矩形纸，称为“1 张”.半张称为“单开”，亦称“对开”，平常日报纸的大小就是“对开”.四分之一张称为“四开”，十六分之一张称为“十六开”.

“开”可写作“K”，它的意义可解释为“裁”.所谓“几开”就是把一张纸分为“几裁”.寻常的白报纸，有光纸，道林纸等以每 500 张称为“1 令”；土产的毛边纸，连史纸等以每 96 张或 192 张称为“1 刀”.

道林纸的厚薄，从前用英制计算，有 32 磅，80 磅等，是指每令的重量而言，现已逐渐地改用公制，例如白报纸的重量每令是 21.5 至 22.3 kg.

书本的大小厚薄，是要看那书每页的面积合于大张纸的多少分之一，再看其总页数是由多少张纸所组成来计算的.

❖四位五位的平方数

3.设有四位数是个完全平方数,用两个不同的数码写成.又五位数也是个完全平方数,用三个不同的数码写成.问这样的数各有多少?请你把它们写出来!(提出人:长春邓玉秋)

答 (1)四位数的平方数用两个不同的数码写成有2个:

$$1\,444 = 38^2, 7\,744 = 88^2$$

(2)五位数的平方数用三个不同的数码写成有41个:

$10\,201 = 101^2, 10\,404 = 102^2, 11\,449 = 107^2, 11\,664 = 108^2, 12\,100 = 110^2,$
$12\,321 = 111^2, 14\,161 = 119^2, 14\,400 = 120^2, 14\,641 = 121^2, 14\,884 = 122^2,$
$16\,641 = 129^2, 17\,161 = 131^2, 19\,881 = 141^2, 22\,201 = 149^2, 22\,500 = 150^2,$
$26\,244 = 162^2, 27\,225 = 165^2, 28\,224 = 168^2, 35\,344 = 188^2, 37\,636 = 194^2,$
$40\,401 = 201^2, 40\,804 = 202^2, 41\,616 = 204^2, 44\,100 = 210^2, 46\,656 = 216^2,$
$48\,400 = 220^2, 48\,841 = 221^2, 55\,696 = 236^2, 56\,644 = 238^2, 65\,536 = 256^2,$
$66\,564 = 258^2, 67\,600 = 260^2, 68\,644 = 262^2, 69\,169 = 263^3, 76\,176 = 276^2,$
$80\,089 = 283^2, 88\,804 = 298^2, 93\,636 = 306^2, 94\,249 = 307^2, 97\,969 = 313^2,$
$99\,225 = 315^2.$

❖量球径与三等分角

4.(1)仅用直尺与圆规怎样去量出一个球的直径?

(2)利用时钟上的指针怎样去三等分一个任意角?(提出人:上海景振中及沈阳高世孝,李文君)

答 (1)在所要量直径的球上,用圆规任意画一圆(P为圆心,$PA = l$为半径),这圆所在的平面截球面得一个小球冠.以这圆(O'为圆心)为底面,以球冠的高($PO' = h$)为高的圆锥之母线l是已知的(圆锥在球上画圆时两脚间的距离).将这圆搬到平面图上在这圆上,作这三角形的外接圆,然后量出这圆的半径r.根据l与r的关系(分别为同一直角三角形的斜边和直角边)作出球冠的高h.球的直径d(即PQ)和h,l之间有如下的关系:$l^2 = dh$.用代数作图法作出球的直径d(图1).

(2)将任意角画在透明纸上,以这个角的顶点与钟上指针的轴心重合.又将钟上的时分两针和任意角的一边,重并在十二点上,然后将分针拨到角的另一边上,那么时针所走很小的角度,恰为分针所走角度的十二分之一.这时若将时针所走的角度(从十二点起)增大4倍,所得的就是任意角的三分之一.这就

是用时针与分针三等分任意角的法子.

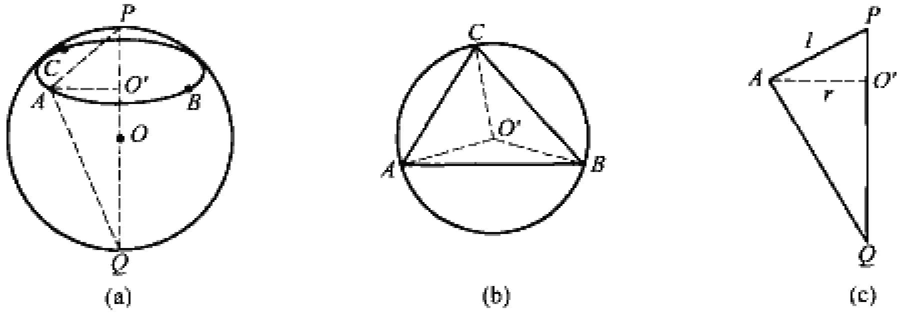


图 1

❖捆鞭炮

5.有鞭炮筒子若干个,捆成一个正六角柱形,外层每边有筒子 19 个.问共有鞭炮筒子多少个?(提出人:江西萍乡王孟之)

答 鞭炮筒子捆成如图 2(a),本题有两种解法.

(1) 级数解法(图 2(b)).

原题每边 19 个.但位于各顶点的 6 个都是每相邻两边所共有的,所以每边应为 $19-1=18$(个).最外层是 $18\times6=108$(个).从图可以看出第二层的总数比第一层少 6 个(每边少 1 个).就是 $108-6=102$(个).再向内数,依次每层减 6 个.从 $108\div6=18$,可以知道共有 18 层.自中心起,第二层是 6 个(除中心 1 个在外).这样就得到一个等差级数,首项为 108,末项为 6,公差为 -6,项数为 18.它的和是 $\frac{18(108+6)}{2}=1\ 026$.再加上中心 1 个,得 $1\ 026+1=1\ 027$,这就是所求的个数.

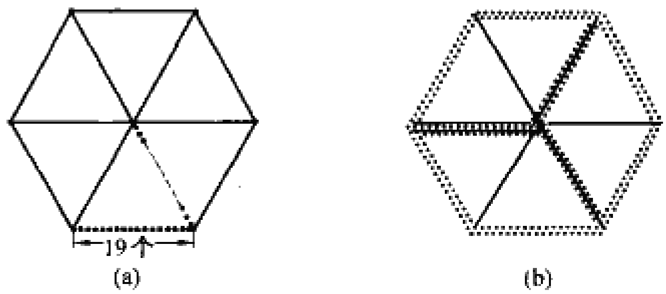


图 2

(2) 平行四边形解法.

将原六角形划成三个平行四边形.它的底边是 18(或 19) 个,层数(即高)是 19(或 18) 层(因看法不同而异).这样得到每个四边形内的个数是 $18\times19=$

342. 所以所求个数是三个平行四边形的个数再加上中心 1 个，即 $3\times342+1=1\,027$(个).

注　本题还可划成六个三角形来计算.

1958 年 8 月号小知识问题解答者名单

解答第 1,2,3,5 题者:符紫明.

解答第 1,3,5 题者:南京三中丁爱因斯坦数理小组.

解答第 2,3,5 题者许维仁,林森.

解答第 1,5 题者,黄建新,汪贵行,上海陕北中学高三(3) 数学小组,周志畅,沈祖耀,黄淑镖,陈申红.

解答第 3,5 题者:西安 LGY,姚平,顾曼生,彭祖仁,李文孙,仲秀美,蔡连英,何福生.

解答第 4,5 题者:武汉三中 Sophists 组.

解答第 1 题者:克诚,沈定康,左裕棠,王普,陆忠明.

解答第 3 题者:薛大庆,许贤定.

解答第 4 题者卢元伟,福州二中高毕.

解答第 5 题者:徐福全,李琼瑶,武汉十四中高一(二) 数学小组,孙加明,杨少岭,汪贵生,唐学梧,绍兴一中高一(2) 冰冰数学小组,章德华,宋彭生,王式德,廖方安,朱湘南,王生洪,顾炎之,欧永章,崔国栋,李岫云,北京一零一中高三(3) 赵延光数理原子团,江苏台州中学高三(8) 红专数学小组,古兴邦,唐根林,张治军,区颖敏,王兴华,谢相期,关加怀,冯家庆,陈颙,江西吉安高中普一数学小组,李颂生,支煜根,黎友沅,朱永藩,南京十二中皮埃尔居里数理小组,福建南安国光中学求知数学小组,江苏南通医学院吴一心数学爱好者.

1958 年 8 月号问题

1. 已知平面上两条不平行的直线，但不知道它们的交点，又知道不在这两条直线上的一个定点. 试作定点与两条已知直线的交点的连接线，但(1) 限用圆规和直尺，(2) 限用直尺.

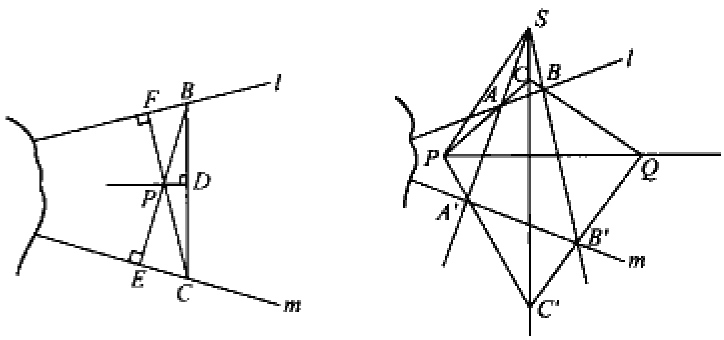
解法 1 已知 l 和 m 是两条不平行的直线但不知道它们的交点，又 P 是不在这两条直线上的一个定点.

(1) 利用三角形的垂心定理：三角形的三条高线必共点.

利用圆规和直尺过 P 作 PE 及 PF 分别和 m 及 l 垂直于 l 交于 B，F 与 m 交于 C，E(图 1(a)). 再作 PD 与 BC 垂直与 BC 交于 D，则 PD 所在直线即为所求.

(2) 利用两个三角形的笛沙格(Desargnes) 定理：两个三角形对应边交点，如果共线，则对应顶点连接线亦必共点，反之也成立. 这条直线叫透视和，这个点叫透视中心.

对 l 和 m 当作三角形一对对应边所在的直线，又所求直线当作透视轴. 任选和 P 不同且不在 l 和 m 上的一点当透视中心 S. 过 S 作两直线顺次交 l，m 于 A，A' 和 B，E'. 过 S 作一直线交 PA 于 C，PA' 于 C'. 又 CB 与 $C'B'$ 交于 Q 则 PQ 即所求(图 1(b)).



(a) (b)

图 1

解法 2 已知 l 和 m 是两条不平行的直线但不知道它们的交点，又 P 是不在这两条直线上的一个定点.

(1) 利用平行四边形的对角线性质定理；平行四边形的对角线互相平分.

过 P 作 PA，PB 分别与 l，m 平行交 m，l 于 A，B(图 2(a)). 作 AB 取中点 M，作 PM 即所求.

(2) 利用帕普斯(Pappus) 定理：一平面上有两条直线. 在这两条直线上各取 A_1，A_2，A_3 和 B_1，B_2，B_3. 则 A_2B_3，A_3B_2 的交点 P；A_3，B_1，A_1B_3 的交点 Q；

A_1B_2, A_2B_1 的交点 R 必共线.

过 P 作 A_2B_3, A_3B_2 两直线和 l, m 分别交于 A_2A_3 及 B_2(图 2(b)),又 A_2A_3 与 m 交于 A_1,B_2B_3 与 l 交于 B_1. 又 A_1B_3 及 A_3B_1 交于 Q,则 PQ 即所求.

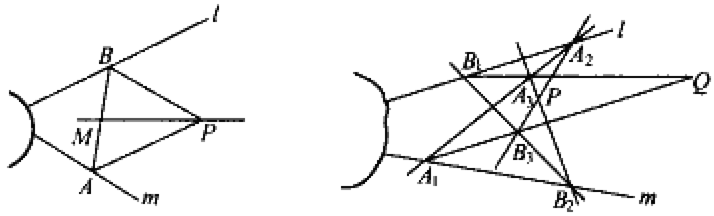


图 2

2. 设 a, b 均是实数,利用三角来解联立方程

$$\begin{cases}\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=a\\ \sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=b\end{cases}$$

解　为了使根号内的数是非负的必须下列两组不等式成立,即

(1) $x \geqslant 0, y \geqslant 0, 1-x \geqslant 0, 1-y \geqslant 0$,由此得出 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

(2) $x \leqslant 0, y \leqslant 0, 1-x \leqslant 0, 1-y \leqslant 0$.

此组不成立.

由 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$,故可作变换

$$x=\sin^2\theta, y=\sin^2\varphi$$

且

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

则已知联立方程变成

$$\begin{cases}\sin\theta\cos\varphi+\sin\varphi\cos\theta=a\\ \sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi=b\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases}\sin(\theta+\varphi)=a\\ \cos(\theta-\varphi)=b\end{cases}$$

故有

$$\begin{cases}\theta+\varphi=k\pi+(-1)^k\arcsin a\\ \theta-\varphi=2n\pi\pm\arccos b\end{cases}$$

① k 是偶数 $2m$

$$\begin{cases}\theta+\varphi=2m\pi+\arcsin a\\ \theta-\varphi=2n\pi\pm\arccos b\end{cases}$$

故有

$$\begin{cases}\theta=(m+n)\pi+\dfrac{1}{2}(\arcsin a\pm\arccos b)\\ \varphi=(m-n)\pi+\dfrac{1}{2}(\arcsin a\mp\arccos b)\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} x = \sin^2\left[(m+n)\pi + \frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b)\right] = \\ \quad \sin^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b)\right] \\ y = \sin^2\left[(m-1)\pi + \frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] = \\ \quad \sin^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] \end{cases}$$

②k 是奇数 $2m+1$

$$\begin{cases} \theta + \varphi = (2m+1)\pi - \arcsin a \\ \theta - \varphi = 2n \pm \arccos b \end{cases}$$

故有
$$\begin{cases} \theta = (m+n)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b) \\ \varphi = (m-n)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b) \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} x = \sin^2\left[(m+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] = \\ \quad \cos^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] \\ y = \sin^2\left[(m+n)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b)\right] = \\ \quad \cos^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b)\right] \end{cases}$$

讨论 若不用反三角函数来表示，可得结果如下.

①
$$\begin{cases} x = \sin^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b)\right] \\ y = \sin^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] \end{cases}$$

可以化成

$$x = \sin^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b)\right] = \frac{1}{2}[1 - \cos(\arcsin a \pm \arccos b)] =$$
$$\frac{1}{2}[1 - (\cos \arcsin a)(\cos \arccos b) \pm (\sin \arcsin a)(\sin \arccos b)] =$$
$$\frac{1}{2}[1 - b\sqrt{1-a^2} \pm a\sqrt{1-b^2}]$$

$$y = \sin^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] = \frac{1}{2}[1 - \cos(\arcsin a \mp \arccos b)] =$$
$$\frac{1}{2}[1 - (\cos \arcsin a)(\cos \arccos b) \mp (\sin \arcsin a)(\sin \arccos b)] =$$
$$\frac{1}{2}[1 - b\sqrt{1-a^2} \mp a\sqrt{1-b^2}]$$

故得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[1 - b\sqrt{1-a^2} \pm a\sqrt{1-b^2}] \\ y = \frac{1}{2}[1 - b\sqrt{1-a^2} \mp a\sqrt{1-b^2}] \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x = \cos^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] \\ y = \cos^2[(\arcsin a \pm \arccos b)] \end{cases}$$

可以化成

$$x = \cos^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \mp \arccos b)\right] = \frac{1}{2}[1 + \cos(\arcsin a \mp \arccos b)] =$$

$$\frac{1}{2}[1 + (\cos \arcsin a)(\cos \arccos b) \pm (\sin \arcsin a)(\sin \arccos b)] =$$

$$\frac{1}{2}[1 + b\sqrt{1-a^2} \pm a\sqrt{1-b^2}]$$

$$y = \cos^2\left[\frac{1}{2}(\arcsin a \pm \arccos b)\right] = \frac{1}{2}[1 + \cos(\arcsin a \pm \arccos b)] =$$

$$\frac{1}{2}[1 + (\cos \arcsin a)(\cos \arccos b) \mp (\sin \arcsin a)(\sin \arccos b)] =$$

$$\frac{1}{2}[1 + b\sqrt{1-a^2} \mp a\sqrt{1-b^2}]$$

故有

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[1 + b\sqrt{1-a^2} \pm a\sqrt{1-b^2}] \\ y = \frac{1}{2}[1 + b\sqrt{1-a^2} \mp a\sqrt{1-b^2}] \end{cases}$$

3.设自 1 开始 n 个自然数 k 次方之和记作 S_k,亦即

$$S_k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

试证:递推公式

$$C_{k+1}^k S_k + C_{k+1}^{k-1} S_{k+1} + \cdots + C_{k+1}^1 S_1 = (n+1)^{k+1} - (n+1)$$

此处 C_m^r 表 m 个文字取 r 个的组合,然后再推求 S_1, S_2, S_3, S_4.

证　自二项式定理得

$$(p+1)^{k+1} = p^{k+1} + C_{k+1}^k p^k + C_{k+1}^{k-1} p^{k+1} + \cdots + C_{k+1}^1 p + 1$$

设 $p = 0, 1, \cdots, n$,则得

$$1^{k+1} = 1$$

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = C_{k+1}^k 1^k + C_{k+1}^{k-1} 1^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^1 1 + 1$$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} = C_{k+1}^k 2^k + C_{k+1}^{k-1} 2^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^1 2 + 1$$

$$\cdots$$

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = C_{k+1}^k n^k + C_{k+1}^{k-1} n^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^1 n + 1$$

将此 $n+1$ 个式相加

$$(n+1)^{k+1} - 1 = C_{k+1}^k S_k + C_{k+1}^{k-1} S_{k-1} + \cdots + C_{k+1}^1 S_1 + n$$

即得证.

设 $k=1, S_1=1+2+\cdots+=\frac{n}{2}(n+1)$.

设 $k=2, S_2=1^2+2^2+\cdots+n^2$. 由递推公式

$$C_3^2S_2+C_3^1S_1=(n+1)^3-(n+1)$$

故有

$$S=\frac{1}{3}[(n+1)^3-(n+1)-3S_1]=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

设 $k=3, S_3=1^3+2^3+\cdots+n^3$. 由递推公式

$$C_4^2S_3+C_4^2S_2+C_4^1S_1=(n+1)^4-(n+1)$$

故有

$$S_3=\frac{1}{4}[(n+1)^4-(n+1)-n(n+1)(2n+1)-$$

$$2n(n+1)]=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

设 $k=4, S_4=1^4+2^4+\cdots+n^4$. 由递推公式

$$C_5^4S_4+C_5^3S_3+C_5^2S_2+C_5^1S_1=(n+1)^5-(n+1)$$

故有

$$S_4=\frac{1}{5}\Big[(n+1)^5-(n+1)-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-$$

$$\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{5n}{2}(n+1)\Big]=$$

$$\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

4. 已知一无穷级数

$$\frac{1+4+7+10}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\frac{4+7+10+13}{4\cdot7\cdot10\cdot13}+\frac{7+10+13+16}{7\cdot10\cdot13\cdot16}+\cdots$$

写出第 n 项来. 然后推求首 n 项之和, 再推求此级数之和.

解 设第 n 项是 n_n, 则有

$$n_n=\frac{(3n-2)+(3n+1)+(3n+4)+(3n+7)}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)}=$$

$$\frac{12n+10}{(3n+2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)}=$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}-\frac{1}{(3n+4)(3n+7)}\right]=$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{3}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{3n+7}\right)=$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+7}\right)$$

所以 n 项和

$$S_n = n_1 + n_2 + \cdots + n_n = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+7}\right) =$$

$$\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+7}\right) = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+7}\right) =$$

$$\frac{2n(3n+8)}{7(3n+1)(3n+7)}$$

此级数和

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(3+\frac{8}{n}\right)}{7\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{7}{n}\right)} = \frac{2}{21}$$

5.若 OA,OB,OC 为一个平行六面体之三个相邻棱,且 R 是 O 的对顶.作 OP 及 RQ 与平面 ABC 垂直.试比较 OP 及 RQ 的长度.假如这个平行六面体是直六面体.试证:

$$PQ^2 = OR^2 - 9OP^2$$

证 在图3中设 OM 与 AC 交于 D 点,则 D 点将在 ABC 面上,PD 亦必在 ABC 面上.OP 既然垂直于 ABC 面,故 OP 必和 PD 垂直,亦即 $\widehat{OPD} = 90°$.QB 在 ABC 面上.RQ 既然垂直于 ABC 面,故 RQ 必和 QB 垂直,亦即 $\widehat{RQB} = 90°$.又 $OB = RM$,$BR = OM$,故 $OBRM$ 是一平行四边形.所以 $OM \parallel BR$.又 OP 和 RQ 都垂直于 ABC 面,所以 $OP \parallel RQ$.

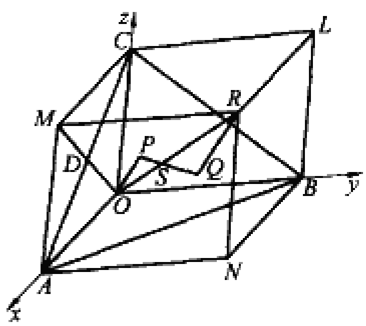


图3

所以 $$\widehat{POD} = \widehat{QRB}$$

因此直角三角形 OPD 和 RQB 必相似.

所以 $$OP : RQ = OD : RB = 1:2$$

故有 $$OP = \frac{1}{2}RQ$$

由于 $OP \parallel RQ$,则 O,P,Q,R 共面.但是 R 和 O 分居 ABC 面的两侧,故 OR 与 PQ 不能平行而交于 S 点,PS 在 ABC 面上,故 OP 必和 PS 垂直,亦即 $\widehat{OPS} = 90°$,QS 在 ABC 面上,故 RQ 必和 QS 垂直,亦即 $\widehat{RQS} = 90°$,而且 $\widehat{OSP} = \widehat{RSQ}$,因此直角三角形 OPS 和 RQS 必相似,所以

$$OS : RS = PS : QS = OP : RQ = 1:2 \quad ①$$

在 Rt△OPS 中

$$OS^2 = OP^2 = SP^2$$

又
$$OS = \frac{1}{2}RS = \frac{1}{3}OR$$
$$SP = \frac{1}{2}QS = \frac{1}{3}PQ$$

得出,以 OA, OB, OC 为坐标轴的正向建立笛氏斜角坐标系.又 $OA = a, OB = b, OC = c$,则 R 的坐标是 (a,b,c). OR 的方程是

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \qquad ②$$

ABC 平面的方程是

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad ③$$

将 ② 与 ③ 联立解之得 S 的坐标是 $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.

因此即得式 ①.

所以
$$\frac{1}{9}OR^2 = \frac{1}{9}PQ^2 + OP^2$$

即
$$PQ^2 = OR^2 - 9OP^2$$

注 (1) 原题所说的直六面体的性质在任何平行六面体的情况下都成立.

(2) 式 ① 可用解析几何方法.

1958年8月号问题解答者名单

解出1题者:谢福宝,汤德,李文楷,吴远芳,刘礼洲,袁家齐,李牧尧,王东生,陈元相,岳佐圣,吴世泽,王国钧,唐永生,孙士申,李选求,侯明东,陈炽棠,白丁,罗厚宇,罗业琪,兴哲,阮文亮,吴彭忠,顾志刚,桂润铭,毕成堪,刘煜之和刘贵荣,孙觉和黄全福,方文德和方正域,丁树荣和张砦鹏和戴真光.

解出2题者:吴希伦,舒昌乐,徐先容,孟宪民,蒙永吉,陶学富,许维廉,李植荣,陶月明,戴松年,蒋福敏和庄中式,上海民行中学高三高斯数学小组,广州豪贤路83号数学爱好者.

解出3题者:崔海,刘揆一,万浩庭.

解出4题者:李宗元,贾彦斌,马崇援,张观周,余春熔,安秉权,刘明倡,许维仁和林森,上海敬业中学高三火星数学小组.

解出5题者:吴任公,顾育德,何立石,戴士杰,曹立三,刘德欣,张清太和贺原山.

解出1,2题者:章慧珍,王厥身,傅尔钧,张春廷.

解出1,3题者:孙永志.

解出1,4题者:李运兴,张树芬,任辛成,吴顺林,刘德敏和刘德民和庞元生.

解出2,3题者:张以勤,王殿学,胡敦友,李琼瑶,夏永绵,邵中桂,朱永作,上海洋泾中学高三(4)数学小组.

解出2,4题者:刘国冲,罗家声,上海同济中学高三(3)a + bi数学小组.

解出3,4题者:王华琴,于连璋,吕朴,梅林周.

解出2,5题者:路鸿祥.

解出3,5题者:金昭勇.

解出4,5题者:毛定良,郑志豪.

解出1,2,3题者:金美玉及李胀范.

解出1,2,4题者:李兆顺,曹云,毛文杰,上海陕北中学高三(二)19号.

解出1,2,5题者:府猛宽,银川马失名.

解出1,3,4题者:宋焕根,李群,王锦和董荣森,周相央.

解出2,3,4题者:郑炼青,吴海泉,北京东四五条失名.

解出1,2,3,4题者:黎庆年,许贤定,陆培荣和邵贻仁,北京师大附中高一(2)伽罗瓦数学爱好群.

解出1,2,4,5题者:李连文和刘维义,姚玉珩,巴汉杰,郭向春及洪家荣,许寅初,王自强.

解出1,2,3,5题者:蒋铿.

解出2,3,4,5题者:卜林,孙沅,董振中,贾凤鸣,费振宇和唐振炎,湖南师院附中,爱因斯坦数学小组.

解出1,2,3,4,5题者:钱贻策,戴静安,梁天骏,张延浩,朱咏堂,潘君来,牟丙伦,陈涤心,胡汉贤,金长发,安东一高一穹二白数学小组,孙成裕,李永聚,刘德序和汪子连.

1958 年 9 月号征解问题答案

❖取三数

1. 从 1 到 100 的自然数中，每次取 3 个数，使它们的和大于或等于 100. 问有多少种取法？(提出人：上海女中陆惠群)

解　设每次所取三数为 x, y, z，且 $x < y < z$，得表 1.

表 1

x	y	z 起讫	取法	共计	x	y	z 起讫	取法	共计
1	2	97,100	4	1 320	2	3	95,100	6	3 311
	3	96,100	5			4	94,100	7	
	4	95,100	6			5	93,100	8	
	…	… …	…			…	… …	…	
	48	51,100	50			47	51,100	50	
	49	50,100	51			48	50,100	51	
	50	51,100	50	1 275		49	50,100	51	1 326
	51	52,100	49			50	51,100	50	
	52	53,100	48			51	52,100	49	
	…	… …	…			…	… …	…	
	98	99,100	2			98	99,100	2	
	99	100	1			99	100	1	
3	4	93,100	8	1 350	4	5	91,100	10	1 333
	5	92,100	9			6	90,100	11	
	6	91,100	10			7	89,100	12	
	…	… …	…			…	… …	…	
	47	50,100	51			46	50,100	51	
	48	49,100	52			47	49,100	52	
	49	50,100	51	1 326		48	49,100	52	1 378
	50	51,100	50			49	50,100	51	
	51	52,100	49			50	51,100	50	
	…	… …	…			…	… …	…	
	98	99,100	2			98	99,100	2	
	99	100	1			99	100	1	

续表 1

x	y	z 起讫	取法	共计	x	y	z 起讫	取法	共计
5	6	89,100	12	1 365	6	7	87,100	14	1 340
	7	88,100	13			8	86,100	15	
	8	87,100	14			9	85,100	16	
	…	… …	…			…	… …	…	
	46	49,100	52			45	49,100	52	
	47	48,100	53			46	48,100	53	
	48	49,100	52	1 378		47	48,100	53	1 431
	49	50,100	51			48	49,100	52	
	50	51,100	50			49	50,100	51	
	…	… …	…			…	… …	…	
	98	99,100	2			98	99,100	2	
	99	100	1			99	100	1	

当 $x=1$ 时,有取法 $2(1+2+3+\cdots+50)+51-(1+2+3)=2\ 595$(种)(其中 $x+y+z\geqslant 100$ 者 1 320 种,$x+y+z>100$ 者 1 275 种).

当 $x=2$ 时,有取法 $2(1+2+3+\cdots+51)-(1+2+3+4+5)=2\ 637$(种).

当 $x=3$ 时,有取法 $2(1+2+3+\cdots+51)52-(1+2+3+\cdots+7)=2\ 676$(种).

依此推算得表 2,表 3.

表 2

x	y 起讫	取法		x	y 起讫	取法	
1	2,49 50,99	1 320 1 275	2 595	17	18,41 42,99	1 140 1 711	2 851
2	3,48 49,99	1 311 1 326	2 637	18	19,40 41,99	1 067 1 770	2 837
3	4,48 49,99	1 350 1 326	2 676	19	20,40 41,99	1 050 1 770	2 820
4	5,47 48,99	1 333 1 378	2 711	20	21,39 40,99	969 1 830	2 799
5	6,47 48,99	1 365 1 378	2 743	21	22,39 40,99	945 1 830	2 775
6	7,46 47,99	1 340 1 431	2 771	22	23,38 39,99	856 1 891	2 747
7	8,46 47,99	1 365 1 431	2 796	23	24,38 39,99	825 1 891	2 716
8	9,45 46,99	1 332 1 485	2 817	24	25,37 38,99	728 1 953	2 681

续表 2

x	y 起讫	取法		x	y 起讫	取法	
9	10,45 46,99	1 350 1 485	2 835	25	26,37 38,99	690 1 953	2 643
10	11,44 45,99	1 309 1 540	2 849	26	27,36 37,99	585 2 016	2 601
11	12,44 45,99	1 320 1 540	2 860	27	28,36 37,99	540 2 016	2 556
12	13,43 44,99	1 271 1 596	2 867	28	29,35 36,99	427 2 080	2 507
13	14,43 44,99	1 275 1 596	2 871	29	30,35 36,99	375 2 080	2 455
14	15,42 43,99	1 218 1 653	2 871	30	31,34 35,99	254 2 145	2 399
15	16,42 43,99	1 215 1 653	2 868	31	32,34 35,99	195 2 145	2 340
16	17,41 42,99	1 150 1 711	2 861	32	33,33 34,99	66 2 211	2 277

表 3

x	y 起讫	取法	x	y 起讫	取法	x	y 起讫	取法
33	34,99	2 211	34	35,99	2 145	35	36,99	2 080
36	37,99	2 016	37	38,99	1 953	38	39,99	1 891
39	40,99	1 830	40	41,99	1 770	41	42,99	1 711
42	43,99	1 653	43	44,99	1 596	44	45,99	1 540
45	46,99	1 485	46	47,99	1 431	47	48,99	1 378
48	49,99	1 326	49	50,99	1 275	50	51,99	1 225
51	52,99	1 176	52	53,99	1 128	53	54,99	1 081
54	55,99	1 035	55	56,99	990	56	57,99	946
57	58,99	903	58	59,99	861	59	60,99	820
60	61,99	780	61	62,99	741	62	63,99	703
63	64,99	666	64	65,99	630	65	66,99	595
66	67,99	561	67	68,99	528	68	69,99	496
69	70,99	465	70	71,99	435	71	72,99	406

续表 3

72	73,99	378	73	74,99	351	74	75,99	325
75	76,99	300	76	77,99	276	77	78,99	253
78	79,99	231	79	80,99	210	80	81,99	190
81	82,99	171	82	83,99	153	83	84,99	136
84	85,99	120	85	86,99	105	86	87,99	91
87	88,99	78	88	89,99	66	89	90,99	55
90	91,99	45	91	92,99	36	92	93,99	28
93	94,99	21	94	95,99	15	95	96,99	10
96	97,99	6	97	98,99	3	98	99,100	1

从 $x=1$ 至 $x=32$ 的取法种数是 86 632.

从 $x=33$ 至 $x=98$ 的取法种数是 $C_{100-33+1}^3=C_{68}^3=\dfrac{68\cdot 67\cdot 66}{1\cdot 2\cdot 3}=50\ 116$.

所以总共取法 $=86\ 632+50\ 116=136\ 748$(种).

❖特根关系

2. 问方程 $x^{12}-1=0$ 的特根有几个?它们的关系是怎样的?(提出人:重庆潘福铨)

解 方程的"特根",就是由它能求出原式的一切根来.

在本题中,因为 $12=2^2\cdot 3$,这里的 2,3 都是质数,所以 $x^{12}-1=0$ 的特根有 $12\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=4$ 个.又 $\dfrac{12}{2}=6,\dfrac{12}{3}=4$,故知 $x^6-1=0$ 与 $x^4-1=0$ 的根都适合于方程 $x^{12}-1=0$,也就是 $x^{12}-1$ 可以被两式 x^6-1 及 x^4-1 除尽.令 $\dfrac{x^{12}-1}{x^6-1}=x^6+1,\dfrac{x^{12}-1}{x^4-1}=x^8+x^4+1$,所以方程 $x^{12}-1=0$ 的特根,就是 $x^6+1=0$ 与 $x^8+x^4+1=0$ 的公共根,即 $x^4-x^2+1=0$ 的根.

试解 $x^4-x^2+1=0$,得 $x^2\pm\sqrt{3}x+1=0$,即

$$x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{3} \quad ①$$

令 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$ 的一根为 λ,因其两根之积为 1,故另一根为 $\dfrac{1}{\lambda}$,即其两根 λ 与 $\dfrac{1}{\lambda}$ 等于 $\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$.又令 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$ 的一根为 λ_1,亦因其两根之积为 $\dfrac{1}{\lambda_1}$,即

其两根 λ_1 与$\frac{1}{\lambda_1}$ 等于$\frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$.由 ① 知

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=\sqrt{3} \text{ 及 } \lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}=-\sqrt{3}$$

所以

$$\lambda+\lambda_1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}=0$$

即$(\lambda+\lambda_1)\left(\frac{1}{\lambda\lambda_1}+1\right)=0$,由此得 $\lambda\lambda_1=-1$.

因为 λ 为$x^6+1=0$的根,得 $\lambda^6=-1$,所以 $\lambda^5=-\frac{1}{\lambda}=\lambda_1$.

但 $x^{12}-1=0$,即 $x^{12}=1$.所以

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda^{12}}{\lambda}=\lambda^{11},\frac{1}{\lambda_1}=\frac{\lambda^{12}}{\lambda^5}=\lambda^7$$

所以本题的四个特根 $\lambda,\lambda_1,\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda}$ 可表示为$\lambda,\lambda^5,\lambda^7,\lambda^{11}$.

若以 λ^5 为第一特根,那么第二特根为$\lambda^{25}=\lambda^{24}\cdot\lambda=\lambda$,第三特根为$\lambda^{35}=\lambda^{24}\cdot\lambda^{11}=\lambda^{11}$,第四特根为$\lambda^{55}=\lambda^{48}\cdot\lambda^7=\lambda^7$.同样,若以$\lambda^7$为第一特根,那么第二,第三,第四特根为$\lambda^{11},\lambda,\lambda^5$.若以$\lambda^{11}$为第一特根,那么第二,第三,第四特根为$\lambda^7,\lambda^5,\lambda$.其顺序如下:

λ	λ^5	λ^7	λ^{11}
λ^5	λ	λ^{11}	λ^7
λ^7	λ^{11}	λ	λ^5
λ^{11}	λ^7	λ^5	λ

由上可知每行或每列都是有四个特根,只是它们的次序各不相同.从上面说来,可知四个特根中,若已知其中任意一个,必可求出其他三个.

又 1,5,7,11 都是小于 12,且与 12 互素,今将 $x^{12}-1=0$ 的一切根,用这四个特根的幂表,得顺序如下:

λ	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6	λ^7	λ^8	λ^9	λ^{10}	λ^{11}	1
λ^5	λ^{10}	λ^3	λ^8	λ	λ^6	λ^{11}	λ^4	λ^9	λ^2	λ^7	1
λ^7	λ^2	λ^9	λ^4	λ^{11}	λ^6	λ	λ^8	λ^3	λ^{10}	λ^5	1
λ^{11}	λ^{10}	λ^9	λ^8	λ^7	λ^6	λ^5	λ^4	λ^3	λ^2	λ	1

注 本题若利用棣莫佛公式,即由下面一式,可以求出原式的一切根.

$x_k=\cos\frac{2k\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{12}(k=1,2,3,\cdots,12)$,各根列出如下.

$x_1=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$　　$x_2=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

$x_3=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}$　　$x_4=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

$x_5=\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$　　$x_6=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$

$x_7=\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$　　$x_8=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

$x_9=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}=-\mathrm{i}$　　$x_{10}=\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

$x_{11}=\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$　　$x_{12}=\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi=1$

这里的根12个,即6对,每对都互为倒数

$$\left(x_1=\frac{1}{x_{11}},x_2=\frac{1}{x_{10}},x_3=\frac{1}{x_9},x_4=\frac{1}{x_8},x_5=\frac{1}{x_7},x_6=\frac{1}{x_6}\right)$$

每对亦互为反数($x_6=-x_{12},x_7=-x_1,x_8=-x_2,x_9=-x_3,x_{10}=-x_4,x_{11}=-x_5$).仅有实根一对($x_{12},x_6$),其他五对都是共轭虚数($x_1,x_{11};x_2,x_{10};x_3,x_9;x_4,x_8;x_5,x_7$),其中有一对是纯虚数($x_3,x_9$).

如令 $x_4=\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,得

$$x_8=\omega^2,x_{10}=-\omega,x_2=-\omega^2,x_7=\omega\mathrm{i}$$

$$x_{11}=\omega^2\mathrm{i},x_1=-\omega\mathrm{i},x_5=-\omega^2\mathrm{i}$$

又 $x_8=\sqrt{\omega}$,所以 $x_4=x_8^2$.

❖渐近分数

3.求$\frac{2}{1}-\frac{3}{5}-\frac{8}{7}-\cdots-\frac{\gamma^2-1}{(2\gamma+1)}-\cdots$的第 n 渐近分数是什么?(提出人:江苏兴化王佑)

解　设第 n 渐近分数为$\frac{p_n}{q_n}$.在本题中 $p_1=2,q_1=1;p_2=10,q_2=2;p_3=54,q_3=6$.

依公式 $p_n=(2n+1)p_{n-1}-(n^2-1)p_{n-2}$,即

$$p_n-np_{n-1}=(n+1)[p_{n-1}(n-1)p_{n-2}] \quad ①$$

同理
$$p_{n-1}-(n-1)p_{n-2}=n[p_{n-2}-(n-2)p_{n-3}]$$
$$p_{n-2}-(n-2)p_{n-3}=(n-1)[p_{n-3}(n-3)p_{n-4}]\cdots p_4-4p_3=$$
$$5(p_3-3p_2),p_3-3p_2=4(p_2-2p_1)$$

代人①得
$$p_n-np_{n-1}=(n+1)n(n-1)(n-2)\cdots5\cdot4(p_2-2p_1)=$$
$$\frac{(n+1)!}{3!}(10-4)=(n+1)!$$

于是
$$\frac{p_n}{n!}-\frac{p_{n-1}}{(n-1)!}=n+1$$

仿此$\frac{p_{n-1}}{(n-1)!}-\frac{p_{n-2}}{(n-2)!}=n,\frac{p_{n-2}}{(n-2)!}-\frac{p_{n-3}}{(n-3)!}=n-1,\cdots,\frac{p_3}{3!}-\frac{p_2}{2!}=4,$
$\frac{p_2}{2!}-\frac{p_1}{1!}=3.$

将以上诸式相加得
$$\frac{p_n}{n!}-\frac{p_1}{1!}=(n+1)+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+4+3$$

所以
$$p_n=n![(n+1)+n+(n-1)+\cdots+3+2]=\frac{n(n+3)n!}{2}$$

又 $q_n-nq_{n-1}=0$,即 $q_n=nq_{n-1}$.同理
$$q_{n-1}=(n-1)q_{n-2},\cdots,q_3=3q_2,q_2=2q_1$$

所以
$$q_n=nq_{n-1}=n(n-1)q_{n-2}=\cdots=n!$$

故所求的第 n 渐近分数
$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{n(n+3)}{2}$$

❖三角形各角的正弦

4. $\triangle ABC$ 的各边 a,b,c 成等差级数,且 $A-C=90^\circ$.问各角的正弦值是多少?(提出人:山东曹县李慕荣)

解 在 $\triangle ABC$ 中,$A+B+C=180^\circ$,所以
$$\frac{A+C}{2}=90^\circ-\frac{B}{2}$$

又已知 $a+c=2b$ 及 $A-C=90°$，所以

$$\frac{A-C}{2}=45° \text{ 及 } B+2C=90°$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A+\sin C}{a+c}=\frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2b}=\frac{\sin\frac{B}{2}\cos 45°}{b}$$

于是

$$\sin B=\cos\frac{B}{2}\cos 45°$$

$$2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{B}{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

所以

$$\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{7}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

从 $B+2C=90°$，得 $\cos 2C=\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以

$$\sin C=\sqrt{\frac{1-\cos 2C}{2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{7}}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

从 $a+c=2b$，得 $\sin A=2\sin B-\sin C$。所以

$$\sin A=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{\sqrt{7}-1}{4}=\frac{\sqrt{7}+1}{4}$$

注 本题 $\sin B=0.661\,437\,8$，$B=41°24'35''$，$\sin C=0.411\,437\,8$，$C=24°17'43''$，$\sin A=0.911\,437\,8$，$A=114°17'43''$。

❖圆锥面积

5. 已知一个圆锥的体积为 V。问在怎样的情形下，它的侧面积或全面积为极小？又这两个极小值是什么？（提出人：上海刘业元）

解 设圆锥的高为 h,底半径为 r,母线 $l=\sqrt{h^2+r^2}$(图 1),圆锥的侧面积

$$s=\pi rl=\pi r\sqrt{h^2+r^2} \quad ①$$

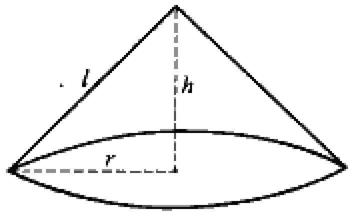


图 1

所以 $V=\dfrac{h\pi r^2}{3}$,所以

$$h=\frac{3V}{\pi r^2} \quad ②$$

将②代入①得

$$s=\pi r\sqrt{\left(\frac{3V}{\pi r^2}\right)^2+r^2}=\pi r\sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2 r^4}+r^2}=\sqrt{\frac{9V^2}{r^2}+\pi^2 r^4}=\sqrt{\left(\frac{3V}{r}-\pi r^2\right)^2+6\pi rV}$$

即 $s^2=\left(\dfrac{3V}{r}-\pi r^2\right)^2+6\pi rV$. 这式当 $\dfrac{3V}{r}=\pi r^2$ 时,s 有极小值

$$\sqrt{6\pi rV} \quad ③$$

于是 $r^3=\dfrac{3V}{\pi}$,所以

$$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$

代入②,得

$$h=\frac{3V}{\pi\sqrt{\dfrac{9V^2}{\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{27V^3}{\pi^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{9V^2}}=\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$$

所以,当 $r=h$ 时,侧面积 s 有极小.

代入③得

$$s\text{ 的极小值}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3\pi V\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{3^4\pi^2V^4}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{9\pi V^2}=4.308\ 36V^{\frac{2}{3}}$$

1958年9月号问题征解解答者名单

解答第1,2,4题者张禄度,钱贻策,邹志鸿.

解答第1,4题者:刘德敏,刘德民,许贤定,钟贞一,过国铭,孙家麟,夏本根,江西吉安高中普通一班数学小组,陈淡.

解答第2,4题者:陆善镇.

解答第3,4题者:虞哲谅,卞祖喜,许传根,南安求知数学小组,林森,许维仁.

解答第4,5题者:舒昌乐.

解答第1题者:丁伟明,张明基,项正清,李才贵,刘鑾波.

解答第3题者:王思忠,吴尧,余成,解答第4题者:张贵成,严庆宏,四川威远一中高三(3)1号及31号,岳佐圣,李艺,吴基侑,封辅智,公雨,雷耀波,余汉华,蒋镇瀛,福建鼓浪屿复兴路86号林君,吴中强,毛善国,上海北郊中学CTK数学爱好者,宗肇勋,姚振中,陆福昆,钱公越,武汉三中Sophists数学组,兰州AC燕,张声国,邵峻明,吴汝棉,廖兴国,南京师院附中高三己数学爱好者,贝治平,高德明,蒋福敏,庄中云,孙光云,朱青,俞钟明,许沛良,黎明,思京,俞展犹,陆培荣,邵贻仁,陈振华,张振鑫,无锡二中高三丙杨辉数学小组,上海徐汇中学董林数学研究小组,吴培华,丁炳泉,陈元祥,汤德祥,黄钟镜,吴海泉,高光弟,吴荫会,唐磊卉,哈尔滨兆麟中学(19)xy数学小组,董振中,安徽歙县中学高三(1)飞马数学小组,林一星,姚诗源,江西丰城中学(i)数学小组,郑灼球,汪贵行,南京一读者:邹景侯,江苏吴县中学高三(1)棣美弗数学爱好小组,上海陕北中学高三(二)CS二人数学小组,张振鑫,董治中.

解答第5题者:刘兆玖,赖祖正.

1958 年 9 月号小知识问题答案

❖星期的起源

1. 为什么一个星期是七天,这样的规定起源于什么人?我国在没有采用星期法以前是否曾把一个月划分为若干部分呢?(提出人:南昌文业春)

答　一个星期定为七天起源于巴比伦,即现在的伊拉克,因为古代巴比伦人以为天上行动的星只有七颗,这七颗星距离我们的顺序由远及近是土星、木星、火星、太阳、金星、水星、月亮,当然这个说法就现在看来是不正确的,他们并规定七个星各有一个神轮流地值管时辰,第一时由土星神管,第二时由木星神管,以下依此递推.这天二十四时终了之后,第二天第一时由太阳神值管、第三天第一时由月亮神值管,这样七天就成了一个循环,因此一个星期七天的顺序是:土曜日(星期六)、日曜日(星期日),月、火、水、木、金(星期五).但是因为当时的人们特别崇拜太阳神,所以不久便改用日曜日为首日,这个星期法的使用,初由犹太教传人,渐次传于基督教徒.根据旧约的记载,说在公元前九世纪就已有人使用过,但比较广泛的流行还是四世纪以后的事.

我国商代(公元前十八世纪)把一个月分为三部分,以月初十天为"上旬",月中十天为"中旬",月尾十天为"下旬";周初(公元初前十二世纪),把一个月分为四部分,以每月初见月光出的"月出"(阴历初三日)到第二次"月出"为一个月,所分四部分的名称为"初吉"(月光初出现至月光有一半的日期),"既生霸"(月光已有一半至望日的日期),"既望"(望后至月光缺去一半的日期),"既死霸"(月光已缺一半至不见月光的日期).而以"月出","载(哉)生霸","望","载死霸"为各份初日的名称,这里的"霸"字亦作"魄",表示月相有光的意思,以"望日"为"生霸"的极点,"朔日"为"死霸"的极点,又称月光将团圆的日期为"旁生霸",月光将缺尽的日期为"旁死霸".

❖画锥线

2. 抛物线,椭圆,双曲线各有哪些用处?又有哪些样子的画法?(提出人:太

原姚思良)

答 正圆锥体被一个平面所截，当平面平行于锥体的母线时，所得的截口是"抛物线"，当平面斜交于底面时，所得的截口为"椭圆"；当平面斜交于轴而截锥体的两部时，所得的截口是"双曲线"．所以这三种曲线，统称曰"圆锥曲线"．它们用来表示一些图形如下．

抛物线表示：(1) 把一块石头抛出手中，石头所经过的路径．(2) 炮弹所走的路径．(3) 晒着衣服所坠下来的绳子．(4) 兜鱼的网子．(5) 盛有液体的圆桶将它旋转起来，液体表面就成抛物线形(实际是抛物面)．

椭圆表示：(1) 照明灯射到舞台上的影子．(2) 盛有液体的圆柱形玻璃杯，将它稍微倾斜一些液体表面就成椭圆形．(3) 腰子形的镜子也成椭圆形．

双曲线表示：(1) 汽车或脚踏车前面的灯光，照在地面上的影子．(2) 天花板下挂的照灯，映在墙上的影子．这三种图形的画法如下．

抛物线画法

(1) 如图1，用一块三角板 SDT．使 DT 和线叠合，又用一根线沿着边 SD．把线的一端，固定在焦点 F，另一端固定为 S．拿一支铅笔，在点 P 把这根线拉紧．令 $PD = PF$，那么当三角板沿着准线移动时，点 P 就画成一个抛物线．

(2) 如图2，F 为焦点，LF' 为准线，任意做一些平行于 LF' 的线．以 F 为圆心，$F'1$ 为半径，作弧，交 $P_1P'_1$ 于 P_1，P'_1；以 $F'2$ 为半径，作弧，交 $P_2P'_2$ 于 P_2，P'_2，这些点就都在抛物线上．

(3) 如图3，设准线为 LF'，过焦点 F 作 $FF' \perp LF'$．取 FF' 的中点A 为顶点．在准线上任取诸点 1,2，作 $1P_1$，$2P_2$ 平行于主轴．联结 $F1$，作中垂线 M_1P_1，交 $1P_1$ 于 P_1；联结 $F2$，作中垂线 M_2P_2，交 $2P_2$ 于 P_2，这些点就都在抛物线上．

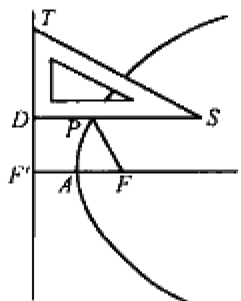


图 1

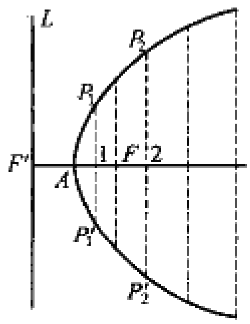


图 2

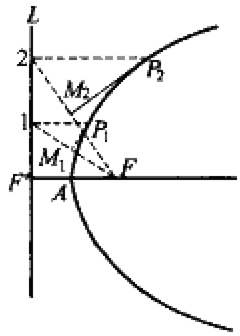


图 3

(4) 如图4，设 AS 为主轴，A 为顶点，P 为抛物线上一点．过 A 作 $AT \perp AS$，过 P 作 $PT \parallel AS$，将 PT 及 AT 各平分为 n 等分(图中 $n = 4$)，得分点 1,2,3,… 及 1′,2′,3′,… 联 $A1$，$A2$，…．作 $1'P^1$，$2'P_2$，… 平行于主轴．$A1$ 交 $1'P_1$ 于 P_1，$A2$

交 $2'P_2$ 于 P_2,….这些点 $P_1,P_2,\cdots$ 就都在抛物线上.

(5) 如图5,设 AS 为主轴,P 在抛物线上.作 P 的对称点P'.将 AS 及 PS 各平分为 n 等分(图中 $n=4$),得分点,1,2,3,… 及1′,2′,3′,….联 $P'1,P'2,\cdots$ 作 $1'P_1,2'P_2,\cdots$ 平行于主轴.$P'1$ 交 $1'P_1$,于 P_1,$P'2$ 交 $2'P_2$ 于 P_2,这些点 P_1,P_2,… 就都在抛物线上.

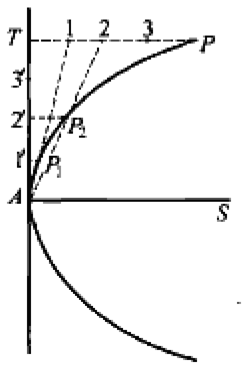


图4

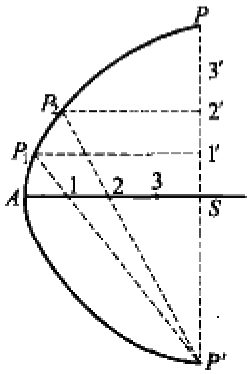


图5

椭圆画法

(1) 如图6,已知两个焦点在 F_1F_2 及长轴的长,取一根等于长轴的线把线的两端固定在 F_1 及 F_2.用一支笔 P_1 把线拉直,那么点 P 的移动就成一个椭圆.

(2) 如图7,长轴为 AB,短轴为 CD.取一个纸条 PL,令其长等于长轴之半,在纸条定 M.令 $LM=\dfrac{AB-CD}{2}$.移动纸条,使 M,L 各沿着长短轴上活动,变为 M',L',那么 P,P' 的轨道就成椭圆.

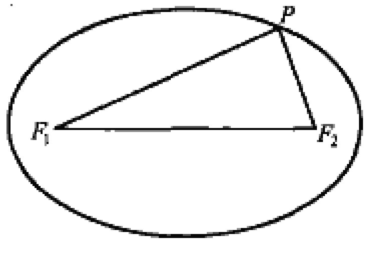


图6

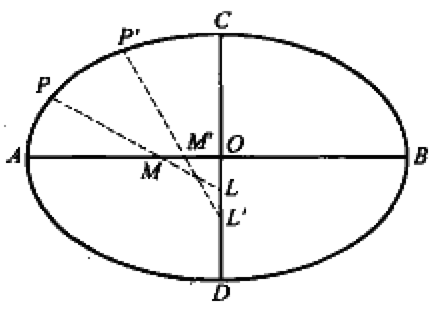


图7

(3) 如图8,长轴为 AB,焦点在 F_1,F_2.在 F_1F_2 上任意取一些点1,2,… 以 F_1 及1各为圆心,$A1$ 为半径,向上下作弧,得交点为 P_1 及 P';以 F_1 及2各为圆心,A_2 为半径,向上下作弧得交点为 P_2 及 P'_2.那么 $P_1,P_2,\cdots,P'_1,P_2^{|},\cdots$ 就成一个椭圆.

(4) 如图9,长轴为 AB,短轴为 CD,椭圆心为 O,作矩形 $AOCA'$.平分 OC 及 $A'C$ 各为 n 等分(图中 $n=4$)得分点 1,2,3,…,1′,2′,3′,… 联结 $B1$,$A1'$ 相交于 P_1;联结 $B2$,$A2'$ 相交于 P_2;… 那么 P_1,P_2,… 就都在椭圆上.

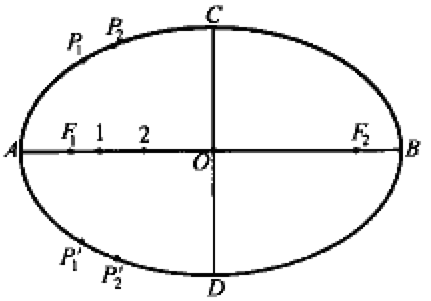


图 8

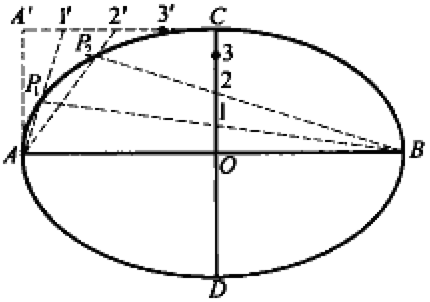


图 9

(5) 如图 10,以椭圆心,O 为圆心,长轴 AB 及短轴 CD 各为直径画同心圆.自 O 任意作射线 $O1$,$O2$,… 与大小圆相交于 1,2,…,1′,2′,…,自 1,1′ 作垂直于两轴的线相交于 P_1;自 2,2′ 作垂直于两轴的线相交于 P_2;…,那么 P_1,P_2,… 就都在椭圆上.

(6) 如图 11,椭圆心为 O,长轴为 AB,短轴为 CD.作矩形 $OBB'C$,联结对角线 OB'.在 AB 上任意取点 1,2,… 作 11′,22′,… 平行于 OC.在 OB 上取 OⅠ = 11′,OⅡ = 22′,…,得点Ⅰ,Ⅱ,….自Ⅰ作Ⅱ′,交 OB' 于Ⅰ′;自Ⅱ作ⅡⅡ′交 OB'Ⅱ′;….自Ⅰ′作Ⅰ′P_1 // AB,交 11′ 于 P_1;自Ⅱ′作Ⅱ′P_2 // AB,交 22′ 于 P_2,那么 P_1,P_2,… 就都在椭圆上.

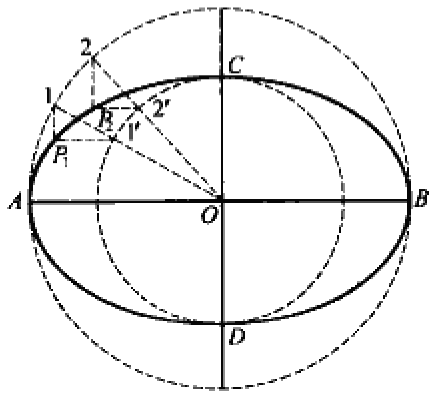


图 10

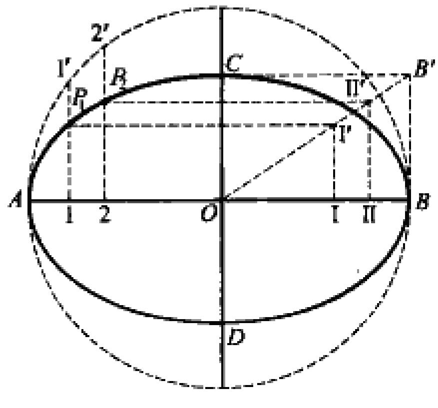


图 11

双曲线画法

(1) 如图 12,两个交点为 F_1,F_2,用一支笔 P 扣在一根线上,拿线的一端绕过 F_1,使另一端并齐,再绕过 F_2,把线拉紧然后移动 P,两线端同时收放,那么

P 的轨迹就成双曲线.

(2) 如图 13,两焦点为 F_1F_2,两顶点为 A_1A_2.在主轴上 F_1F_2 之处,任意取点 1,2,3,….以 F_1 为圆心,A_11 为半径,向上下作弧(在 P_1 及 P'_1 处),又以 F_2 为圆心,作弧,交前弧于 P_1 及 P'_1;同样得 p_1 及 p'_1.依同理再得 P_2,P'_2,p_2,p'_2,….这些点就都在双曲线上.

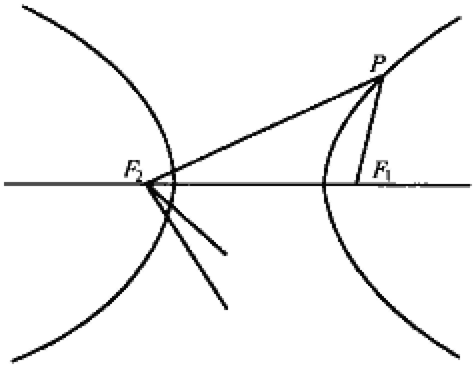


图 12

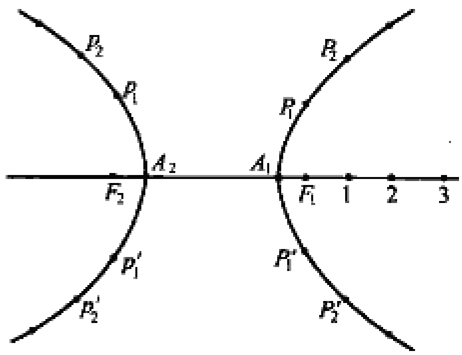


图 13

(3) 如图 14,两渐近线为 Ox,Oy.双曲线上一点为 P.过 P 作横纵两线各平行于渐近线,自 O 任意作射线交横线于 1,2,3,4,…,交纵线于 1′2′,3′,4′,…,自 1 及 1′ 各作平行于 Oy 及 Ox 的线相交于 P_1;自 2 及 2′ 各作平行于 Oy 及 Ox 的线相交于 P_2;….这些点 P_1,P_2,P_3,P_4,… 就都在双曲线上.

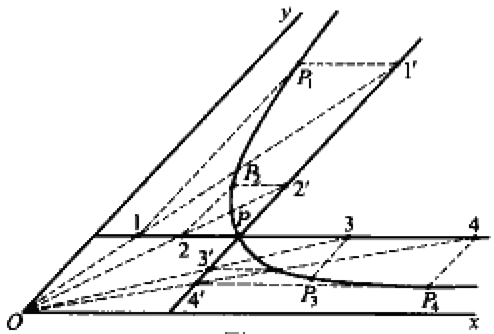


图 14

❖月亮与火星上的重量

3.人到月亮或火星上去旅行,身体的重量是要增加呢还是减少呢?你用什么法子可以计算出来?(提出人:宁波胡志益)

答 人到月亮或火星上去旅行,身体的重量都要减少,因为身体的重量关系于引力,而引力的大小是与球体的质量成正比,而和球体半径的平方成反比.

已知地球的质量为月亮的 81.45 倍,为火星的 9.26 倍.又地球的半径为月亮的 3.66 倍,为火星的 1.88 倍.故得两式如下:

$$\frac{月亮的引力}{地球引力}=\frac{(3.66)^2}{81.45}=0.164 \quad 或 \quad \frac{地球引力}{月亮引力}=\frac{1}{0.164}=6.09$$

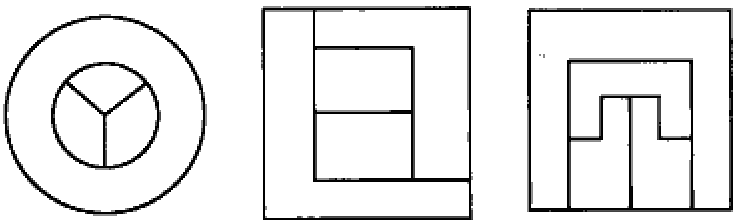
$$\frac{火星引力}{地球引力}=\frac{(1.88)^2}{8.26}=0.382 \quad 或 \quad \frac{地球引力}{火星引力}=\frac{1}{0.382}=2.60$$

这就是说,人在月亮上的重量,只有在地面上的16.4%;或说人在地面的重量要比在月亮上要重6.09倍,又在火星的重量,只有在地面上的38.2%;或说人在地面的重量要比在火星上重2.60倍.

❖分土地

4.一块土地,要把它分成4部分,使每部分都和其他三部分相连,问该怎样分法?又若分成5,或6或7,…,或 n 部分,使各部分都和其他四部分相连,问该怎样分法?(提出人:广西容县李振昌)

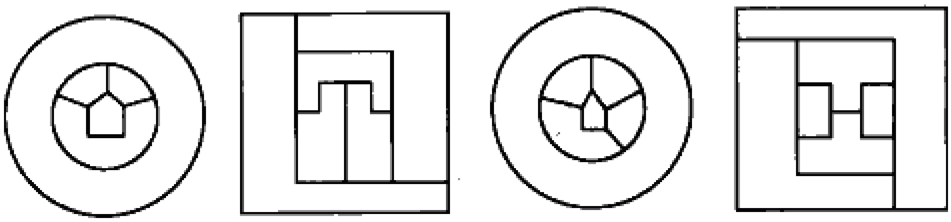
答　分成4部分如图15(a),(b),(c).



(a)　(b)　(c)

图 15

分成5部分如图16(a),(b);分成6部分如图16(c),(d),其余依此类推.



(a)　(b)　(c)　(d)

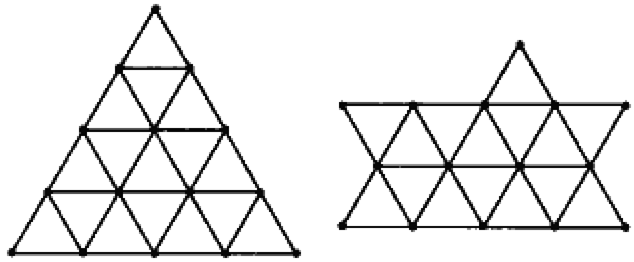
图 16

❖栽树

5.某农业社布置园地,用下面的栽树法:(1) 树苗15株,栽成23个正三角

形.(2) 树苗 24 株,栽成 20 行,每行 3 株.(3) 树苗 10 株,栽成 7 行,每行 4 株,(4) 树苗 21 株,栽成 12 行,每行 5 株.问各是怎样的栽法?(提出人:广州祝朝克及重庆姬宝坤)

答 (1) 如图 17(a)(b),在图(b)中,小△有十五个,△形的七个,△形的一个.



(a) (b)

图 17

(2) 如图 18.

(3) 把树栽成如右,$\dot{A}B\dot{C}D\dot{E}F\dot{G}H\dot{I}J$.

A 至 D 四株为一行,B 至 E 四株为一行,同样 C 至 F,D 至 G,E 至 H,F 至 I,G 至 J,共七行.

(4) 如图 19.

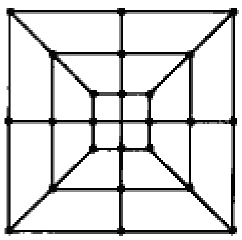


图 18

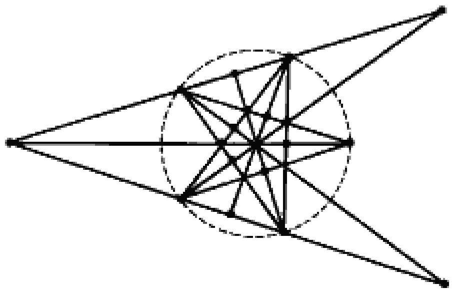


图 19

1958年9月号小知识解答者名单

解答第2题者:支煜根.

解答第3题者:汤彬如,上海陕北中学高三(3)$\alpha\beta\gamma\cdots\chi\psi\omega$ 数学小组.

解答第4题者上海陕北中学 $\alpha\beta\gamma\cdots\chi\psi\omega$ 数学小组,林淼,许维仁.

1958 年 9 月号问题

1. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 各数的倒数组成一等差数列. 求证:

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$$

证 因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的倒数组成一等差数列, 设公差为 d, 则

$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=\cdots=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=d$$

或

$$\frac{a_1-a_2}{a_1a_2}=\frac{a_2-a_3}{a_2a_3}=\cdots=\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}a_n}=d$$

根据比例定理可知

$$\frac{(a_1-a_2)+(a_2-a_8)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n}=d$$

即

$$\frac{a_1-a_n}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n}=d$$

又由等差数列第 n 项公式可知 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d$. 所以

$$d=\frac{a_1-a_n}{a_1a_n(n-1)}$$

所以

$$\frac{a_1-a_n}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n}=\frac{a_1-a_n}{a_1a_n(n-1)}$$

所以

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$$

2. 已知 $x\neq y$, 问 $|x|+|y|<100$ 有多少组整数解(x,y 与 y,x 我们认为是不同的)?

解 根据题意, 求 $|x|+|y|<100$ 的整数解的组数, 就是求 $|x|+|y|$ 分别等于 0,1,2,3,…,99 时整数解的组数和的意思.

设 $|x|+|y|=k$.

则当 $|x|$ 分别等于 $0,1,2,3,\cdots,k-1,k$ 时, $|y|$ 分别相应的等于 $k,k-1,\cdots,1,0$.

如果 $|x|=l$, 则 $|y|=k-l$.

(1) 设 $l\neq 0$, 则 $k-l\neq 0$.

显然在此情况下, $|x|+|y|=k$ 应有 4 组整数解:

$$(l,k-l),(-l,k-l),(l,-k+l),(-l,-k+l)$$

(2) 设 $l=0$, 则 $l=k$. 显然在此情况下, $|x|+|y|=k$ 有 2 组整数解:

$$(0,k),(0,-k)$$

同理$(k,0)$，$(-k,0)$也是$|x|+|y|=k$的2组整数解.

因此，当$k\neq 0$时，$|x|+|y|=k$应该有$2+4(k-1)+2=4k$组整数解.

如果$k=0$，则$|x|+|y|=k$只有一组整数解：

$$x=0,y=0$$

这样，我们便得到本题的结果，即$|x|+|y|<100$的整数解的组数为：

$$1+4(1+2+3+\cdots+99)=1+4\times\frac{99(99+1)}{2}=1+19\,800=19\,801$$

3. 求证：以定线段为底可作六个等角三角形，使它们的六个顶在同一圆周上.

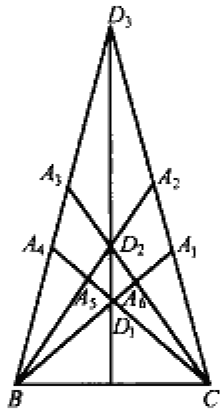


图 1

证 设BC为定线段，以B为顶，BC为一边，在BC的同侧作$\angle D_1BC$，$\angle D_2BC$，$\angle D_3BC$（图1）.

作BC的中垂线设与D_1B，D_2B，D_3B分别交于D_1，D_2，D_3.

延长BD_1，BD_2设与D_3C分别交于A_1，A_2. 联结CD_2，CD_1并且延长设与BD_3分别交于A_3，A_4.

又设BA_2与CA_4交于A_5，BA_1与CA_3交于A_6.

显 然 $\triangle A_1BC$，$\triangle A_2BC$，$\triangle A_3BC$，$\triangle A_4BC$，$\triangle A_5BC$，$\triangle A_6BC$的各角都分别等于$\angle D_1BC$，$\angle D_2BC$，$\angle D_3BC$. 从而它们是六个等角三角形.

因为相似形对应边成比例，所以$BA_1:BC=BC:BA_6$，所以$BC^2=BA_1\cdot BA_6$. 同理$BC^2=BA_2\cdot BA_5$.

所以A_1，A_2，A_5，A_6四点在同一圆周上.

因为A_5，A_6关于BC的中垂线对称.

所以A_1，A_2，A_5，A_6所在圆的直径在BC的中垂线上. 又A_3与A_2，A_4与A_1都关于BC的中垂线对称，所以A_3，A_4也在通过A_1，A_2，A_5，A_6的圆周上. 即A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6六点在同一圆周上.

4. 已知一直三棱柱的底是一直角三角形，它有一个锐角等于α，所对的直角边长等于a. 通过这个直角三角形的直角顶引一平面与斜边平行，而与通过斜边的侧面的交角等于$90°-\alpha$. 试求这个截面与下底间棱柱部分的体积.

解 设直三棱柱$ABC-A'B'C'$（图2）的底$\triangle ABC$为一直角三角形，$\angle C$为直角，锐角$\angle A=\alpha$，$BC=a$. 截面CDE与AB平行，交$ABB'A'$面于DE且与其交角等于$90°-\alpha$.

作$CF\perp DE$于F，$CG\perp AB$于G并联结FG. 因为这棱柱是直棱柱，所以CG

与侧面 $ABB'A'$ 垂直.因为 CDE 面与 AB 平行,所以 $DE \parallel AB$,所以 $CF \perp AB$.

所以 $FG \perp DE$ 于 F,从而 $\angle CFG = 90^\circ - \alpha$.

但 $\angle CBA = 90^\circ - \alpha$,所以 $\angle CFG = \angle CBA$.

在 $Rt\triangle CGF$ 与 $Rt\triangle CGB$ 中,由于 CG 为公共边以及 $\angle CFG = \angle CBA$,所以 $\triangle CGF \cong \triangle CGB$.所以 $FG = BG$.

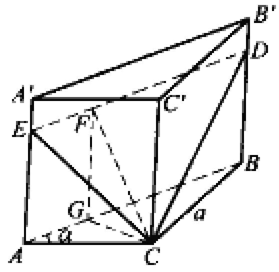


图 2

所求的体积是棱锥 $C-ABDE$ 的体积,而 CG 即其高,底面积等于 $FG \times AB$,所以所求的体积 $V = \frac{1}{3}AB \cdot FG \cdot CG$,即

$$V = \frac{1}{3}AB \cdot BG \cdot CG$$

因为 BG 是 $Rt\triangle ABC$ 的直角边 BC 在斜边 AB 上的射影,所以

$$AB \cdot BG = a^2$$

而由 $Rt\triangle CGB$ 中可知 $CG = a\cos\alpha$,所以

$$V = \frac{1}{3}a^3\cos\alpha$$

5.设 n 无限增加,则

$$\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2^2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2^3}\right)\cdots\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2^n}\right)\cdots$$

的极限为 $\frac{\alpha}{\tan\alpha}$,试证明之.

证 因为

$$1-\tan^2\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$1-\tan^2\frac{\alpha}{2^2} = 1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2^2}}$$

$$\vdots$$

$$1-\tan^2\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2^n}}$$

所以

$$\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2^n}\right)=\frac{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^n}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos^2\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos^2\frac{\alpha}{2^n}}=$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^n}}$$

因为

$$\sin\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=2^2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\sin\frac{\alpha}{2^2}=$$

$$2^3\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^3}\sin\frac{\alpha}{2^3}=\cdots=$$

$$2^n\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^n}\sin\frac{\alpha}{2^n}$$

所以

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

因为当 n 无限增加时，$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}$，即$\frac{\alpha\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}$的极限为 α，所以当 n 无限增加时，$\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$的极限为$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

1958年9月号解答者名单

解出3者:电信学院研究所数学小组.

解出2者:关傅汗,周廷瑛.

解出5者:格咪欣,余春熔,上海同德中学58154,河北石家庄第二中学,李宝金,沈超,吴海泉,周岐鸣,果世亮,李钧,荣广颢,岳佐圣.

解出3者:刘凤供,马庆恩,陈玉玲,金民发,戚炳干,马振元,王国瑞,吴中强,江西省吉安高中普辽一班数学小组,孙承哲,彭守仁,尹兴金,刘连标,安秉权,阿城一中丁文小组,余胜原,李健英,程玉琮,宋国栋,金钟春,张畛寰,魏仁,双春,王奇兴,陈玉麟,李植荣,廖维端.

解出1,4,5者:吴涵之,芭焦,卞龙兴,陈鸿钢,王子连,孙成裕,季永聚,刘德序,顾志刚,陈桐大,万达,金守斌,陈淡,北京师大附中高二(2)班伽罗瓦数学爱好群,王朝音,张振鑫,杨振南,舒昌乐,杜士奎,刘德敏,刘德民,施忠义,顾立状,陈骥,彭京鹏,蒋镇瀛,戴文华,朱才禄,王承欣,王阳,唐家龙,费成明,杜星福,佟兆雄,韩念国,李张范,金美玉,丁怀成,王祝然,钟贞一,毛应瑜,何立石,彭拱及王敏中及祁师聪,季鼎祥,胡汉贤,钱贻策,汪于洋,赵源,吴运寿,陈涤心,胡永明,路鸿祥,项正清,贾凤鸣,顾庆桂.

解出1,2,5者:邹中桂.

解出1者:杨克中,杨韵石,张德楠,郑昌,陈教原,丁国梁,王永吉,林镜清,朱永藩,费振宇,唐振炎,华大平,王普,郭友蓝,吴凤竹,张凤毛,黄石禄,周直平,包浩然,杨贵祥,王志中,师大附中超英数学小组,刘玉武,李好古,邓荣华,叶祖超,朱彪,tzhs数学组,李开俊,张声国,刘撰一,王殿学,时成权,朱伯上阴,罗家声,徐光容,福州三中高三(3)x,yz,王可尧,山西阳高一中高三钢铁数学小组,俞大义,格朱欣,郭谦恕,段世槐.郭耀祖,邓玉忠,宋焕根,付武匡,王华琴,白泅州,张春班,高岳,c,s二人数学小组,李鹏霞,王振武,任辛成,福州第五中学高二(2)数学爱好者,任术,上海市成都中学高三(1),张芹甫,毛华杰,卞祖蓝,上海新成中学Δ数理化小组,郑斐能,上海市和平中学高二(1),杨一超,朱正新,周淘华,刘景长,蒋守义,赖守仁,夏沼良,余立仁,范鹏鸣,李耀天,熊开洋,金荣熙,江苏台州中学初三(8)红专数学小组,涂火保,姜志民,楼其良,侯明东,袁永昌,刘科成,采矿数学小组,匡萃心,邹宝玉及邹鸿洲,王渝.

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007－09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007－09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007－09	38.00
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008－01	28.00
新编平面解析几何解题方法全书	2010－01	18.00
数学眼光透视	2008－01	38.00
数学思想领悟	2008－01	38.00
数学应用展观	2008－01	38.00
数学建模导引	2008－01	28.00
数学方法溯源	2008－01	38.00
数学史话览胜	2008－01	28.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007－10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008－01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	2008－05	98.00
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	88.00
天庭的秩序——三体问题的历史	即将出版	88.00
发展空间想象力	2010－01	38.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006－12	68.00
平面几何证明方法全书	2007－08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006－12	18.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007－09	38.00
初等数学复习及研究(平面几何)	2008－09	58.00
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009－01	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009－06	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	即将出版	48.00
几何变换与几何证题	2010－01	88.00
500 个世界著名几何名题及 1000 个著名几何定理	即将出版	78.00
三角形的五心	2009－06	28.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006-05	58.00
历届 CMO 试题集	2008-09	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	58.00
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00
初等数论难题集(第二卷)(上)	即将出版	48.00
初等数论难题集(第二卷)(下)	即将出版	38.00
组合数学难题集	即将出版	38.00
数学 我爱你	2008-01	28.00
精神的圣徒　别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00
数学史概论	2009-06	78.00
博弈论精粹	2008-03	58.00
多项式和无理数	2008-01	68.00
模糊数据统计学	2008-03	48.00
解析不等式新论	2009-06	68.00
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00
初等数学研究(Ⅰ)	2008-09	68.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009－05	118.00
中国初等数学研究　2009卷(第1辑)	2009－05	20.00
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010－01	58.00
中等数学英语阅读文选	2006－12	38.00
统计学专业英语	2007－03	28.00
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009－02	38.00
高考数学的理论与实践	2009－08	38.00
中考数学专题总复习	2007－04	28.00
向量法巧解数学高考题	2009－08	28.00
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010－01	38.00
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010－01	38.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
邮　　编:150006
联系电话:0451－86281378　　13904613167
E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn